Análisis matemático

Julio Rey Pastor

Pedro Pi Calleja

César A. Trejo

Volumen III

Análisis funcional y aplicaciones

EDITORIAL KAPELUSZ • BUENOS AIRES
MORENO 372

Publicado en noviembre de 1959.

LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO XXVII

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

CAPÍTULO XXIX

FUNCIONES ANALÍTICAS

PRESENTACIÓN

Al contemplar retrospectivamente la voluminosa obra, ya terminada, es deber de justicia ensalzar el ingente esfuerzo realizado por mis eficaces colaboradores, que no se han limitado ciertamente a reorganizar, dentro del enciclopédico plan que habíamos trazado, todo el contenido de mis obras didácticas publicadas durante cuarenta años de docencia, sino que lo han enriquecido con nuevos capítulos y cinco Apéndices, además de completarlo en otros aspectos y con rica colección de ejercicios, fruto de su práctica profesoral.

Ya la simple reproducción ad litteram *de más de un millar de páginas de apretado texto impreso, con la necesaria coordinación de capítulos y unificación de notaciones, significaría agobiante trabajo; pero las copiosas adiciones referidas y los perfeccionamientos de pormenores puntualmente recordados en las minuciosas reseñas "contenido de volumen I, II, III" acrecen el mérito de mis colegas, con evidente ganancia para la obra, que docentes y discentes han premiado con el galardón del éxito.*

Estas modificaciones cuantitativas no han repercutido en la estructura de la obra, que mis amigos —haciéndome inmerecido honor— han conservado respetuosamente; mientras el propio autor firmante, eterno crítico insatisfecho de sus producciones, la habría cambiado radicalmente. Ésta ha sido nuestra esencial discrepancia; y no estará de más aclarar una segunda: los calificativos de valoración relativa asignados a las numerosas obras citadas en la Bibliografía, son juicios de mis colaboradores, a quienes debemos el cuantioso esfuerzo de componer esa lista exhaustiva —sin par en ningún otro tratado— que quizá abrumará al principiante, pero cuyas orientaciones agradecerá el profesor.

El vacío que una veintena de países cultos lamentaban, por dificultar su acceso a la Matemática superior, ha sido por fin llenado con esta obra metódica, en que culmina medio siglo de progreso de la familia hispano-parlante, algunos de cuyos miembros han ascendido ya desde su pasiva posición de espectadores en que se vivió durante muchos siglos, a la de actores

de ese progreso, ingresando muy dignamente en la comunión internacional de la ciencia abstracta, que antaño se creía vedada a nuestra raza.

Inexorable anatema divino con resignados creyentes egregios (ECHEGARAY, MENÉNDEZ Y PELAYO, TORROJA, GARCÍA DE GALDEANO, ORTEGA Y GASSET) *que los hechos han desmentido rotundamente en pocos años de trabajo creador intenso, dejando de lado las repetidas divagaciones histórico-filosóficas sobre el manido tema.*

J. REY PASTOR.

Buenos Aires, octubre de 1959.

CONTENIDO DEL VOLUMEN III

Como en el volumen II, debemos hacer referencia al plan de la obra —incluído en el volumen I— con respecto a su finalidad y estructura, y al índice general que da el programa ordenado de los temas tratados en este volumen, limitándonos aquí a señalar los aspectos que consideramos importantes en el enfoque y desarrollo de los mismos.

La teoría de la medida infinitamente aditiva y de la integración basada en ella ha adquirido en la Matemática moderna un desarrollo considerable, y es hoy no sólo una de las construcciones más subyugantes de esta disciplina, sino también un pilar indispensable de muchos de sus desarrollos. En el capítulo XXIV se la expone con amplitud mayor que la usual en la mayor parte de los tratados de análisis matemático, procurando dar en el texto fundamental y especialmente en las notas, una exposición que incluya aspectos de los progresos mas modernos. Véase por ejemplo, la demostración completa del teorema de unicidad de medidas por el método indicado por REY PASTOR, *lo teoría de* CARATHÉODORY *sobre medidas exteriores, desarrollada en forma que pueda generalizarse inmediatamente a una medida de* LEBESGUE-STIELTJES *(nota I, a) y el procedimiento simplificado seguido para demostrar que los conjuntos medibles respecto de una medida exterior forman una familia infinitamente aditiva. Se comparan las distintas teorías de* CARATHÉODORY, VALLÉE POUSSIN, LEBESGUE, *etc. En los ejercicios se desarrolla la teoría general de funciones aditivas de conjunto, con ejemplos interesantes sobre aspectos paradójicos de la teoría.*

La integral de LEBESGUE *se desarrolla por el método de* REY PASTOR, *extendiendo ahora la definición y los teoremas al caso de conjunto de medida infinita, con muestra de su vastísimo alcance, y se perfeccionan y completan las demostraciones conocidas. Los teoremas de convergencia se dan en forma completa y rigurosa con ejemplos aclaratorios de su correspondiente validez. En el estudio de la continuidad absoluta y la función integral (L), se antepone el clásico teorema de* LEBESGUE *sobre existencia de derivada finita de una función monótona, sencillamente demostrada mediante el lema elemental de* RIESZ. *Señalemos, también, el cuidadoso estudio de la aplicabilidad de la regla de* BARROW *a la integral de* LEBESGUE *y la demostración del teorema de sustitución de variables en la integral (L). Las notas de fin del capítulo XXIV tratan de los más elevados puntos de la teoría, incluyendo la integral (R⁰) de* REY PASTOR. *Todo este capítulo, de carácter esencialmente conceptual y teórico, puede ser omitido en una primera lectura por quienes se interesen ante todo en las aplicaciones.*

El capítulo XXV sobre series e integrales de FOURIER *se inicia con un parágrafo (§ 96) dedicado al espacio de* HILBERT, *estructura cuya importancia actual en el análisis funcional torna injustificable su omisión aún en un tratado general de análisis, y además proporciona el marco adecuado a los desarrollos subsiguientes, en especial los de § § 97 y 98. En éstos optóse por abandonar la costumbre de comenzar por las series de* FOURIER *trigonométricas y tratar luego —subsidiariamente y*

como generalización— los desarrollos de FOURIER *respecto de sistemas ortonormales cualesquiera, para comenzar con un estudio independiente de estos últimos (§ 97), más de acuerdo con su creciente importancia en la Matemática, e incluyendo con la ortogonalidad respecto de un núcleo, los importantes polinomios de* CHEBICHEV, JACOBI, LAGUERRE, HERMITE *(§ 97-8 a § 97-12). En el estudio de las series trigonométricas (§ 98), se da en § 98-5 la aplicación del método de sumación de* CESÀRO, *y a la demostración que así resulta del clásico teorema de aproximación de* WEIERSTRASS, *se agrega una de las más breves demostraciones directas del mismo.*

El estudio de la integral de FOURIER *(§ 99) es precedido por una introducción intuitiva basada en la ampliación indefinida del intervalo de periodicidad para la serie, y seguido por la transformación de* FOURIER *en sus diversas formas.*

En la nota I de este capítulo XXV se introducen los espacios (L^p), demostrándose para ellos las clásicas desigualdades de HÖLDER *y de* MINKOWSKI; *en nota II se estudia un doble problema de suficiencia:* a) *del sistema de referencia (funciones ortogonales) para representar cualquier función de cuadrado integrable como elemento de un espacio vectorial;* b) *de estos espacios vectoriales para lograr el isomorfismo con el de* HILBERT. *En la nota III sobre el teorema de* RIESZ-FISCHER *se lo demuestra en la forma de* FISCHER *[completidad de (L^p)] pasando luego a la forma de* RIESZ *en (L^2), obteniéndose luego la equivalencia de la densidad de un sistema ortonormal en (L^2) con su completidad.*

Las ecuaciones diferenciales se estudian con detenimiento, dedicándose dos capítulos a las ordinarias, el primero de ellos (capítulo XXVI) dedica cinco parágrafos (§§ 100 á 104) solamente a las de primer orden, con énfasis en las cuestiones geométricas (§§ 100 y 103). Sobre el texto fundamental de este capítulo señalemos solamente que en § 104-4, al clásico teorema de existencia y unicidad con la condición de LIPSCHITZ *siguen teoremas fuertes de existencia y unicidad, y en notas, breves referencias a la dependencia respecto de parámetros, a otras demostraciones y a otros teoremas de existencia y unicidad* (ARZELÀ, MONTEL, OSGOOD, NAGUMO, PERRON).

En la única nota de este capítulo XXVI, sobre soluciones singulares, se introducen éstas como soluciones formadas por elementos lineales singulares, previa una nutrida ejemplificación sobre estos elementos y el lugar de sus puntos sostenes, discutiéndose luego brevemente la relación entre solución singular y envolvente, así como entre las curvas discriminantes de la ecuación y de la solución general.

En el capítulo XXVI sobre ecuaciones diferenciales de orden superior y sistemas de ecuaciones diferenciales, más de la mitad del texto fundamental y dos de las notas (I: Ecuaciones y funciones de BESSEL; *III: Problemas de contorno del tipo de* STURM-LIOUVILLE) *se dedica a las ecuaciones y sistemas* lineales *dada su importancia en los problemas de la Física, dándose amplia versión de métodos simbólicos (§ 108-8 y 9) que hallarán amplio marco en el apéndice III sobre cálculo operacional. Entre las numerosas aplicaciones mencionemos la introducción de las primitivas y derivadas de orden real (§ 106-1, nota 3), movimientos vibratorios (§ 108-2), descarga de un condensador (§ 108-3), oscilaciones forzadas y resonancia (§ 108-5), viga apoyada (§ 108-7), movimiento de los planetas (§ 109-5, ej. 2), etc.*

La clasificación y estudio de los puntos singulares de ecuaciones diferenciales de primer orden *se hace en nota II* de este capítulo *XXVII dada la conveniencia pedagógica de comenzar con el caso de la ecuación* $dy/dx = (a_2 x + b_2 y)/(a_1 x + b_1 y)$ *o un sistema equivalente de ecuaciones lineales de coeficientes constantes.*

El extenso capítulo XXVIII sobre ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y cálculo de variaciones, dedica al primer tema tres parágrafos, de los cuales dos sobre ecuaciones de primer orden (lineales,

§ 110, y generales, § 111), con énfasis en los aspectos geométricos y amplia cabida para el problema de CAUCHY *(§ 111-6) así como para los métodos de integración de* LAGRANGE *y* CHARPIT *(§ 111-7) y otros (§ 111-8). Una ampliación de este estudio dan las tres primeras notas, algo extensas, de este capítulo sobre: ecuaciones en diferenciales totales, transformaciones de contacto, y sistemas de ecuaciones en dirivadas parciales.*

En el § 112 sobre ecuaciones parciales de segundo orden, que trata casi exclusivamente las lineales orientándose hacia las aplicaciones físicas, se hace amplio uso de métodos simbólicos (§ 112-3- a § 112-5). El método de separación de variables se ilustra en la breve nota IV sobre funciones de FERRERS *y conexas.*

Las notas V á IX, sobre problemas de STURM-LIOUVILLE, *vibraciones y equilibrio, y métodos basados en la función de* GREEN, *dan un amplio panorama de métodos usados en los problemas lineales de la Física.*

El § 113 sobre cálculo de variaciones termina con el estudio de la variación segunda y condición de LEGENDRE *(§ 113-6), y se complementa con la extensa nota X del capítulo, sobre métodos variacionales directos.*

El capítulo XXIX, de más de cien páginas, trata sobre funciones analíticas de variable compleja. Ya entre los conceptos fundamentales (§ 114) se presentan propiedades como el teorema del módulo máximo y sus consecuencias (§ 114-6) destacándolas —conforme a una orientación moderna— como netamente topológicas primarias, no obstante resultar sencillo corolario en la teoría de la integral. El estudio de las condiciones de monogeneidad (§ 114-2), se ahonda en la nota I del capítulo, y las relaciones con la teoría del potencial (§ 114-3) se aplican en la nota II sobre ciertos movimientos de fluidos incompresibles.

Se logra una apreciable simplificación en la teoría de la integración en el campo complejo restringiendo en forma inesencial la clase de curvas tomadas como camino, en el § 115 que termina con un bosquejo sobre la obtención de la función analítica completa por prolongación (§ 115-12), dejándose para la nota IV del capítulo, sobre monogeneidad y analiticidad, el caso de funciones que aún siendo monógenas en conjuntos que no forman recinto, no gozan ya de las propiedades fundamentales de las funciones analíticas. En nota III se da la sencilla demostración de GOURSAT *del teorema de* CAUCHY *en condiciones muy generales.*

El estudio de las funciones multiformes (§ 116) se hace más accesible a través de casos concretos, iniciándose así este parágrafo con cierto detalle sobre la función logarítmica y su superficie de RIEMANN.

En el § 117 sobre singularidades se dan aplicaciones de la derivada logarítmica (§ 117-3), un bosquejo sobre teoremas de PICARD *y direcciones J de* JULIA *(§ 117-4), y en ejercicios algunos complementos importantes de la teoría, como teoremas de* ROUCHÉ *y de* HURWITZ *y aplicaciones a las funciones univalentes, cuestiones que luego se aplican en la nota V del capítulo, sobre principio de acumulación de funciones analíticas.*

El § 118 sobre los diversos desarrollos en series y productos infinitos, termina con un resumen de los conceptos fundamentales sobre funciones enteras (§ 118-6), dándose también en los ejercicios de este parágrafo importantes complementos de la teoría.

Completan las notas del capítulo XXIX tres más extensas: VI, representación conforme; VII, integrales eulerianas; y VIII, transformación de LAPLACE, *esta última en estrecha relación con el apéndice III sobre cálculo operacional.*

Completan el texto de este volumen (además de las respuestas a ejercicios e índices de símbolos y alfabético como en los volúmenes anteriores) cinco apéndices que se refieren a la obra total y tratan otros tantos temas autónomos pero en relación con el texto general.

El apéndice I sobre homogeneidad dimensional es un resumen de la memoria de P. PI CALLEJA: Las ecuaciones funcionales de la teoría de magnitudes, *a la que se remiten la mayor parte de las demostraciones de los teoremas de fundamentación conceptual de carácter puramente*

teórico. En estas discutidas cuestiones de fundamentación conceptual se sigue por ello la posición adoptada en dicha memoria, que es la basada en la línea de ideas de POINCARÉ, RUNGE, BRIDGMAN *y* BIRKHOFF. *Se procura dar una detallada, documentada y didáctica exposición con numerosos ejemplos del análisis dimensional de la teoría de magnitudes; así, precedido por el imprescindible y no siempre bien comprendido tratamiento de los productos nildimensionados, que es de carácter puramente lineal algebraico, se hace también el estudio completo del modo de aplicar en la investigación física experimental el utilísimo teorema II de* VASCHY-BUCKINGHAM *con su demostración completa y simplificada. Es interesante hacer notar que en esta versión de la memoria citada, se ha agregado una brevísima demostración poco conocida del clásico teorema funcional de* CAUCHY, *válida para una familia de funciones aditivamente integrables.*

El apéndice II sobre ecuaciones integrales se ha basado en la exposición que sobre el tema da J. REY PASTOR: Los problemas lineales de la Física, *completando y rectificando además demostraciones y ejemplos. Para llegar a las fórmulas de* FREDHOLM *se explican con detenimiento los métodos de aproximaciones del núcleo, ya por núcleos disociados* (HILBERT), *ya por funciones escalonadas* (FREDHOLM). *Se trata en detalle la aplicación al problema de* CAUCHY *de la ecuación diferencial lineal. Particular interés ofrece la correcta y simplificada demostración expuesta sobre la existencia y naturaleza del espectro de autovalores en el caso de núcleo simétrico por el método variacional. Después de tratar los desarrollos en serie de los núcleos simétricos y de sus emanantes, se acaba el apéndice dando idea suscinta de las ecuaciones integrales de primera especie y de las ecuaciones singulares, en particular las correspondientes a núcleos de tipo* CAUCHY *según los últimos trabajos de* MUSKHELISHVILI. *Agradecemos al Dr.* J. NINOT *de Barcelona la revisión, lectura y útiles observaciones que ha realizado del original de este apéndice.*

En el apéndice III, sobre cálculo operacional, procuramos dar en extensión moderada un panorama general de orientación moderna. Después de una introducción sobre los métodos operatorios de HEAVISIDE *y de* DIRAC, *los apartados 2 á 7 desarrollan la fundamentación con la transformación de* LAPLACE *dando aplicaciones diversas y el nº 8 da rápida versión de métodos basados en la transformación de* FOURIER. *Los desarrollos previos sobre las transformaciones de* LAPLACE *(C. XXIX-VIII) y de* FOURIER *(§ 99) teniendo en vista esta utilización, permiten ahora abordar esos temas en forma muy ágil. El nº 9 muestra la aplicación de la transformación de* LAPLACE *bilateral, a la vez que da noticia de modernos resultados de* HIRSHMAN *y* WIDDER *sobre inversión de transformaciones integrales por convolución. Al justificar los métodos operatorios de* DIRAC *damos en nº 10 sucinta versión de la moderna teoría de las distribuciones de* SCHWARTZ.

En el apéndice IV se dan nociones sobre cálculo de probabilidades (nºˢ 1 á 5), incluyendo teoremas generales sobre sistemas de variables aleatorias (nº 4) y variables aleatorias continuas (nº 5); se aplican luego estas cuestiones en un sucinto estudio de los errores de observación (nºˢ 6 á 10), remitiendo a la nota I del capítulo XIX, en volumen II, para la obtención de las ecuaciones normales en el método de cuadrados mínimos.

El apéndice V se dedica a nomografía, dando idea primero de los ábacos cartesianos en sus distintas modalidades: generales, rectilíneos, circulares y triangulares, con la aplicación de éstos al estudio de las mezlcas ternarias y su simplificación mediante los ábacos exagonales. Se sigue luego con un completo estudio de los nomogramas de puntos alineados y de sus principales tipos particulares: de los de tres escalas de soportes rectilíneos paralelos (con la ejemplificada determinación de módulos adecuados), de los tipos reducibles a ellos, de los casos en que conviene ponerlos en N ó Z, de los de tres rectas concurrentes, de los

de dos escalas de soportes paralelos rectilíneos y una de soporte curvilíneo, todo ello debidamente aclarado con correspondientes ejemplos. Se estudian también ábacos y nomogramas para relaciones con más de tres variables en diversos tipos de aplicación corriente, llegando incluso al de alineaciones múltiples para relaciones entre n *variables. Se concluye con una síntesis comparativa de ventajas e inconvenientes en el uso de ábacos o nomogramas.*

CAPÍTULO XXIV

TEORÍA DE LA MEDIDA *

§ 94. MEDIDAS INFINITAMENTE ADITIVAS

1. Medida boreliana de conjuntos. — Para abordar la medida general de conjuntos dados en la recta euclídea E_1, donde se ha definido la distancia de dos puntos a, b por $|b - a|$ y comprender la íntima relación de este problema con el de la integración, veamos cómo pueden aplicarse a la teoría de la medida de conjuntos las integrales de RIEMANN y DARBOUX introducidas en el § 49.

Ante todo hemos de considerar conjuntos X contenidos en un cierto intervalo I (es decir, acotados por I).

DEF. 1. *La función característica* $f_X(x)$ *del conjunto* X *contenido en el intervalo* I *es la función definida en* I *que vale* 1 *en* X *y* 0 *en su complemento* I — X, es decir:

[94-1] $f_X(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \varepsilon X \quad ; \quad f_X(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \varepsilon I - X.$

DEF. 2. Se llama *extensión* del conjunto X ó también su *medida de* PEANO-JORDAN o *medida* (R), al valor, *en caso de existir*, de la integral de RIEMANN (§ 49-1):

[94-2] $$(R) \int_I f_X(x)\,dx = e(X).$$

En cambio, siempre existen, definidas por las integrales superior e inferior de DARBOUX (§ 49-2), las llamadas:

[94-3] $$\begin{cases} \textit{extensión exterior} = \bar{e}(X) = \overline{\int_I} f_X(x)\,dx \quad , \\ \textit{extensión interior} = \underline{e}(X) = \underline{\int_I} f_X(x)\,dx \quad , \end{cases}$$

y sólo si estas dos coinciden, el conjunto X tiene extensión (§ 49-2).

La extensión de un intervalo coincide con lo que llamaremos *medida elemental*:

* Este Capítulo puede omitirse en una primera lectura.

DEF. 3. *Medida elemental* $|I|$ *de un intervalo* I *de extremos* $a < b$ *(incluídos o excluídos), es el número* $|I| = b - a > 0$; *la medida de un punto es nula.*

Esta medida elemental tiene la siguiente propiedad de *aditividad finita*:

TEOR. 1. *La medida de un intervalo suma de un número finito de intervalos no rampantes (sin puntos interiores comunes) es la suma de las medidas de los intervalos componentes.*

La demostración trivial se basa en las leyes formales de las sumas algebraicas de un número finito de términos reales (§ 7-5).

Se ve (§ 49-2) que la extensión exterior del conjunto X contenido en I es el extremo inferior de la suma de las medidas elementales de los subintervalos que contienen algún punto de X respecto de todas las particiones de I en un número *finito* de subintervalos *no rampantes*, mientras que el extremo superior de la suma de las medidas de los subintervalos todos cuyos puntos pertenecen a X da la extensión interior.

La extensión, en caso de existir, da una medida que tiene también la propiedad de aditividad *finita,* pero un conjunto suma disjunta (sin puntos comunes) de una infinidad numerable de conjuntos con extensión, puede no tener extensión, aún estando acotado, así como el límite de funciones integrables (R) puede no ser integrable (R) (§ 85-1, nota 2): en resumen, la extensión y la integral (R) no son siempre permutables con la operación de paso al límite.

EJEMPLO 1. El conjunto de puntos racionales de [0, 1], compuesto de una infinidad numerable (§ 2-11) de puntos (cada uno con extensión 0), no tiene extensión por no ser integrable (R) la función de DIRICHLET (§ 49-2, ejemplo). Si para una ordenación cualquiera de dicho conjunto consideramos los conjuntos formados por los n primeros números racionales, la sucesión de sus funciones características, cada una integrable (R) con integral nula, tiene como límite la función de DIRICHLET, no integrable (R).

NOTA 1. Para que todo conjunto tuviese medida, CANTOR propuso considerar como tal su extensión exterior, pero ésta no es ni finitamente aditiva. Por ejemplo, el conjunto K de los puntos racionales del intervalo $I = [0, 1]$ y el $I - K$ de los puntos irracionales tienen ambos extensión exterior 1, lo mismo que su suma I (§ 49-2, nota).

Así, la extensión no tiene la propiedad de *aditividad infinita* (también llamada *completa*) y el progreso esencial de la teoría de la medida a partir de BOREL (1898) radica en haber logrado la aditividad infinita con su método de medir, correlativo con el proceso de integración de LEBESGUE (1902) que estudiaremos en § 95, que hace permutables la integral y paso al límite en condiciones amplias (§ 95-4).

Por aplicación reiterada en *número finito o infinidad nu-*

merable de operaciones de unión, intersección o complemento (Cap. I, nota I) a partir de los intervalos se obtiene la *familia de* BOREL de conjuntos (B), a los que pertenecen los conjuntos abiertos G y cerrados F (§ 64-4, nota 2) según en seguida demostraremos (§ 94-2). Para estos conjuntos (B) vamos a definir la *medida de* BOREL, que coincide con la que introduciremos en § 94-4 de LEBESGUE ó (L), aún cuando los conjuntos medibles (L) formen una familia más amplia, pues pueden diferir de los (B) en un conjunto de medida nula (§ 82-2). Demostraremos más adelante (§ 94-6, nota 5) que todo conjunto X medible (L) tiene una *cápsula* G_δ $(\geqq)$X [siendo G_δ un conjunto *seudo-abierto*, o sea, intersección numerable de conjuntos abiertos G^i, y por tanto conjunto (B), pero si los G^i son en número infinito puede ser no-abierto (Cap. XVIII, nota I, *b*)), y un *núcleo* F_σ $(\leqq)$X (siendo F_σ un *seudo-cerrado*, o sea unión numerable de conjuntos cerrados F^i, y por tanto conjunto (B), pero si los F^i son en número infinito puede ser no-cerrado [Cap. XVIII, nota I, *b*)], tales que sean iguales las medidas de los tres conjuntos F_σ $(\leqq)$X$(\leqq)$$G_\delta$.

NOTAS: 2. La teoría de la medida se extiende fácilmente a espacios euclídeos $\mathbf{E}_n$ y también a espacios topológicos E (Cap. XVIII, nota I, *d*), en particular métricos.

En el espacio $\mathbf{E}_n$ la medida elemental (def. 3) de un intervalo I de puntos $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (paralelepípedo generalizado, § 64-4, *c*), $a_i \leqslant$ $\leqslant x_i \leqslant b_i$, $i=1, \ldots, n$ (donde $\leqslant$ puede en todo o en parte sustituirse por $<$) viene dada por el producto de las longitudes de sus n lados:

[94-4] $$|I| = \prod_r (b_r - a_r) \geqslant 0.$$

Cuando $a_r = b_r$ para algún r, el intervalo es *degenerado* y su medida es nula.

Sustituyendo x por $\mathbf{x}$, subsisten las definiciones [94-1], [94-2] y [94-3], sin más que aplicar la integral múltiple de RIEMANN (§ 83). Así la definición dada de extensión de un recinto (§ 83-3, def.) es caso particular de la [94-2].

3. En un espacio topológico general E (Cap. XVIII, nota I, *b*) se dice que una familia H de conjuntos X es *infinitamente aditiva* si cumple: 1º) El conjunto vacío 0 pertenece a H: 2º) Si X pertenece a H, también su complemento E — X pertenece a H; 3º) La unión de un número finito o infinito-numerable de conjuntos pertenecientes a H, también pertenece a H.

Entonces, como consecuencia, la intersección de un número finito o infinito-numerable de conjuntos pertenecientes a H, también pertenece a H.

Si el espacio E es métrico, son importantes las familias H infinitamente aditivas que contienen los conjuntos cerrados F y entonces contienen también los abiertos G (o recíprocamente). Entonces la familia *mínima* B de conjuntos cumpliendo estas condiciones (intersección de todas las familias infinitamente aditivas que contienen los abiertos y cerrados de E) forma la familia infinitamente aditiva de conjuntos (B) o de BOREL del espacio métrico E.

A partir de la medida elemental de los intervalos (en los espacios euclídeos $\mathbf{E}_n$), puede edificarse toda la teoría de la me-

dida (según C. DE LA VALLÉE POUSSIN) basándose exclusivamente en la aditividad infinita y entonces se introduce:

DEF. 4. *La medida de un conjunto numerable de puntos es cero, suma de las medidas de sus puntos. La medida boreliana de un conjunto* X *compuesto de la unión de un número finito o infinito-numerable de intervalos no rampantes* I_i *es la suma de las medidas* $|I_i|$ *de sus intervalos componentes.*

Para que este método de medir no sea contradictorio es esencial demostrar el siguiente *teorema de unicidad*:

TEOR. 2. *Si un conjunto* X *puede considerarse de dos maneras distintas* $X = \Sigma I_i = \Sigma I_j^*$ *como la suma de una infinidad numerable de intervalos no rampantes* [posiblemente degenerados (nota 2) o vacíos], *la suma de las medidas de estos intervalos es la misma en ambos casos*: $\Sigma |I_i| = \Sigma |I_j^*|$.

DEM.: Llamemos I_{ij} a la intersección $I_i I_j^*$ acaso intervalo degenerado o vacío. Para i fijo es

$$I_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{ij} \quad \text{con} \quad |I_i| = \sum_{j=1}^{\infty} |I_{ij}| \quad ,$$

lo que no es evidente, por no poder aceptar como fundamento el criterio de aditividad infinita, pues precisamente estamos demostrando la no-contradicción del mismo. [Por ejemplo, dicho criterio sería contradictorio en la recta racional (ver nota 4), tomando I_i no degenerado, tal que $|I_i| > 0$, con I_{ij} reducidos a puntos de medidas $|I_{ij}| = 0$]. Desde luego, por ser no-rampantes los $I_{ij} (\leqq) I_i$ las sumas parciales serán

$$\sum_{j=1}^{m} |I_{ij}| \leqslant |I_i| \quad \text{y por tanto} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_{ij}| \leqslant |I_i|.$$

Por otra parte, para todo $\varepsilon > 0$, se podrá encerrar cada I_{ij} en un intervalo *abierto* J_{ij} tal que su medida sea $|J_{ij}| < |I_{ij}| + \varepsilon/2^j$. Entonces, cada punto de la clausura $\overline{I}_i$ de I_i pertenecerá a un intervalo abierto J_{ij}, bastando un número finito de éstos por el lema de BOREL (Cap. XVIII, nota II) para cubrir $\overline{I}_i$. Por las leyes de monotonía de las sumas *finitas* de números reales (§ 7-5), será $|I_i|$ menor o igual que la suma (finita) de esos J_{ij}, y por tanto

$$|I_i| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |J_{ij}| < \sum_{j=1}^{\infty} (|I_{ij}| + \varepsilon/2^j) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |I_{ij}|\right) + \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, de ésta y la anterior resulta

$$|I_i| = \sum_{j=1}^{\infty} |I_{ij}|.$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

es la suma por filas de la serie doble

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} | I_{ij} |$$

que ha de coincidir con

$$\sum_{j=1}^{\infty} | I_j^* |$$

suma por columnas de dicha serie doble de términos no-negativos (§ 81-3, teor. 3), quedando así probada

$$\sum_{i=1}^{\infty} | I_i | = \sum_{j=1}^{\infty} | I_j^* | .$$

NOTA 4. Corolario inmediato de este teorema 2, referido a las definiciones 3 y 4, es la *no-numerabilidad del continuo* (cfr. Cap. II, nota II, teor. 1), pues el conjunto de puntos $[0;1]$ tiene medida $|[0;1]| = 1 > 0$, y por tanto no puede ser numerable (def. 4 y teor. 2).

2. **Estructura de conjuntos y teoremas de cubrimiento.** — *a*) *Retículo progresivo de* $\mathbf{E}_m$. — Todos los intervalos $I[a_i, a_i + 1)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ de extremos enteros consecutivos forman un conjunto numerable, R_0, según § 2-11; y también lo es la familia de intervalos, I_1, deducidos por bisección, con extremos que son números consecutivos de la progresión $p \cdot \frac{1}{2}$, los cuales forman el retículo R_1 de amplitud $\frac{1}{2}$; y así se van formando retículos R_n de amplitudes 2^{-n}, cada uno subdivisión del anterior. En virtud de § 2-11, teor., la familia R de *todos* los intervalos I_r así formados, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, es numerable; la llamaremos *retículo progresivo* del espacio $\mathbf{E}_m$, tanto si se incluyen o se excluyen los extremos de cada I_r.

Nótese que al incluir en cada intervalo $[a_i, b_i)$ solamente el extremo inferior, todos los intervalos de cada retículo R_n son *disjuntos* y *suman* $\mathbf{E}_m$ en sentido estricto. [También diremos *suma* de intervalos cuando éstos tengan puntos comunes de contorno, si carecen de punto interior común, propiedad que hemos expresado diciendo: no son *rampantes*. (Cap. XVIII, nota I, *b*)].

Numerados los intervalos del retículo progresivo, R_0, R_1, R_2, ..., todo punto del espacio es interior a infinitos I_r, que son entornos suyos, excepto si el punto **x** tiene alguna coordenada de la red binaria (es decir, del tipo $p/2^r$) en cuyo caso adoptaremos como entorno de **x** la suma de los intervalos I_r de R_n contiguos a **x**.

NOTA 1. Consideremos las siguientes aplicaciones:

1º) Un espacio abstracto, que tiene un conjunto numerable *denso* en todo E (§ 64-4, nota 2), se llama *separable*; un espacio que tiene una familia numerable *universal* de entornos; es decir, tal que para cada punto x de E hay infinitos entornos de esa familia, que tienden a x, y caracterizan por tanto la acumulación, se llama *perfectamente separable*. En el espacio euclidiano E_m, el conjunto denso básico es el de los puntos de coordenadas racionales; la familia universal de entornos es el retículo progresivo, R; luego E_m *es perfectamente separable.*

2º) *Si los conjuntos* X *de* E_m *son no-rampantes, y cada uno tiene al menos un punto interior, forman familia finita o numerable.* Si es x^i un punto interior de X^i é I_i un intervalo del retículo progresivo, entorno de x^i, contenido en X^i, tales entornos son todos distintos, por ser distintos todos los puntos x^i; queda así establecida una coordinación entre el conjunto $\{x^i\}$ y parte de la familia numerable $R = \{I_r\}$; luego el conjunto $\{x^i\}$ y, por tanto, el $\{X^i\}$, son finitos o numerables.

Corolarios inmediatos:

1º *Los puntos aislados de un conjunto son en número finito, o forman conjunto numerable.*

2º *Los puntos de discontinuidad de una función monótona forman conjunto finito o numerable.*

b) *Estructura de los conjuntos abiertos y cerrados.* — Para el estudio de los conjuntos, y especialmente de su medida, que necesitamos para definir la integral de funciones muy discontinuas, es indispensable anteponer el de sus tipos más sencillos, que son los conjuntos abiertos y cerrados. Recordemos (§ 64-4, nota 2) su definición:

DEF. 1. Conjunto *cerrado* es el que contiene todos sus puntos de acumulación (§ 64-4, def. 4). Conjunto *abierto* es el formado por puntos interiores (§ 64-4, def. 5). Los designaremos casi siempre por las letras F, G; y por brevedad diremos a veces: *un cerrado* F, *un abierto* G, sustantivando los adjetivos.

Decir que F es *cerrado*, o sea que en el complemento CF (Cap. I, nota I), no hay ningún punto de acumulación de F, *equivale* a decir que todo punto de CF es *interior* a él, es decir, este complemento es un G y recíprocamente. Resulta así la propiedad fundamental: *El complemento de un* F *es un* G; *y el complemento de un* G *es un* F.

NOTAS: 2. *Correlación.* — Así se han introducido correlativamente en los espacios topológicos generales (Cap. XVIII, nota I, *b*). Como al sustituir cada conjunto X por el complementario CX se permutan las relaciones $\smile$ y $\frown$ (Cap. I, nota I) así como las propiedades G y F; de cada teorema sobre conjuntos G y F se deduce otro correlativo, efectuando en su enunciado esas permutaciones.

3. *Relativización.* — Lo esencial de E_n, utilizado al probar que el complemento de un F es un G, ha sido esto: todo punto de E_n tiene entornos en E_n, es decir, E_n es *abierto*; luego resulta en general:

El complemento de un F *en un* G *es un* G. Correlativamente: *El complemento de un* G *en un* F *es un* F.

Nótese que los conceptos F y G son correlativos cuando el espacio ambiente es a la vez G y F, es decir, es el espacio E_n; pero, en general, si el espacio ambiente es un G cualquiera, no se verificará la segunda propiedad, es decir, el complemento de un G podrá no ser G ni F. (Pónganse ejemplos de todos los casos).

No solamente para espacios euclídeos, sino en general para espacios topológicos cualesquiera (Cap. XVIII, nota I, *b*) se cumple:

TEOR. 1. *La unión y la intersección finitas de conjuntos* G *es un* G; *y la de conjuntos* F *es un* F.

TEOR. 2. *La unión infinita de conjuntos* G *es un* G; *la intersección infinita de conjuntos* F *es un* F.

Sin embargo, ya se vió (Cap. XVIII, nota I, *b*) que la intersección infinita de conjuntos G puede no ser un G, y que la unión infinita de conjuntos F puede no ser un F.

EJEMPLOS: 1. La *intersección* de todos los círculos *abiertos* del mismo centro y radios mayores que 1 de E_2 es el círculo *cerrado* de radio 1.

2. La *unión* de todos los intervalos *cerrados* $[a, b]$ de extremos enteros (familia numerable) es todo el espacio E_1, a la vez *abierto* y *cerrado*. Lo mismo para la familia (no numerable) de extremos reales.

Puesto que cada punto de un conjunto abierto G tiene un entorno contenido en G, la unión de estos entornos estará contenida en G y por contener todos los puntos de G contendrá a G, es decir, dicha unión coincidirá con G. En definitiva:

TEOR. 3. *Todo abierto* G *es la unión de entornos de sus puntos; en particular, en* $\mathbf{E}_n$ *es unión de intervalos* I.

Pero para la teoría de la medida lo que interesa es que dicha unión sea *numerable*. En el caso de conjunto lineal abierto G (contenido en $\mathbf{E}_1$) basta sustituir los intervalos rampantes del teor. 3 por su unión, que es también intervalo. Entonces, si $x_0 \varepsilon$G y es $b = \text{extr sup}\, x$, para $x > x_0$ tal que $(x_0, x)\,(\leqq)\,$G, también $(x_0, b)\,(\leqq)\,$G; y análogamente, si es $a = \text{extr inf}\, x$ para $x < x_0$ tal que $(x, x_0)\,(\leqq)\,$G, resulta $(a, b)\,(\leqq)\,$G, pero los extremos a, b no pertenecen a G. Por tanto, todo punto de G pertenece a uno, y sólo uno, de los intervalos abiertos (a, b) así formados; y como esta familia, según nota 1, 2º, es finita o numerable, resulta:

TEOR. 4. *Todo abierto de* $\mathbf{E}_1$ *es suma finita o numerable de intervalos abiertos disjuntos.*

Ha resultado de la demostración que todos los puntos x, tales que el segmento determinado con x_0 pertenece a G (condición de *conexión*, § 64-5), forman un intervalo, luego, según § 65-5, def. 1, resulta:

Los recintos de $\mathbf{E}_1$ *son los intervalos abiertos* (a, b).

Obsérvese que el teor. 4 no es válido para conjuntos abiertos no lineales: por ejemplo, para el interior de un círculo, pues todo rectángulo contenido en él tiene en sus lados puntos interiores al círculo que no pueden pertenecer a otro rectángulo abierto sin puntos comunes con el anterior.

Así para $\mathbf{E}_n (n \geqslant 2)$ se impone esta modificación:

TEOR. 5. *Todo abierto* G *de* $\mathbf{E}_n (n \geqslant 2)$ *es suma, finita o*

numerable, de intervalos cerrados no rampantes con posibles fronteras comunes. En efecto, en el retículo binario de E_n, de lados 2^{-r}, las mallas Q_r contenidas en G no son disjuntas todas, pero son *no rampantes*, pues solamente pueden tener común algún segmento si $n = 2$, algún rectángulo si $n = 3$, etc.; es decir, un conjunto de extensión n-dimensional nula. Veamos cómo se descompone G en suma de mallas del retículo.

Comencemos por numerar las mallas de lado 1, contenidas en G, número que es finito, si G es acotado, es decir, parte de un intervalo I; a continuación, las mallas de lado ½ contenidas en G, pero no en las mallas anteriores; luego las de lado ¼ contenidas en G, pero no en las ya numeradas, etc. Si para algún tamaño hay infinitas mallas con la doble condición explicada, tendremos una sucesión de sucesiones numerables o finitas, que reordenada según § 2-11, teor., es una sucesión. Como todas las mallas elegidas son no-rampantes y están en G; y, recíprocamente, todo punto de G tiene algún entorno que es una malla o suma de ellas, la suma de la sucesión así formada es precisamente el conjunto G.

De los teoremas 4 y 5 y de § 94-1, def. 4, deducimos que la medida boreliana de todo conjunto *abierto* de E_1 es la suma de las medidas de sus intervalos *disjuntos* componentes; medida boreliana de todo conjunto *abierto* de E_n es la suma de las medidas de los intervalos *no rampantes* que lo componen. Medida boreliana de todo conjunto *cerrado* F situado en el abierto G_0 de E_n es $|F| = |G_0| - |CF|$, donde CF es el complemento de F en G_0, y es abierto (nota 3). Como éste tiene medida *positiva*, resulta: *Si un conjunto cerrado está contenido en un abierto, tiene menor medida que éste.*

Del mismo modo, *si* $G_1 (<) G_2$ *es* $|G_1| < |G_2|$, pues G_2 contiene al menos un intervalo de medida positiva no perteneciente a G_1. En cambio, de las inclusiones $F_1 (<) F_2$, $G (<) F$, resultan relaciones $\leq$ entre las medidas (pónganse ejemplos de todos los casos).

TEOR. 6. *En* E_n *la medida boreliana de un abierto* G *coincide con su extensión interior* $\underline{e}(G)$; *la medida boreliana de un cerrado* F *coincide con su extensión exterior* $\bar{e}(F)$ (§ 94-1).

Pues cabe tomar en la serie de medidas de los intervalos componentes de G un número *finito* suficiente de términos para aproximar $|G|$ con error tan pequeño como se quiera, luego $|G| = \underline{e}(G)$. Correlativamente, tomando complementos resulta $|F| = \bar{e}(F)$.

Como caso particular: *para los conjuntos cerrados son equivalentes los conceptos extensión nula y medida nula* (§ 82-2).

c) Introducida la distancia $\rho(a, b)$ entre cada dos puntos de un espacio métrico (Cap. XVIII, nota I, *d*), la *distancia entre dos conjuntos* A y B de dicho espacio se define por

[94-5] $$\varrho(A, B) = \underset{a\varepsilon A,\ b\varepsilon B}{\text{extr inf}}\ \varrho(a, b) \quad ,$$

donde el segundo miembro representa el extremo inferior (§ 23-14) de las distancias de cada punto $a\varepsilon A$ a cada punto $b\varepsilon B$. En particular, si A consta de un solo punto a, tal que $A = \{a\}$, se obtiene por [94-5] lo que se llama *distancia del punto a al conjunto* B, que designaremos por $\varrho(a, B)$.

EJEMPLO 3. Dos intervalos abiertos disjuntos de E_1 con un extremo común, tales (a, b), (b, c), tienen distancia nula.

Se llama *diámetro* $d(B)$ de un conjunto B al extremo superior (§ 23-14) de las distancias de cada par de puntos b_1 y b_2 de B:

[94-6] $$d(B) = \underset{b_1,\ b_2\ \varepsilon B}{\text{extr sup}}\ \varrho(b_1, b_2).$$

Entonces se cumple, para tres conjuntos cualesquiera X, Y, Z, la *propiedad triangular*:

[94-7] $$\varrho(X, Z) \leqslant \varrho(X, Y) + \varrho(Y, Z) + d(Y).$$

En efecto, para puntos cualesquiera $x\varepsilon X$, $y_1, y_2\varepsilon Y$, $z\varepsilon Z$, se tiene (Cap. XVIII, nota I, *d*: propiedad triangular):

$$\varrho(x, z) \leqslant \varrho(x, y_1) + \varrho(y_1, y_2) + \varrho(y_2, z).$$

Por [94-5] y [94-6] es

$$\varrho(X, Z) \leqslant \varrho(x, z) \quad , \quad \varrho(y_1, y_2) \leqslant d(Y).$$

Por otra parte, dado $\varepsilon > o$ arbitrario, existen $x\varepsilon X$, $y_1, y_2\varepsilon Y$, $z\varepsilon Z$ tales que

$$\varrho(x, y_1) < \varrho(X, Y) + \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad , \quad \varrho(y_2, Z) < \varrho(Y, Z) + \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

De estas dos y las anteriores se deduce

$$\varrho(X, Z) < \varrho(X, Y) + \varrho(Y, Z) + d(Y) + \varepsilon \quad ,$$

que por ser $\varepsilon(\rightarrow 0)$ arbitrario, justifica [94-7].

d) *Teoremas de cubrimiento.* — En el Cap. XVIII, nota II, definimos el conjunto *compacto* X de un espacio topológico cualquiera cuando todo cubrimiento abierto de X contiene un subcubrimiento finito. En particular el teorema de BOREL dice:

TEOR. 7. *Todo conjunto cerrado y acotado del espacio euclídeo* E_n *es compacto* (cfr. Cap. VI, nota III). Más generalmente demostraremos ahora:

TEOR. 8. (LINDELÖF-HAUSDORFF): *Todo cubrimiento abierto de cualquier conjunto* X *de un espacio euclídeo* E_n *contiene un subcubrimiento numerable.*

Pues la unión de todos los abiertos del cubrimiento dado es un abierto (teor. 2) que puede descomponerse en una infinidad *numerable* de intervalos (teor. 5), cada uno de los cuales por conveniente subdivisión podrá estar contenido en algún abierto de dicho cubrimiento; en otro caso, por dicotomía determinaríamos un punto de un abierto que no podría ser interior a éste. Entonces, basta *elegir* (cfr. § 94-7) alguno de los abiertos del cubrimiento dado que contienen cada uno de los intervalos de la infi-

nidad numerable para obtener el subcubrimiento numerable buscado.

Del teor. 8 deducimos:

TEOR. 9. (CANTOR-BENDIXSON): *Todo conjunto cerrado* F *no numerable de un espacio euclídeo* E_n *es la suma de un conjunto perfecto* P *y de un conjunto* N *a lo sumo numerable* (infinito, finito o vacío).

Se dice que x es un *punto de condensación* de un conjunto no-numerable X si cada entorno de x contiene un conjunto no-numerable de puntos de X. Todo conjunto no-numerable X contiene, perteneciente a él, algún punto de condensación de X. Pues si cada punto de X pudiese cubrirse por un entorno que sólo tuviese una infinidad numerable de puntos de X, todo X quedaría cubierto por una infinidad numerable de dichos entornos (teor. 8) y X sería numerable (§ 2-11, teor.).

Dado el conjunto cerrado F no-numerable, sea P el conjunto de sus puntos de condensación, donde $P(\leqq)F$ por ser éste cerrado.

Por lo dicho anteriormente $F - P = N$ ha de ser a lo sumo numerable. Basta ver que P es perfecto. P es cerrado, pues un punto de acumulación de puntos de condensación es punto de condensación. Además, todo punto $x \varepsilon P$ es de acumulación de P, porque todo entorno de x contiene un conjunto no-numerable de puntos de F que al suprimirle x continúa siendo no-numerable y contiene por tanto algún punto de condensación de F, distinto del x y en su entorno.

3. **Medidas exteriores de Carathéodory.** — *a*) Toda función numérica uniforme de conjunto $\mu(X) \geqslant 0$, definida para todo conjunto X de un espacio métrico **E** se llama una *medida exterior métrica de* CARATHÉODORY si cumple las condiciones:

M_1) $\mu(0) = 0$ (*la medida del conjunto vacío es cero*);

M_2) $X_1(\leqq)X_2$ *implica* $\mu(X_1) \leqslant \mu(X_2)$;

M_3) $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k)$ *respecto de cualquier sucesión finita o infinita numerable de conjuntos* X_k;

M_4) *Si es positiva la distancia* $\varrho(X, Y) > 0$, *entonces es* $\mu(X+Y) = \mu(X) + \mu(Y)$.

NOTAS: 1. Si se prescinde del axioma M_4, queda caracterizada por los tres primeros axiomas M_1, M_2, M_3 una *medida exterior* para los espacios topológicos en general (Cap. XVIII, nota I, *b*) que puede estar definida sólo para una familia infinitamente aditiva de dicho espacio (94-1, nota 3).

2. La extensión exterior $\bar{e}(X)$ dada en [94-3] no es una medida exterior por no cumplir el axioma M_3. Por ejemplo, el conjunto de puntos racionales de [0; 1] tiene extensión exterior 1, mayor que la suma de las extensiones exteriores de cada uno de sus puntos en conjunto numerable.

b) Dado un conjunto X cualquiera de un espacio euclídeo $\mathbf{E}_n$, todo cubrimiento de X mediante intervalos puede reducirse a un subcubrimiento numerable (§ 94-2, teor. 8) y la suma de las medidas elementales (§ 94-1) de estos intervalos en conjunto numerable es la suma de una serie incondicionalmente convergente o divergente de términos positivos. Al extremo in-

ferior (§ 23-14) de las sumas de todos los cubrimientos numerables de X por intervalos, designada por

[94-8] $$m_e(X) = \underset{X(\leq)\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k}{\text{extr inf}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \right\} ,$$

se le llama *medida exterior* (L) o *de* LEBESGUE del conjunto X.

Se la designa también por $|X|$, dado que la medida exterior (L) de un intervalo I coincide con su medida elemental $|I|$. Más generalmente:

TEOR. 1. *Para todo conjunto* X *que contenga un intervalo* I *y esté contenido en su clausura* $\bar{I}$, *se cumple* $m_e(X) = |I|$.

En efecto, sea primeramente $X = \bar{I}$. Dado un cubrimiento

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \,(\geqq)\, I$$

por el lema de BOREL (§ 94-2, teor. 7) existe un subcubrimiento finito

$$\bigcup_{k=1}^{n} I_k \,(\geqq)\, I$$

que por las leyes de monotonía de las sumas *finitas* de números reales (§ 7-5) cumple

$$|I| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |I_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \quad ,$$

de donde $|I| \leqslant m_e(\bar{I})$. Además es siempre posible tomar un intervalo abierto J que *cubra* $\bar{I}$ y tal que para todo $\varepsilon > 0$ sea $|J| < |I| + \varepsilon$. Entonces $m_e(\bar{I}) \leqslant |J| < |I| + \varepsilon$, que por la arbitrariedad de $\varepsilon (\to 0)$ da $m_e(\bar{I}) \leqslant |I|$, la que con la anterior desigualdad contraria demuestra $m_e(\bar{I}) = |I|$.

Para todo otro conjunto X tal que $I (\leqq) X (\leqq) \bar{I}$, cualquier cubrimiento de $\bar{I}$ lo es también de X y por tanto $m_e(X) \leqslant m_e(\bar{I}) = |I|$. Además es siempre posible tomar un intervalo cerrado $\bar{J}_1 (\leqq) I (\leqq) X$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ sea $|\bar{J}_1| > |I| - \varepsilon$. Entonces $m_e(X) \geqslant m_e(\bar{J}_1) > |I| - \varepsilon$, que por la arbitrariedad de $\varepsilon (\to 0)$ da $m_e(X) \geqslant |I|$, la que con la anterior desigualdad demuestra en definitiva $m_e(X) = |I|$.

TEOR. 2. *Para todo conjunto* X *de un espacio euclídeo* $\mathbf{E}_n$ *su medida exterior* (L) *dada por* [94-8] *es una medida exterior métrica de* CARATHÉODORY.

Bastará demostrar que cumple los axiomas M_1, M_2, M_3, M_4. Los dos primeros son inmediatos.

Demostremos M_3: Si

$$\sum_{k=1}^{\infty} |X_k| = +\infty$$

(en particular si alguna $|X_k| = +\infty$), la propiedad es evidente. En otro caso, para $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un cubrimiento para X_k tal que

$$\Sigma_m |I_{k,m}| < |X_k| + \varepsilon/2^k \quad ,$$

de donde, al ser la unión de todos los $I_{k,m}$ un cubrimiento de

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k \quad ,$$

será

$$\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\right| \leqslant \Sigma_k \Sigma_m |I_{k,m}| < \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| + \varepsilon \quad ,$$

y por la arbitrariedad de $\varepsilon (\to 0)$, resulta M_3.

Demostremos finalmente M_4: Por la propiedad anterior es $|X + Y| \leqslant |X| + |Y|$. Si $|X|$ ó $|Y|$ son infinitas, por M_2 será $|X + Y| = |X| + |Y| = +\infty$. Sean, pues, $|X|$, $|Y|$ finitas: entonces, para todo $\varepsilon > 0$, si es $\varrho_0 = \varrho(X, Y) > 0$, existirá un cubrimiento numerable por intervalos I_k de $X + Y$ tal que $d(I_k) < \varrho_0$ con $\Sigma_k |I_k| < |X + Y| + \varepsilon$. Cada intervalo I_k no puede contener a la vez puntos de X y de Y, por lo que aquel cubrimiento $\{I_k\}$ comprende la unión disjunta de un cubrimiento de X y otro de Y. Por tanto es $|X| + |Y| \leqslant \Sigma_k |I_k| < |X + Y| + \varepsilon$, de donde por la arbitrariedad de $\varepsilon(\to 0)$ resulta $|X| + |Y| \leqslant |X + Y|$, que con la anterior desigualdad contraria da en definitiva M_4.

TEOR. 3. *Para todo conjunto* X *de un espacio euclídeo* E_n, *su medida exterior* (L) *es el extremo inferior de las medidas exteriores de todos los abiertos* G *que contienen* X, *es decir*

[94-9] $$|X| = \operatorname*{extr\,inf}_{G(\geqq)X} |G| .$$

Esta [94-9] equivale a poner que para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto $G_0 (\geqq) X$ tal que $|G_0| \leqslant |X| + \varepsilon$, donde puede ponerse $<$ en lugar de $\leqslant$, si y sólo si $|X|$ es finito.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, por [94-8] puede hallarse un cubrimiento numerable de intervalos I_k tal que $\Sigma_k |I_k| \leqslant |X| + \varepsilon$ ($<$ si $|X|$ es finito) y basta tomar $G_0 = \mathrm{U} I_k$ (§ 94-2, teor. 2).

4. **Conjuntos medibles.** — La condición M_4 no asegura la aditividad finita en todos los casos. Respecto de cada medida exterior $\mu(X)$ (aún no métrica, § 94-3, nota 1) es fundamental considerar la familia de conjuntos medibles (μ) introducida por CARATHÉODORY así:

DEF. 1. *Un conjunto* X *se llama medible* (μ), *en símbolo* $X \varepsilon (\mu)$, *cuando cualquiera sea el conjunto auxiliar* W *se cumple:*

[94-10] $$\mu(W) = \mu(W \cdot X) + \mu(W - X).$$

En particular, el conjunto X se llama *medible* (L) o *medible* LEBESGUE, en símbolo $X \varepsilon (L)$, si [94-10] se cumple para la medida exterior (L) dada por [94-8] en E_n.

NOTAS: 1. Aun cuando un conjunto es medible respecto de una *determinada* medida exterior, llamaremos en E_n simplemente "medibles" a los medibles (L).

2. Cuando un conjunto X es medible, su medida exterior se llama simplemente *medida* de X y se designa por $m(X) = |X| = m_e(X)$.

Para otra cualquiera medida exterior (μ), la respectiva familia de conjuntos medibles da lugar entre otras a la llamada *medida* general de LEBESGUE-STIELTJES $\mu(X)$. (Cfr. nota I).

EJEMPLO 1. Para un espacio cualquiera E de más de dos puntos, si se define $\mu(\{0\}) = 0$, $\mu(E) = 2$, $\mu(X) = 1$ para los conjuntos X tales que $0 (<) X (<) E$, entonces se obtiene una medida exterior respecto de la que sólo son medibles el conjunto vacío y el total. En cambio, si para todo X es $\mu(X) = 0$, todo conjunto es medible. (Cfr. teor. 3).

Definición equivalente a la [94-10] se obtiene mediante

TEOR. 1. *Es* $X \varepsilon (\mu)$ *cuando y sólo cuando para cada par de conjuntos* A *y* B *tales que* $A (\leqq) X$ *y* $B (\leqq) E - X$ *se cumple*

[94-11] $$\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Pues de [94-10], tomando $W = A + B$ se deduce [94-11]. Recíprocamente, de [94-11], tomando $A = W . X$ y $B = W . (E - X)$ se deduce [94-10].

La simetría de la condición [94-11] tiene como corolario inmediato

TEOR. 2. *Si un conjunto es medible* (μ), *también lo es su complemento.*

En virtud de la condición M_3, se cumple [94-10], cuando y sólo cuando es

[94-12] $$\mu(W) \geqslant \mu(W . X) + \mu(W - X) \quad ,$$

la que es obvio basta verificar para $\mu(W)$ finita.

Análogamente, en [94-11] puede sustituirse $=$ por $\geqslant$.

TEOR. 3. *Todo conjunto de medida exterior* (μ) *nula es medible,* es decir, $\mu(X) = 0$ implica $X \varepsilon (\mu)$.

Pues en virtud de M_2 es $\mu(W . X) \leqslant \mu(X) = 0$, verificándose [94-12] por la misma condición M_2: $\mu(W) \geqslant \mu(W - X)$.

COROL. *El conjunto vacío* (§ 94-3, M_1) *y el total* (teor. 2) *son siempre medibles.*

La definición 1 (CARATHÉODORY) tiene la ventaja de aplicarse a conjuntos no acotados en un espacio abstracto cualquiera. Primitivamente LEBESGUE para un *conjunto* $X (\leqq) I$ de un *espacio euclídeo* E_n creó una teoría paralela a la de PEANO-JORDAN (§ 94-1) definiendo la medida exterior $m_e(X) = |X|$ por la misma [94-8] y la *medida interior* $m_i(X)$ mediante

[94-13] $$m_i(X) = |I| - |I - X|.$$

Entonces, la *definición de* LEBESGUE de conjunto medible dice: *Es* $X \varepsilon (L)$ *cuando y sólo cuando se cumple* $m_e(X) = m_i(X)$, *es decir*

[94-14] $$|I| = |X| + |I - X|.$$

La condición [94-14] exige aparentemente menos que la [94-11] por ser caso particular de ésta, probándose así su necesidad. En § 94-6, notas 1 y 5, veremos que [94-14] es también suficiente para que se cumpla [94-11] o su equivalente [94-10].

NOTA 3. Mediante la medida boreliana de conjuntos (§ 94-1, def. 4) aplicada previamente a los abiertos y cerrados (§ 94-2), se llega a una definición equivalente a la de LEBESGUE. Para ello se introduce $m_e(X) = |X|$ mediante [94-9], pero entendiendo la medida $|G|$ en el sentido boreliano (§ 94-1, def. 4). Correlativamente se define la medida interior $m_i(X)$ mediante el extremo superior de las medidas borelianas de todos los cerrados F contenidos en X, es decir

[94-15] $$m_i(X) = \operatorname{extr\,sup}_{F(\leqq)X} |F| \quad ,$$

para el caso de X *acotado*. Entonces [94-15] resulta de [94-9] y [94-13], pues

$$m_i(X) = |I| - |I - X| = |I| - \operatorname{extr\,inf}_{G_1(\geqq)I-X} |G_1| =$$

$$= \operatorname{extr\,sup}_{G_1(\geqq)I-X} (|I| - |G_1|) = \operatorname{extr\,sup}_{I-G_1(\leqq)X} |I - G_1| = \operatorname{extr\,sup}_{F(\leqq)X} |F| \quad ,$$

donde para $I - G_1 = F(\leqq)X$ es $|F| = |I| - |G_1|$ (§ 94-2, *b*).

La definición [94-15] no puede aplicarse a conjuntos de medida infinita por dar lugar a incongruencias, tal la de que podría restarse de un conjunto medible otro también medible, sin que la diferencia lo fuere.

Válida para conjuntos no acotados es la definición de VALLÉE-POUSSIN de carácter *constructivo* (cfr. § 94-6, teor. 8):

Es $X\varepsilon(L)$ *cuando y sólo cuando para cada* $\varepsilon > 0$ *se pueden construir efectivamente un conjunto continente abierto* G *y un conjunto contenido cerrado* F, *tales que cumplan*

[94-16] $$F(\leqq)X(\leqq)G \quad \textit{con} \quad |G - F| < \varepsilon .$$

Evidentemente, para conjuntos acotados y por tanto de medida finita, donde (§ 94-5) es $|G - F| = |G| - |F|$, la [94-16] equivale a que en [94-9] y [94-15] $m_e(X) = m_i(X)$.

También veremos (§ 94-6, teor. 6) que la definición [94-16] equivale a decir:

Es $X\varepsilon(L)$ *cuando y sólo cuando para cada número* $\varepsilon > o$ *existe un conjunto abierto continente* $G(\geqq)X$ *tal que*

[94-17] $$|G - X| < \varepsilon .$$

Por [94-9] sabemos que para *cualquier* conjunto X de medida exterior *finita*, existe un conjunto abierto $G_0(\geqq)X$ tal que

[94-18] $$|G_0| - |X| < \varepsilon \quad ,$$

por lo que [94-17] *es más restrictivo* que [94-18] al probarse (§ 94-7) que "existen" conjuntos no medibles (L).

5. Operaciones borelianas con conjuntos medibles. — La importancia de los conjuntos medibles (§ 94-4, def. 1) radica en la aditividad de su medida y en que forman una familia infinitamente aditiva (§ 94-1, nota 3), aún tratándose de una medida no métrica (§ 94-3, nota 1).

TEOR. 1. *Si* A *es medible y* B *es de medida exterior finita, para cualquier conjunto* V, *se cumple*

[94-19] $\mu(A_V \smile B_V) = \mu(A_V) + \mu(B_V) - \mu(A_V . B_V)$.

designando $A_V = A . V$, $B_V = B . V$.

En efecto, por ser A medible, para W cualquiera, según [94-10] es

$$\mu(W) = \mu(W . A) + \mu(W - A) \quad ,$$

de donde, tomando primero $W = A_V \smile B_V$ y luego $W = B_V$, se obtiene:

$$\mu(A_V \smile B_V) = \mu(A_V) + \mu(B_V - A_V) \quad ,$$

$$\mu(B_V) = \mu(A_V . B_V) + \mu(B_V - A_V) \quad ,$$

y restando, resulta [94-19]. Para $V = E$ se obtiene:

[94-19′] $\mu(A \smile B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A . B)$.

COROLARIO. *Si* A *es medible y* B *es un conjunto disjunto al* A *para cualquier conjunto* V, *se cumple*

[94-19″] $\mu(A_V \smile B_V = \mu(A_V) + \mu(B_V)$,

designando

$$A_V = A . V \quad , \quad B_V = B . V \quad .$$

Pues si $\mu(B_V) = +\infty$, la [94-19″] es evidente.

TEOR. 2. *Si* A_k *es una sucesión de conjuntos medibles, disjuntos dos a dos, para cualquier conjunto* V *se cumple*:

[94-20] $$\mu(V . \sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V . A_i).$$

En efecto, $\sum_{i=1}^{k-1} A_i$ es disjunto con A_k medible, por lo que (corolario al teor. 1) es

$$\mu(V . \sum_{i=1}^{k} A_i) = \mu(V . \sum_{i=1}^{k-1} A_i) + \mu(V . A_k)$$

de donde, por inducción completa (§ 2-2), para todo k finito es

$$\mu(V . \sum_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(V . A_i).$$

Por ser

$$V . \sum_{i=1}^{\infty} A_i (\geqq) V . \sum_{i=1}^{k} A_i \quad ,$$

por la condición M_3 de § 94-3 es

$$\mu(V . \sum_{i=1}^{\infty} A_i) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \mu(V . A_i)$$

para todo k finito, de donde (§ 22-2, a)

$$\mu(V . \sum_{i=1}^{\infty} A_i) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V . A_i) \quad ,$$

que con la desigualdad contraria obtenida de la condición M_3 de § 94-3, demuestra [94-20]. Para $V = E$ se obtiene:

[94-20′] $$\mu(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

NOTA 1. Obsérvese que las demostraciones de los teoremas 1 y 2 son válidas para una medida exterior de un espacio topológico general (§ 94-3, nota 1). Por otra parte, el teorema 2 asegura la aditividad infinita de la medida en los conjuntos medibles, pero aun no demuestra que éstas forman una familia infinitamente aditiva (§ 94-1, nota 3), pues aun no sabemos si será medible la unión de infinitos A_i.

TEOR. 3. *La intersección de dos conjuntos medibles es medible. También lo es la unión de dos conjuntos medibles.*

DEM.: *a*) Dados dos conjuntos medibles A, B y su intersección $D = A . B$, cualesquiera que sean X é Y, por [94-10] se cumple

$$\mu(X) = \mu(X . A) + \mu(X - A),$$
$$\mu(Y) = \mu(Y . B) + \mu(Y - B).$$

Para W conjunto cualquiera, tomando en la primera de las anteriores $X = W - D$ y en la segunda $Y = W . A$, se obtiene:

$$\mu(W - D) = \mu(W . A - D) + \mu(W - A),$$
$$\mu(W . A) = \mu(W . D) + \mu(W . A - D).$$

Eliminando entre éstas dos $\mu(W . A - D)$ y teniendo en cuenta que A es medible (§ 94-4, def.) resulta

$$\mu(W . D) + \mu(W - D) = \mu(W . A) + \mu(W - A) = \mu(W),$$

que expresa que es D medible.

Por inducción (§ 2-2), resulta medible la intersección de un número finito cualquiera de conjuntos medibles.

b) Si A y B son medibles, también lo son sus complementos $E - A$ y $E - B$ y por tanto su intersección $(E - A).(E - B) = E - (A \smile B) \varepsilon (\mu)$, es decir, $A \smile B$ es medible, como queríamos demostrar. Por inducción completa resulta medible la unión de un número finito cualquiera de conjuntos medibles.

TEOR. 4. *La unión (y también la intersección) de una infinidad numerable de conjuntos medibles es medible.*

a) Vamos a probar que si $A_i \varepsilon (\mu)$, $(i = 1, 2, \ldots)$, entonces es $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \varepsilon (\mu)$. En efecto, por el teor. 3 es $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \varepsilon (\mu)$, pudiendo suponerse, por descomposición finita, que los A_i son disjuntos. Entonces, en virtud de [94-20] y aplicando [94-10] para cualquier conjunto W es:

$$\mu(W) = \mu(W \cdot \sum_{i=1}^{k} A_i) + \mu(W - \sum_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(W \cdot A_i) + \mu(W - \sum_{i=1}^{k} A_i)$$

Como $W - \sum_{i=1}^{k} A_i (\geqq) W - \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, si aplicamos la condición M_2 de § 94-3, se obtiene:

$$\mu(W) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \mu(W \cdot A_i) + \mu(W - \sum_{i=1}^{\infty} A_i) \quad .$$

Si en ésta hacemos tender $k \to \infty$, y volvemos a aplicar [94-20] se obtiene:

[94-21] $$\mu(W) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(W \cdot A_i) + \mu(W - \sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(W \cdot \sum_{i=1}^{\infty} A_i) + \mu(W - \sum_{i=1}^{\infty} A_i) \quad ,$$

que en virtud de [94-12] prueba que es $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \varepsilon(\mu)$, como queríamos demostrar.

b) Si A_i son medibles, también lo son $E - A_i$ (§ 94-4, teor. 2) y por tanto su unión $\bigcup_{i=1}^{\infty} (E - A_i) = E - \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, de donde $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ es medible, como queríamos demostrar.

NOTAS: 2. De este teorema y de § 94-4, teoremas 2 y 3, se deduce que los conjuntos medibles forman una familia infinitamente aditiva (§ 94-1, nota 3). La demostración es válida para una medida exterior de un espacio topológico general (§ 94-3, nota 1).

3. Los conjuntos con extensión (§ 94-1, def. 2) no forman una familia infinitamente aditiva, pues cada uno de los puntos racionales tiene extensión (nula) y su unión (que es numerable, § 2-7, ejemplo 4) no tiene extensión (§ 94-1, ejemplo 1).

Así mismo, la intersección de una infinidad numerable de conjuntos con extensión, puede no tener extensión. Así ocurre, si del intervalo $[0; 1]$ extraemos sucesivamente cada uno de los números racionales, obteniendo una sucesión de conjuntos de extensión 1, cuya intersección es el conjunto de números irracionales, sin extensión (cfr. § 94-3, ejemplo 1).

TEOR. 5. *Respecto de una medida exterior métrica* [que cumpla la condición M_4 de § 94-3], *todo conjunto abierto es medible.*

DEM.: Basta suponer que el conjunto abierto G es distinto del vacío y del total (§ 94-4, Corol.). Sea $F = E - G$ no vacío, el conjunto cerrado complemento del G. Éste es la unión de la sucesión monótona de conjuntos *abiertos* encajados

[94-22] $$G_q = \{x \text{ tales que } \varrho(x, F) > 1/q\} (\leqq) G_{q+1} (\leqq) G = \bigcup_{q=1}^{\infty} G_q \quad ,$$

pues por ser F cerrado, si un punto x verifica $\rho(x, F) > 1/q$ (§ 94-2, *c*), existe un entorno de x cuyos puntos tienen la misma propiedad (§ 64-4, def. 5). Además, como G es abierto, cada uno de sus puntos está a una distancia positiva η de su complemento F y para $q < 1/\eta$ dicho punto está en G_q.

Sea W un conjunto arbitrario, que podemos suponer de medida exterior finita (§ 94-4). Como $W . G_q (\leqq) G_q$ y $W - G (\leqq) E - G = F$, será $\rho(W - G, W . G_q) \geqslant \rho(F, G_q) \geqslant 1/q > 0$, de donde, por las condiciones M_2 y M_4 de § 94-3, resulta:

$$\mu(W) \geqslant \mu[(W - G) + W . G_q] = \mu(W - G) + \mu(W . G_q).$$

Para demostrar que G es medible, por [94-12] bastará probar que

$$\lim_{q \to \infty} \mu(W . G_q) = \mu(W . G).$$

El primer miembro existe, pues, del encaje [94-22], tomando su intersección con W resulta, desde p número natural cualquiera en adelante:

$$[94\text{-}23] \quad \begin{cases} W . G_p (\leqq) W . G_{p+1} (\leqq) \ldots (\leqq) W . G_{p+k} (\leqq) \ldots (\leqq) W . G \quad ; \\ W . G = \bigcup_{q=1}^{\infty} (W . G_q) = W . G_p + \sum_{k=1}^{\infty} (W . G_{p+k} - W . G_{p+k-1}) \quad ; \end{cases}$$

donde los conjuntos sumandos del último miembro son disjuntos, pero a sus pares consecutivos no se les puede aplicar la propiedad aditiva (M_4) de § 94-3 por no estar a distancia positiva.

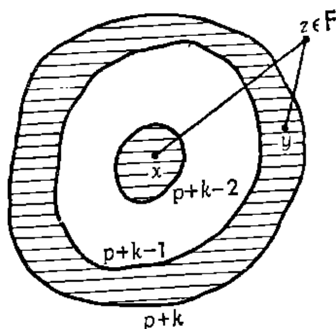


Fig. 321.

Por la definición [94-22] para todo punto $x \varepsilon W . G_{p+k-2}$ y todo punto

$$y \varepsilon W . G_{p+k} - W . G_{p+k-1},$$

se cumple

$$\rho(x, F) > 1/(p + k - 2) \quad ;$$
$$\rho(y, F) \leqslant 1/(p + k - 1).$$

Fijado el punto y y un número $\varepsilon > 0$ cualquiera, por definición de $\rho(y, F)$ (§ 94-2, *c*), existe siempre un punto $z \varepsilon F$ tal que

$$\rho(y, z) < \varepsilon + 1/(p + k - 1).$$

Entonces, al ser también $\rho(x, z) > 1/(p + k - 2)$, por aplicación de la propiedad triangular (Cap. XVIII, nota I, *d*) será (fig. 321):

$$\rho(x, y) \geqslant \rho(x, z) - \rho(y, z) > \frac{1}{(p + k - 1)(p + k - 2)} - \varepsilon \quad ,$$

que siendo válida para todo $\varepsilon (\to 0)$, por [94-5] prueba que es positiva la distancia

$$\rho(W . G_{p+k-2}, W . G_{p+k} - W . G_{p+k-1}) \geqslant \frac{1}{(p + k - 1)(p + k - 2)} > 0.$$

Esto permite aplicar la propiedad M_4 de § 94-3 a:

$$\mu[W . G_{p+k-2} + (W . G_{p+k} - W . G_{p+k-1})] =$$
$$= \mu(W . G_{p+k-2}) + \mu(W . G_{p+k} - W . G_{p+k-1}) \quad ,$$

y como

$$W . G_{p+k} (\geqq) W . G_{p+k-2} + (W . G_{p+k} - W . G_{p+k-1})$$

([94-23] y fig. 321), de la anterior, y la condición M_2 de § 94-3 resulta:

$$\mu(W . G_{p+k}) - \mu(W . G_{p+k-2}) \geqslant \mu(W . G_{p+k} - W . G_{p+k-1}).$$

Teniendo en cuenta esta desigualdad y la aplicación de la condición M_3 de § 94-3 a [94-23] se obtiene:

$$\mu(W . G) \leqslant \mu(W . G_p) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(W . G_{p+k} - W . G_{p+k-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \mu(W . G_p) + \sum_{k=1}^{\infty} [\mu(W . G_{p+k}) - \mu(W . G_{p+k-2})] =$$

$$= - \mu(W . G_{p-1}) + 2 \lim_{q \to \infty} \mu(W . G_q).$$

Como ésto es válido para cualquier p número natural, haciendo $p \to \infty$ queda

$$\mu(W . G) \leqslant \lim_{q \to \infty} \mu(W . G_q).$$

Ésta y la desigualdad de sentido contrario obtenida por aplicación de la condición M_2 de § 94-3 a la sucesión monótona [94-23], prueban la igualdad que queríamos obtener para demostrar que G es medible.

Este teorema 5, con los 3, 4 y el teorema 2 de § 94-4, prueban que la familia **B** infinitamente aditiva de conjuntos (B) o de BOREL del espacio *métrico* **E** (§ 94-1, nota 3) está siempre contenida en la familia de conjuntos medibles con respecto a cualquiera medida exterior *métrica* μ, la que por el teorema 2 es infinitamente aditiva en dicha familia. En particular, para la medida exterior (L) dada en [94-8], esto y el teorema 1 de § 94-3, prueban que la medida boreliana de un abierto y un cerrado, o de otro conjunto cualquiera dada por la definición 4 de § 94-1, coincide con la [94-8] de los espacios euclídeos $\mathbf{E}_n$.

NOTA 4. La generalidad de la teoría de CARATHÉODORY aplicable a espacios métricos cualesquiera hace necesarias las penosas demostraciones de los teoremas 3 y 5.

Su profundidad queda evidenciada al observar que existen conjuntos abiertos sin extensión. Tal es el obtenido así en la recta real: Si del segmento [0, 1] extraemos el intervalo I_1 abierto central de longitud $\frac{1}{4}$, de los 2 segmentos restantes los respectivos intervalos abiertos I_2, I_3 centrales de longitud $1/4^2$, de los 2^2 segmentos restantes los respectivos intervalos abiertos I_4, I_5, I_6, I_7 centrales de longitud $1/4^3$ y así sucesivamente, el conjunto abierto extraído $G = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \ldots$ no tiene extensión, pues por ser denso en [0, 1] es $\bar{e}(G) = 1$ y por suma de sus componentes es

$$\underline{e}(G) = \frac{1}{4} + 2 . \frac{1}{4^2} + 2^2 . \frac{1}{4^3} + 2^3 . \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{1}{2} < 1 = \bar{e}(G).$$

El complemento a [0, 1] es ejemplo de conjunto perfecto (§ 64-4, nota 2) sin extensión.

6. **Medida exterior regular.** — Una medida exterior de CARATHÉODORY (§ 94-3, nota 1) se llama *regular* si $\mu(X)$ *es el extremo inferior* (§ 23-14) *de las medidas de todos los conjuntos medibles* (§ 94-4, def. 1) *que contienen* X, es decir

[94-24] $$\mu(X) = \operatorname*{extr\,inf}_{X \subset A \in (\mu)} \mu(A).$$

TEOR. 1 *La medida exterior* (L) *dada por* [94-8] *es regular,* es decir,

[94-25] $$|X| = \underset{X(\leqq)A\epsilon(L)}{\text{extr inf}} |A|.$$

Pues llamando η al segundo miembro de [94-25], si $X(\leqq)A$, será $|X| \leqslant |A|$, de donde (§ 23-14) resulta $|X| \leqslant \eta$. Por otra parte, si $\{I_k\}$ es un cubrimiento por intervalos de X y es A su unión, será

$$\eta \leqslant |A| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \quad ,$$

y aplicando [94-8] resulta $\eta \leqslant |X|$. Ambas desigualdades de sentido contrario demuestran [94-25].

Obsérvese que [94-25] generaliza [94-9].

Para una medida exterior *regular* se define la *medida interior* $\mu_i(X)$ como *el extremo superior de las medidas de todos los conjuntos medibles contenidos en* X, *es decir,*

[94-26] $$\mu_i(X) = \underset{X(\geqq)B\epsilon(\mu)}{\text{extr sup}} \mu(B).$$

TEOR. 2. *Si una medida exterior de* CARATHÉODORY *es regular, se cumple:*

a) $\mu_i(X) \leqslant \mu(X)$;

b) *Existe un conjunto medible* S *conteniendo* X *tal que* $\mu(S) = \mu(X)$; *llamaremos a* S *cápsula isométrica de* X; *en particular, para la medida exterior* (L) *puede tomarse como cápsula isométrica un conjunto seudoabierto* G_δ , *intersección numerable de abiertos* (§ 94-1);

c) *Existe un conjunto medible* N *contenido en* X *tal que* $\mu(N) = \mu_i(X)$; *llamaremos a* N *núcleo isométrico de* X;

d) *Si es finita la medida exterior* $\mu(X)$ *y es* S *su cápsula isométrica, entonces es*

[94-27] $$\mu_i(X) = \mu(S) - \mu(S - X).$$

DEM. *a*) Corolario inmediato de las definiciones [94-24] y [94-26].

b) Si es $\mu(X) = +\infty$, se toma $S = E$. Si es $\mu(X)$ finita, por ser regular, para todo número natural k existe un conjunto medible A_k conteniendo X, tal que $\mu(A_k) \leqslant \mu(X) + 1/k$, y basta tomar como cápsula la intersección (§ 94-5, teor. 3) de todos los A_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Por [94-9], en el caso de medida exterior (L), puede tomarse para cada A_k un conjunto abierto G_k y así su intersección da como cápsula un seudoabierto G_δ .

c) Si $\mu_i(X) = 0$, puede tomarse como núcleo el conjunto vacío (§ 94-4, corol.). Si $\mu_i(X) > 0$, para todo número natural k, por [94-26] existe un conjunto medible B_k contenido en X, tal que $\mu(B_k) \geqslant \mu_i(X) - 1/k$, y basta tomar como núcleo la unión (§ 94-5, teor. 4) de los B_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

d) Si B es medible contenido en X, también $S - B$ es medible, pues $S - B = (E - B) . S$ (§ 94-4, teor. 2; § 94-5, teor. 3), de donde (§ 94-3, M_2, y § 94-5) es

$$\mu(S - X) \leqslant \mu(S - B) = \mu(S) - \mu(B),$$

la que aplicada a la definición [94-26] da (§ 23-14):

$$\mu_i(X) \leqslant \mu(S) - \mu(S - X).$$

Por otra parte, si T es la cápsula isométrica de $S - X$, el conjunto medible $S - T$ está contenido en X y por aplicación de la definición

[94-26] y de § 94-5, teor. 1 resulta, al ser $\mu(S . T) \leqslant \mu(T) = \mu(S - X)$, (§ 94-4, M_2):

$$\mu_i(X) \geqslant \mu(S - T) = \mu(S) - \mu(S . T) \geqslant \mu(S) - \mu(S - X),$$

que con la desigualdad de sentido contrario antes obtenida, prueba en definitiva [94-27].

TEOR. 3. *Si una medida exterior es regular, la condición necesaria y suficiente para que un conjunto* X *de medida exterior finita sea medible, es que se cumpla:*

[94-28] $$\mu_i(X) = \mu(X).$$

Por [94-27], la [94-28] es equivalente a probar

$$\mu(X) = \mu(S) - \mu(S - X),$$

cuya necesidad es evidente (§ 94-5, teor. 2) para X medible. Recíprocamente, de la igualdad anterior se deduce que $\mu(S - X) = 0$ y por tanto (§ 94-4, teor. 3) $S - X$ es medible y también lo es su unión con $\mathbf{E} - S$, cuyo complemento X (§ 94-4, teor. 2) será por tanto medible.

NOTA 1. Consecuencia inmediata del teorema 3 es la equivalencia de la definición de LEBESGUE [94-14] de conjunto medible con la de CARATHÉODORY para conjuntos acotados en $\mathbf{E}_n$, una vez que demostremos (nota 4) la equivalencia de la definición [94-26] con la de medida interior de LEBESGUE en el caso (L).

Vamos ahora a obtener la *equivalencia de la definición de* CARATHÉODORY con la [94-17].

Respecto de una medida exterior cualquiera μ, aun no métrica, esto es, sólo determinada por M_1, M_2 y M_3, de § 94-3 se tiene:

TEOR. 4. *Si* X *es un conjunto de un espacio topológico* E *tal que para todo número* $\varepsilon > 0$, *existe un conjunto medible continente* $A (\geqq) X$ *cumpliendo*

[94-29] $$\mu(A - X) < \varepsilon \quad .$$

entonces X *es medible* (μ).

En efecto, por hipótesis, existe una sucesión de conjuntos medibles $\{A_k\}$, tales que

$$A_k (\geqq) X \quad ; \quad \mu(A_k - X) < 1/k \quad ; \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Si se toma

$$A = \bigcap_k A_k (\geqq) X \quad ,$$

que será medible (μ), se cumplirá

$$\mu(A - X) \leqslant \mu(A_k - X) < 1/k \quad , \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

que siendo válido para todo k, nos dará

$$\mu(A - X) = 0 \quad ,$$

es decir (§ 94-4, teor. 3) $A - X$ es medible (μ) y siéndolo A, también lo será X, por poder poner (§ 94-5, teor. 4; § 94-4, teor. 2):

$$(\mathbf{E} - A) + (A - X) = \mathbf{E} - X.$$

Respecto del recíproco, en el espacio euclídeo $\mathbf{E}_n$, si $X \varepsilon (L)$, se cumple [94-29], pero esto ya no subsiste para una medida exterior cualquiera (μ) en un espacio abstracto cualquiera. En general sólo podemos afirmar:

TEOR. 5. *Para una medida exterior* (μ) *regular definida en un espacio topológico* E *que sea la unión de una infinidad numerable de conjuntos* U, *de medida exterior finita, la condición necesaria y suficiente*

para que un conjunto X *sea medible* (μ) *es que para todo número* $\varepsilon > 0$ *exista un conjunto medible* (μ) *continente* A($\geqq$)X *cumpliendo* [94-29].

Obsérvese que se cumplen las condiciones de hipótesis para el espacio euclídeo E_n, donde pueden tomarse para U_r los conjuntos abiertos constituídos por las esferas de radio r y centro el origen y para la medida (L) que es regular (teor. 1).

En las condiciones de hipótesis del teorema anterior, la suficiencia de [94-29] se ha demostrado en el teorema 4. Veamos ahora la necesidad. Demostremos primero que para todo conjunto $X\varepsilon(\mu)$ existe una infinidad numerable de conjuntos disjuntos $X_r\varepsilon(\mu)$ de medida finita $\mu(X_r) < +\infty$ tales que

$$X = \sum_{r=1}^{\infty} X_r .$$

Pues basta considerar las cápsulas isométricas $S_r(\geqq)U_r$ tales que $S_r\varepsilon(\mu)$ con medida $\mu(S_r) = \mu(U_r) < +\infty$ y tomar

[94-30] $$X_r = X.(S_r - \bigcup_{k=1}^{r-1} S_k)\varepsilon(\mu).$$

Por ser la medida exterior μ regular, por [94-24] existe para todo número $\varepsilon > 0$ un conjunto $A\varepsilon(\mu)$ continente del X cualquiera dado, tal que $\mu(A) \leqslant \mu(X) + \varepsilon$, pudiéndose poner $<$, si $\mu(X)$ es finita. En este caso, si además $X\varepsilon(\mu)$ es (§ 94-5)

$$\mu(A - X) = \mu(A) - \mu(X) < \varepsilon$$

y el recíproco en cuestión queda probado.

Si $\mu(X) = +\infty$ y $X\varepsilon(\mu)$, se considera la descomposición

$$X = \sum_{r=1}^{\infty} X_r$$

en conjuntos [94-30] y por lo que acabamos de ver, existirán $A_r(\geqq)X_r$ tales que $\mu(A_r - X_r) < \varepsilon/2^{r+1}$, $A_r\varepsilon(\mu)$, y entonces es

$$X (\leqq) \bigcup_{r=1}^{\infty} A_r = A\varepsilon(\mu).$$

De esto y ser

$$A - X (\leqq) \bigcup_{r=1}^{\infty} (A_r - X_r)$$

se deduce

$$\mu(A - X) \leqslant \mu[\bigcup_{r=1}^{\infty} (A_r - X_r)] \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \mu(A_r - X_r) < \varepsilon \quad ,$$

como queríamos demostrar.

NOTA 2. Aun para una medida exterior métrica, no siempre en [94-29] puede tomarse en lugar de A un conjunto abierto G, pues, por ejemplo, respecto de la medida μ_1 de HAUSDORFF (véase bibliografía, nota IV) no existe ningún conjunto abierto de E_2 de medida finita.

El teorema anterior así modificado subsiste sólo si el espacio métrico E es la unión de una infinidad numerable de conjuntos abiertos G_r de medida finita. Tal ocurre en los espacios euclídeos.

Demostremos finalmente en éstos el teorema que nos dé la equivalencia de la definición de CARATHÉODORY con la [94-17].

TEOR. 6. *En el espacio euclídeo* E_n, *la condición necesaria y suficiente para que un conjunto* X *sea medible* (L) *es que para todo número* $\varepsilon > 0$ *exista un conjunto abierto continente* G($\geqq$)X, *tal que cumpla:*

[94-17] $$| G - X | < \varepsilon .$$

Pues para demostrar que [94-17] es suficiente para ser $X \varepsilon (L)$, basta en el teorema 4 tomar G_k en lugar de A_k y en lugar de A resulta un seudoabierto (§ 94-1) medible

$$G_\delta = \bigcap_k G_k (\geqq) X \quad \text{con} \quad |G_\delta - X| = 0 \quad ,$$

de donde, como antes, se deduce que $X \varepsilon (L)$. Recíprocamente, si suponemos que $X \varepsilon (L)$, teniendo en cuenta [94-9], si además $|X| < +\infty$, por § 94-5, teor. 2 serán $|G - X| = |G| - |X| < \varepsilon$, como queríamos demostrar. En el caso de ser $|X| = +\infty$ y $X \varepsilon (L)$, se considera como en el teor. 5 la descomposición [94-30], tomando para $U_r = S_r$ las esferas de radio r y centro el origen y en lugar de A_r, conjuntos abiertos $G_r (\geqq) X_r$, tales que $|G_r - X_r| < \varepsilon / 2^r$, siendo entonces

$$X (\leqq) \bigcup_{r=1}^{\infty} G_r = G$$

abierto, y como

$$G - X (\leqq) \bigcup_{r=1}^{\infty} (G_r - X_r) \quad ,$$

resulta

$$|G - X| \leqslant \left| \bigcup_{r=1}^{\infty} (G_r - X_r) \right| \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} |G_r - X_r| < \varepsilon \quad ,$$

como queríamos demostrar.

TEOR. 7. *En el espacio euclídeo E_n, la condición necesaria y suficiente para que un conjunto X sea medible (L) es que para todo número $\varepsilon > 0$ exista un conjunto cerrado contenido $F (\leqq) X$ tal que cumpla*

[94-31] $$|X - F| < \varepsilon .$$

Pues $G (\geqq) E - X$ es equivalente a que $F = E - G (\leqq) X$, siendo $X - F = X - (E - G) = G - (E - X) = G . X$.

Y entonces, de los teor. 6 y 7, se deduce inmediatamente la *equivalencia de la definición* [94-16] *de* LA VALLÉE POUSSIN *con la de* CARATHÉODORY *en los espacios euclídeos*. Es decir:

TEOR. 8. *La condición necesaria y suficiente para que $X \varepsilon (L)$ es que para todo número $\varepsilon > 0$ exista un conjunto continente abierto G y un conjunto contenido cerrado F tales que cumplan*

[94-16] $$F (\leqq) X (\leqq) G \quad \text{con} \quad |G - F| < \varepsilon .$$

Pues si se cumple [94-16], con mayor razón [94-17] ó [94-31], y por los teoremas 6 ó 7 será $X \varepsilon (L)$. Recíprocamente, si $X \varepsilon (L)$, por los teoremas 6 y 7 existirán $G (\geqq) X$ y $F (\leqq) X$ tales que $|G - X| < \varepsilon/2$ y $|X - F| < \varepsilon/2$, de donde

$$|G - F| \leqslant |G - X| + |X - F| < \varepsilon \quad ,$$

como queríamos demostrar.

NOTAS: 3. DE LA VALLÉE POUSSIN emplea la definición [94-16] en lugar de la [94-17] ó [94-31], para poder hacerlo en forma *constructiva*, ya que también presupone la existencia de $G (\geqq) X$ y de $F (\leqq) X$ en el sentido de "*poder construirse*". Por fin, la medida de $G - F$ la ha introducido en la forma constructiva "boreliana" explicada en los §§ 94-1, 2.

4. *Medida interior* (L) *de conjuntos acotados.* — Obsérvese que en la definición [94-26] de medida interior de CARATHÉODORY, los conjuntos medibles (B) pueden ser conjuntos cerrados F como en [94-15] si X es acotado y nos referimos a la medida (L). Pues, si $X (\leqq) I$ será (§ 94-3, teor. 3):

$$m_i(X) = \underset{X(\geqq)B\epsilon(L)}{\text{extr sup}} |B| = \underset{I-X(\leqq)I-B}{\text{extr sup}} |I-(I-B)| =$$

$$= |I| - \underset{I-X(\leqq)I-B}{\text{extr inf}} |I-B| = |I| - \underset{I-X(\leqq)G}{\text{extr inf}} |G| =$$

$$= \underset{X(\geqq)I-G}{\text{extr sup}} |I-G| = \underset{X(\geqq)F}{\text{extr sup}} |F| \quad ,$$

donde $I - G = F$ es cerrado. Por tanto, para la medida (L) coincide la definición [94-26] con la de medida interior de LEBESGUE [94-4].

5. *Cápsula y núcleo borelianos de un conjunto medible* (L). — Si en el teorema 4, tomamos conjuntos abiertos $A_k = G_k$ en lugar del conjunto A, obtendríamos un conjunto boreliano posiblemente seudo-abierto:

$$G_\delta = \bigcap_k G_k (\geqq) X \quad ,$$

tal que cumplirá $|G_\delta - X| = 0$ y por ser G_δ y X medibles, de ésta se deduce (cfr. teor. 2, *b*):

[94-32] $$|G_\delta| = |X|.$$

El conjunto G_δ es la llamada ***cápsula boreliana isométrica*** del conjunto medible X.

Si el conjunto medible X está acotado, por complementos deduciremos el conjunto boreliano posiblemente seudo-cerrado:

$$F_\sigma = \bigcup_k F_k (\leqq) X \quad ,$$

tal que

[94-33] $$|F_\sigma| = |X| \quad ,$$

siendo F_σ el ***núcleo boreliano isométrico*** del conjunto medible X.

Para X medible no acotado subsiste [94-33], pues basta considerar una sucesión de conjuntos medibles acotados disjuntos cuya suma sea X. Esta sucesión existe siempre, pues si U_r es una esfera de radio r con centro en el origen (r número natural) y $U_0 = 0$, será

$$X = \sum_{r=1}^{\infty} X.(U_r - U_{r-1})$$

de sumandos evidentemente medibles y acotados.

7. **El axioma de Zermelo y la existencia de conjuntos no medibles** (L). — *a*) En la demostración de los teoremas de cubrimiento, tal el de BOREL (Cap. VI, nota III) o el de LINDELÖF-HAUSDORFF (§ 94-2, teor. 8) se ha dejado al arbitrio la elección de los elementos de un conjunto posteriormente utilizado.

Algunos matemáticos objetan este tipo de razonamientos en que la determinación de un cierto ente se hace depender de infinitas elecciones arbitrarias, de otros entes a_1, a_2, a_3, ..., dentro de ciertos conjuntos X_1, X_2, ..., sin dar un criterio previo que determine cuál es el elemento a_1, que debe elegirse en X_1, después el a_2 en X_2, etc.

Se debe a ZERMELO haber puesto en evidencia este hecho, por lo que se llama *axioma de* ZERMELO (o también *principio de elección arbitraria*) al siguiente:

Dada una familia Φ *cualquiera de conjuntos* X, *no vacíos y disjuntos (sin elementos comunes) dos a dos,* existe *siempre un conjunto*

$$D (\leqq) U_\Phi X \quad ,$$

tal que tiene exactamente un solo elemento común con cada $X \epsilon \Phi$.

El axioma postula solamente la existencia del conjunto D, aun cuando no podamos dar ningún criterio que lo determine explícitamente, es decir, mediante el cual podamos decidir si un elemento perteneciente a U_{Φ} X, pertenece o no a D. Por esta razón, muchos matemáticos declinan usar dicho axioma, que sin embargo es necesario para fundar rigurosamente muchos teoremas importantes.

EJEMPLOS: 1. Consideremos todas las funciones reales f no idénticamente nulas definidas en $0 \leqslant x \leqslant 1$. Cada función f con su opuesta —f forma un conjunto X de dos elementos, y todos estos conjuntos posibles X forman la familia Φ. El axioma de ZERMELO afirma que *existe* un conjunto D de funciones f que efectúa en cada X la selección de una tomada en el par de f que constituyen X, aun cuando no sabemos dar ningún criterio para determinar explícitamente un tal conjunto D.

2. Consideremos los conjuntos de dos elementos formados por pares de números reales no nulos y opuestos: $X = \{x, -x\}$; $x \neq 0$. Aquí también el axioma de ZERMELO postula la existencia de D que tiene con cada X un solo elemento común, pero este caso es distinto del anterior, por no necesitarse del axioma de ZERMELO para *construir efectivamente* un tal conjunto D. Así podría tomarse para D el conjunto de números positivos o bien tomar para x racional el elemento positivo de X y para x irracional, el negativo de los dos de X; etc.

3. Dados un par de calcetines blancos y un par de calcetines grises, ¿podremos decir que *existe* o queda *determinado* o *definido* un par que conste de un calcetín blanco y de uno gris sin especificar cuál de los dos blancos y cuál de los dos grises han de formarlo? Claro está que entonces no existe criterio que permita reconocer para cada ente si pertenece o no al conjunto. Introducir un tal par gris-blanco en esta forma es hacerlo por el axioma de ZERMELO. Éste se llama también "axioma multiplicativo" porque pueden formarse 2×2 pares gris-blanco indistinguibles entre sí y sólo a propiedades comunes a todos ellos (por ejemplo, al color distinto de ambos calcetines, al ridículo que hará quien los lleve, etc.) nos podremos referir al aplicar dicho axioma para "definir" un conjunto.

Para los matemáticos *idealistas*, *existe* el infinito *actual* (cfr. Cap. II, nota II), estático y terminado; existen todos los números reales, todos los puntos, todos los entes geométricos, independientemente de los hombres, que solamente pueden definir o elegir algunos de ellos y dar normas para definir otros. Para los *intuicionistas* sólo *existen* los entes que han sido creados, es decir, pensados o definidos por algún hombre o puedan serlo mediante una ley o norma establecida; de aquí que exijan un criterio de elección, un *procedimiento constructivo* sin el cual *no queda definida* la sucesión convergente que por ejemplo determina un punto de acumulación, ni por tanto queda demostrada la existencia de éste, que exige dar una ley de aproximación indefinida. Para un idealista existen tantos puntos de acumulación como posibilidades de elección; es decir, cada sucesión convergente que contenga infinitos puntos del conjunto X determina un punto de acumulación; mientras que para un intuicionista sólo existen los determinados por una ley que no deje lugar al arbitrio; las únicas demostraciones admisibles para él son constructivas. En cambio, la demostración dada del teorema de BOREL no es constructiva, pues no indica cómo debe hacerse la selección de los entornos para cubrir el conjunto.

Tales demostraciones por el absurdo, se basan en el principio lógico del *tercero excluido*, que en este caso (Cap. VI, nota III) se expresaría así: *existe* un conjunto finito de entornos que cubren el conjunto, o *no existe*; como esta segunda hipótesis conduce a contradicción, tenemos que admitir la primera.

Tales demostraciones por el absurdo no son admitidas por los intuicionistas brouwerianos; para ellos el número $10^{10^{10}} + 1$ no es primo ni

compuesto, pues no es posible averiguarlo por cálculo, ni hay criterio que permita afirmarlo; la cifra que ocupa el lugar 10^{9} en la expresión decimal de π no es par ni impar para ellos, el teorema del máximo y mínimo de toda función continua es falso; y en general, casi toda la grandiosa teoría de las funciones reales edificada en este siglo, carece de sentido.

Como estas acometidas, cuyo origen es antiguo, se repiten periódicamente, con alternativas de virulencia y apaciguamiento, será prudente esperar la construcción del nuevo edificio, que penosamente intentan levantar en sustitución de la grandiosa obra cantoriana.

b) *Conjunto no medible* (L) *de* HAUSDORFF. — Designemos por su abscisa p los puntos de la recta euclídea E_1. Consideremos todos los puntos $p \varepsilon E_1$, repartidos en conjuntos $A(p)$ tales que si $p \varepsilon A(p)$, también $p + r \varepsilon A(p)$, donde r es un número racional cualquiera. Sea $B(p) = A(p) \frown (0, \frac{1}{2})$ el conjunto de los puntos de cada $A(p)$ contenidos en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$. Por ejemplo, $\pi - 3 \varepsilon B(\pi)$, o bien todos los puntos racionales de $(0, \frac{1}{2})$ formarán $B(1)$. Por *aplicación del axioma de* ZERMELO, "existe" un conjunto H tal que $H (\leqq) (0, \frac{1}{2})$ contiene un elemento y uno sólo de cada $B(p)$. Vamos a probar que H *no es medible* (L). Llamemos H_r al conjunto obtenido sumando a cada elemento de H el número racional r. Los H_r son conjuntos disjuntos y congruentes, es decir, cada $p_1 \varepsilon H_{r_1}$ está en correspondencia biunívoca, con un $p_2 \varepsilon H_{r_2}$ de manera que $p_2 - p_1 = r_2 - r_1$.

Por tanto, los conjuntos H y H_r tendrían que tener la misma medida si son medibles. Los conjuntos H, $H_{1/2}$, $H_{1/3}$, ..., $H_{1/n}$, ..., son todos interiores al intervalo $(0, 1)$ y cumplen, por tanto,

$$|H + H_{1/2} + H_{1/3} + \dots| \leqslant 1.$$

Si fuesen medibles, por la propiedad de aditividad infinita (§ 94-5, teor. 2), quedaría

$$|H + \sum_{n=2}^{\infty} H_{1/n}| = |H| + \sum_{n=2}^{\infty} |H_{1/n}| = \lim_{n \to \infty} (n . |H|) \leqslant 1 \quad ,$$

es decir, habría de ser $|H| = |H_r| = 0$ para todo número racional r. Para la *sucesión* de números racionales r sería $\sum_r |H_r| = 0$ y como la recta entera se puede considerar como la suma $\sum_r H_r = E_1$, tendríamos la contradicción de que la longitud de la recta sería nula, luego los H_r congruentes con H no son medibles (L).

Por análoga demostración se prueba que cualquier conjunto X de medida exterior no nula, $|X| > 0$, *contiene* un conjunto H, no medible.

Sin el axioma de ZERMELO no se ha logrado todavía definir ningún conjunto no medible (L).

c) *Conjuntos de secciones nulas.* — Si un conjunto acotado superficial X del plano euclídeo E_2 está contenido en el intervalo cerrado $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$; $a_2 \leqslant y \leqslant b_2$ y para todo $y_0 \varepsilon (a_2, b_2)$, a menos de un conjunto de medida lineal nula (§ 82-2), la intersección de X con la recta $y = y_0$ da puntos con $x \varepsilon [a_1, b_1]$ que forman conjuntos de medida lineal nula, *en el caso de que* X *sea medible* (L), la medida superficial de X es también nula.

Pero W. SIERPINSKI ha dado ejemplo de conjunto X no medible (L) (y por tanto con $|X| > 0$) que tiene la misma propiedad respecto de las secciones $y = y_0$.

d) *Descomposición finita de* BANACH *y* TARSKI. — La existencia de conjuntos no medibles (L) deducida del axioma de ZERMELO tiene por resultado consecuencias cada día más sorprendentes.

Dos conjuntos de puntos A y B son congruentes, si existe una función φ que transforme biunívocamente A en B y satisfaga a la condi-

ción: Dados dos puntos arbitrarios a_1 y a_2 del conjunto A y sus correspondientes $\varphi(a_1)$ y $\varphi(a_2)$ en B, son iguales las distancias:

$$\varrho(a_1, a_2) = \varrho[\varphi(a_1), \varphi(a_2)].$$

Dos conjuntos de puntos del espacio euclídeo E_n se llamarán *equivalentes por descomposición finita*, si pueden ser descompuestos en un número *finito e igual* de partes sin puntos comunes, respectivamente congruentes.

S. BANACH y A. TARSKI (*Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fundamenta Mathematicae, *6*, p. 244; 1924) han demostrado que en un espacio euclídeo de $n \geqq 3$ dimensiones, dos conjuntos *arbitrarios*, acotados y con puntos interiores (por ejemplo, dos esferas de radio distinto, como el sol y una arveja) son equivalentes por descomposición finita. Claro está que las "partes" no pueden ser todas medibles. El método ha sido simplificado por W. SIERPINSKI (*Le paradoxe de* HAUSDORFF *et le paradoxe de* BANACH *et* TARSKI, Lincei Rendic. Sc. fis. mat. e nat., (8), 4, p. 270; 1948) y procede de un teorema análogo para conjuntos situados sobre la superficie esférica (M. HAUSDORFF: Mathematische Annalen, 75, p. 428, 1914, reproducido por E. BOREL en *Leçons sur la théorie des fonctions*, 2ª ed., p. 255, París, 1914).

El teorema correspondiente al espacio euclídeo de 1 ó 2 dimensiones es falso.

Por otra parte, en un espacio euclídeo de $n \geqslant 1$ dimensiones, dos conjuntos *arbitrarios* (acotados o no), conteniendo puntos interiores, son equivalentes por descomposición numerable.

Un corolario de estos teoremas es en cambio la siguiente propiedad intuitiva, cuya demostración no se ha logrado *sin el axioma de* ZERMELO: Dos polígonos planos tales que uno está contenido en otro no son nunca equivalentes por descomposición finita.

8. **Funciones medibles.** — Sea dada una función real $f(x)$ definida en los puntos x de un conjunto medible X del espacio euclídeo E_n. Supondremos que nos referimos siempre a la medida (L).

DEF. 1. *Se dice que la función real* $-\infty \leqslant f(x) \leqslant +\infty$, *definida en* $X (\leqq) E_n$, *es medible, cuando es medible el conjunto de puntos* x *tales que* $f(x) \geqslant k$ *para cada valor real* k (*finito o infinito con signo determinado*).

Si son medibles todos los conjuntos $f(x) \geqslant k$, también lo son los complementarios $f(x) < k$; y como cada conjunto $f(x) = k$ es la intersección de los $f(x) < k_n$, siendo $k_n \downarrow k$, es medible según § 94-3, teor. 3; y también lo es, por tanto, el $f(x) \leqslant k$.

Inversamente, del caso $\leqslant$ se pasa al complementario $>$; de éste al $=$, como antes; por tanto, al $\geqslant$. En resumen:

TEOR. 1. *Condición necesaria y suficiente para que* $f(x)$ *sea medible, es que lo sea para todo* k *alguno de los conjuntos*:

$$f(x) \geqslant k \quad , \quad f(x) \leqslant k \quad , \quad f(x) > k \quad , \quad f(x) < k .$$

TEOR. 2. *Es suficeinte que estas cuatro condiciones equivalentes se verifiquen para todo número racional* k. Pues si k

es irracional y se elige una sucesión $h_n \uparrow k$ el conjunto $f(x) \geqslant k$ es la intersección de los $f(x) \geqslant h_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ y, por tanto, medible.

NOTA 1. En cambio, no puede afirmarse que una función $f(x)$ sea medible, porque sea medible para todo k real el conjunto de puntos x tales que $f(x) = k$. Demos un ejemplo (con ayuda del axioma de ZERMELO). En la recta euclídea E_1, sea un conjunto A no medible (§ 94-7, *b*) al que no pertenezca el origen $x = 0$. Defínase $f(x)$ tal que valga x si $x \varepsilon A$ y valga $-x$ si $x \varepsilon E_1 - A$. Entonces el conjunto $f(x) = k$ consta de dos puntos, uno o ninguno y por tanto es medible (con medida nula). Sin embargo, $f(x)$ no puede ser medible, porque si lo fuera, serían medibles (teor. 1) los conjuntos X_p donde $f(x) > 0$ y X_n donde $f(x) \leqslant 0$; si llamamos P al conjunto medible de los números reales $x \geqslant 0$ y N al conjunto medible de los números reales $x < 0$, será

$$X_p = A.P + (E_1 - A).N \quad ; \quad X_n = A.N + (E_1 - A).P \quad ,$$

de donde $A = X_p.P + X_n.N$ sería medible (§ 94-5), en contradicción con la hipótesis.

TEOR. 3. *Toda función integrable* (R) *y en particular toda función continua es medible.* Si x es punto de acumulación del conjunto $f(x) \geqslant k$ y es de continuidad, en él es también $f(x) \geqslant k$, por tanto pertenece al conjunto; si x es de discontinuidad, pertenece a un conjunto N de medida nula (§ 94-3, 3º). En definitiva, el conjunto $f(x) \geqslant k$ es del tipo $F - N$ que es medible (§ 94-5).

TEOR. 4. *Sean* f_1 *y* f_2 *dos funciones medibles en un conjunto* X *medible y* c *una constante. Entonces son medibles las funciones:*

a) $f_1 + c$; *b*) cf_1 ; *c*) $f_1 \pm f_2$;

d) $|f_1|$; *e*) $f_1 f_2$; *f*) f_1/f_2 *si* $f_2 \neq 0$ *en* X.

DEM. *a*) El conjunto donde $f_1 + c \geqslant k$ es aquel donde $f_1 \geqslant k - c$, que es medible por hipótesis para todo k real.

b) Si $c > 0$, el conjunto donde $cf_1 \geqslant k$, es el mismo donde $f_1 \geqslant k/c$, medible por hipótesis. Análogamente para $c < 0$; si $c = 0$ la conclusión es evidente.

c) El conjunto donde $f_1 \pm f_2 \geqslant k$ es el mismo donde $f_1 \geqslant \geqslant k \mp f_2$, unión de los infinitos conjuntos $f_1(x) \geqslant h_r \geqslant k \mp f_2$, siendo h_r todos los números racionales. Cada uno de estos conjuntos, definido por dos condiciones, es la intersección de los conjuntos medibles $f_1(x) \geqslant h_r$ y $\pm f_2(x) \geqslant k - h_r$, luego es medible (§ 94-5, teor. 3) y también lo es su unión (§ 94-5, teor. 4).

d) El conjunto donde $|f_1| \geqslant k$ es la unión de los $f_1 \geqslant k$ y $f_1 \leqslant -k$ si $k \geqslant 0$, y coincide con X si $k < 0$; en todo caso es medible.

NOTA 2. Obsérvese que el recíproco no es cierto, es decir, puede ser $|f_1|$ medible, sin serlo f_1. Por ejemplo, sea $f_X(x)$ la función característica (§ 94-1, def.) de un conjunto no medible X contenido en un intervalo lineal I (§ 94-7, *b*). Entonces la función *no medible* $f_1(x) = f_X(x) - \frac{1}{2}$, definida en el intervalo I, vale $\frac{1}{2}$ si $x \varepsilon X$ y vale $-\frac{1}{2}$ si $x \varepsilon I - X$, por lo que su valor absoluto $|f_1(x)| \equiv \frac{1}{2}$ es medible en I.

e) Por ser $f_1 f_2 = \frac{1}{4}[(f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2]$, basta demostrar que f^2 es medible si lo es f. El conjunto donde $f^2 \geqslant k$ es la unión de los $f \geqslant \sqrt{k}$ y $f \leqslant -\sqrt{k}$ si $k \geqslant 0$, y coincide con X si $k < 0$; en todo caso es medible.

f) El conjunto donde $f_1/f_2 > k$ es la unión de dos intersecciones: la primera donde a la vez $f_1 > kf_2$ y $f_2 > 0$; la segunda donde a la vez es $f_1 < kf_2$ y $f_2 < 0$, siendo todos estos conjuntos medibles (§ 94-5).

TEOR. 5. *Las funciones* $\text{extr sup}\, f_n(x)$ *y* $\text{extr inf}\, f_n(x)$ *de funciones medibles, son medibles.* Pues si es $F(x)$ el extremo superior de los valores $f_n(x)$ para cada x, el conjunto $F(x) > k$ es la unión de todos los conjuntos $f_n(x) > k$, y por § 94-5, teor. 4, es medible. Análogamente, o por cambio de signo, el otro caso.

TEOR. 6. *Si las funciones medibles* $f_n(x) \uparrow F(x)$, *o bien* $f_n(x) \downarrow f(x)$, *es medible la función límite.* Pues en el primer caso, de sucesión creciente (§ 78-1, teor. 2), es $F = \text{extr sup}\, f_n$ y en el segundo es $f = \text{extr inf}\, f_n$.

TEOR. 7. *Si* $f(x) = \lim f_n(x)$ *para* $n \to \infty$, *siendo medibles las* $f_n(x)$, *también lo es* $f(x)$. Puesto que para cada x y cada $\varepsilon > 0$, desde un n es $-\varepsilon \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant \varepsilon$, las funciones $g_n(x) = \text{extr sup}\,(f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots)$ satisfacen a la misma acotación; luego $g_n(x) \to f(x)$ y por los teoremas 5 y 6 anteriores, es medible.

Nótese, de paso, que también resultan medibles las funciones $\overline{\lim}\, f_n$ y $\underline{\lim}\, f_n$.

TEOR. 8. *La suma finita o numerable de funciones medibles es medible.* Para la suma finita ha sido demostrado en teor. 4, *c*. Para las series convergentes es consecuencia de esta propiedad y del teor. 7.

TEOR. 9. *Es medible toda función derivada.* Es consecuencia inmediata del teor. 7, por ser la derivada $f'(x)$ el límite para $h \to 0$ ó para $n = 1/h \to \infty$ de la sucesión de funciones continuas $n[f(x + 1/n) - f(x)]$.

NOTA 3. El teorema 7 implica que una función continua de función medible es una función medible. Sin embargo, *no es cierto* que sea siempre medible cualquier función medible de función continua (véase ejercicio 13).

EJERCICIOS

1. Una función $\sigma(X)$ de conjunto se llama infinitamente (finitamente) aditiva sobre $\mathbf{H}$ si está definida para los conjuntos de una familia $\mathbf{H}$ infinitamente (finitamente) aditiva (§ 94-1, nota 3), es $\sigma(0) = 0$, y para cualquier sucesión infinita (finita) de conjuntos X_n de $\mathbf{H}$ dos a dos disjuntos, es $\sigma(\sum X_n) = \sum \sigma(X_n)$. Demostrar que para toda función σ (finita o infinitamente) aditiva de conjuntos con $X \varepsilon \mathbf{H}$, $Y \varepsilon \mathbf{H}$ se cumple: *a*) Si $X(\geqq)Y$ y $\sigma(Y)$ es finita, entonces $\sigma(X - Y) = \sigma(X) - \sigma(Y)$; *b*) Si $X(\geqq)Y$ y $\sigma(Y)$ es infinita, entonces $\sigma(X) = \sigma(Y)$; *c*) Si $\sigma(X) = +\infty$, entonces $\sigma(Y) \neq -\infty$.

2. Si σ es una función infinitamente aditiva sobre $\mathbf{H}$ (ejercicio 1) y todos los conjuntos de la sucesión monótona $X_1(\leqq)X_2(\leqq)\ldots(\leqq)X_n(\leqq)\ldots$ pertenecen a $\mathbf{H}$, entonces es $\lim \sigma(X_n) = \sigma(\lim X_n)$ para $n \to \infty$, donde $\lim X_n = \mathrm{U} X_n$.

3. Sea $\sum_1^\infty a_n$ una serie convergente de términos reales y para cada conjunto finito N de números naturales definamos $\sigma(N) = \sum_{n \in N} a_n$, mientras que $\sigma(N_\infty) = +\infty$, si N_∞ es un conjunto infinito de números naturales. Demostrar que σ es finita, pero no infinitamente aditiva y mediante este ejemplo probar que en el ejercicio 2 no puede reemplazarse la frase "infinitamente aditiva" por "finitamente aditiva".

4. Definida la función monótona creciente de conjunto por la condición: "$X(\geqq)Y$ implica $\sigma(X) \geqq \sigma(Y)$" (y análogamente para decreciente con $\leqq$), demostrar que toda función finita o infinitamente aditiva de conjunto (ejercicio 1) es creciente (decreciente) cuando y sólo cuando admite sólo valores no negativos (no positivos).

5. Si σ es aditiva sobre $\mathbf{H}$ (ejercicio 1), para cada $X \varepsilon \mathbf{H}$ se define la *variación superior* $\overline{V}$ e *inferior* $\underline{V}$ de σ en X por

$$\overline{V}(\sigma, X) = \underset{X(\geqq)P\epsilon \mathbf{H}}{\text{extr sup}}\ \sigma(P) \quad , \quad \underline{V}(\sigma, X) = \underset{X(\geqq)P\epsilon \mathbf{H}}{\text{extr inf}}\ \sigma(P) \quad ,$$

donde los extremos superior e inferior (§ 23-14) se toman respecto de todos los conjuntos P de $\mathbf{H}$ contenidos en X. Demostrar que las variaciones superior e inferior de una función de conjunto finitamente (infinitamente) aditiva son funciones monótonas finitamente (infinitamente) aditivas.

6. Demostrar que para una función σ aditiva de conjunto, con variaciones finitas (ejercicio 5), se cumple $\sigma(X) = \overline{V}(\sigma, X) + \underline{V}(\sigma, X)$. (Teorema de descomposición de JORDAN).

7. Deducir del ejercicio 6 el teorema de § 55-9, *d*), introduciendo la función finitamente aditiva de conjunto $\sigma(X) = \sum_1^n \{f(x_i + h_i) - f(x_i)\}$, donde X representa cualquier conjunto que pueda expresarse por la unión de un número finito de subintervalos $(x_i, x_i + h_i]$ no rampantes de $[a, b]$.

8. Sea E un espacio cualquiera y a, b números reales fijos tales que $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2a$. Si se define $\mu(0) = 0$, $\mu(E) = b$ y $\mu(X) = a$ para todos los demás conjuntos, probar que μ es una medida exterior de CARATHÉODORY y determinar la clase de los conjuntos medibles. Determinar si μ es métrica para $E = E_1$ (recta euclídea).

9. Probar que si una medida exterior de Carathéodory es finitamente aditiva, también es infinitamente aditiva.

10. Determinar en qué casos es regular la medida exterior definida en el ejercicio 8.

11. Demostrar que es medible (L) todo conjunto de E_n que es transformado por la inversa de una función f medible (L) de un conjunto (B) de E_1 (§ 94-1, nota 3).

12. Sea K el conjunto perfecto de medida $\frac{1}{2}$ complemento del G construído en § 94-5, nota 4, sobre el intervalo [0; 1] del eje x, y H un conjunto no medible contenido en K (§ 94-7, *b*). Sea K_0 el conjunto ternario de Cantor de medida nula (§ 50-2, nota 3) contenido en el intervalo [0; 1] del eje y, siendo $y = g(x)$ la función creciente que transforma linealmente los intervalos contiguos a K en los correspondientes intervalos contiguos a K_0. Demostrar que los límites laterales existentes (cfr. § 80, ejercicio 8) de $g(x)$ en cada extremo de los intervalos de G son iguales, engendrando así una función $f(x)$, prolongación de la $g(x)$, definida en [0; 1], monótona y continua, que transforma el conjunto no medible H en un conjunto H_0 contenido en K_0 de medida nula y por tanto medible (L). Demostrar mediante el ejercicio 11 que H_0 medible (L) no es un conjunto (B), (§ 94-1, nota 3).

13. Mediante el ejercicio 12 dar ejemplo de una función continua que transforme un conjunto medible en otro no medible, así como de una función medible de función continua que no es función medible.

14. Si una medida exterior μ se define sólo para una familia infinitamente aditiva H de conjuntos (§ 94-1, nota 3), la familia infinitamente aditiva (§ 94-5, nota 3) de conjuntos medibles (μ) de H puede dejar de contener algún conjunto Z tal que Z esté contenido en un conjunto de H de medida nula (μ). Se dice que $\bar{\mu}$ es la completada de μ, si para todo X de H y todo Z contenido en un conjunto de H de medida nula (μ), se define $\bar{\mu}(Z \smile X) = \mu(X)$ y se dice que μ es completa si $\bar{\mu} = \mu$. Demostrar que es infinitamente aditiva la familia de $Z \smile X$ donde μ está definida y que $\bar{\bar{\mu}} = \bar{\mu}$. Probar que los conjuntos (B) de un espacio euclídeo E_n (§ 94-1, nota 3) tienen una medida boreliana (§ 94-1, def. 4) que no es completa, siendo su medida completada la [94-8] de Lebesgue.

§ 95. Integral de Lebesgue

1. **Definición de integral** (L). — *a*) Sea la función real $0 \leqslant f(x) \leqslant +\infty$, definida en el conjunto medible X del espacio euclídeo E_m, siendo $f(x)$ medible. Entonces (§ 94-8, def.), es medible el conjunto de puntos x tales que $f(x) \geqslant y$, para cada número $y \geqslant 0$. Esta medida, que depende de y es, por tanto (§ 94-4, M_2), una función *decreciente* $\xi = \mu(y)$; y adoptaremos como definición de integral (L) de $f(x) \geqslant 0$ la integral (R-C) (§ 80-1):

$$[95\text{-}1] \quad (\mathrm{L})\int_X f(x)\,dx = (\mathrm{R\text{-}C})\int_0^{+\infty} \mu(y)\,dy = \lim_{Y \to +\infty} \int_0^Y \mu(y)\,dy.$$

Su significado geométrico aparece claramente en la figura 322, a cuyo margen se ha dibujado la gráfica auxiliar de esa función $\xi = \mu(y)$.

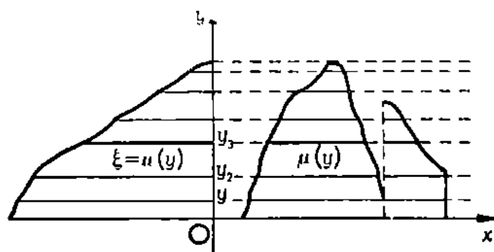


Fig. 322.

EJEMPLOS: 1. Si $f(x)$ es la función de DIRICHLET (§ 23-3, ej. 4), definida en (0, 1), la función $\xi = \mu(y)$ es nula para todo y, excepto $\mu(0) = 1$, luego su integral (L) vale 0.

2. Si $f(x) = x^{-a}$ para $0 < a < 1$ en (0, 1), resulta ser $\mu(y) = 1$ si $0 \leqslant y \leqslant 1$ y $\mu(y) = y^{-1/a}$ si $a \geqslant 1$, por lo que

$$(\mathrm{L})\int_0^1 x^{-a}\,dx = (\mathrm{R\text{-}C})\int_0^{+\infty}\mu(y)\,dy = 1 + \lim_{Y\to+\infty}\int_1^Y y^{-1/a}\,dy = \frac{1}{1-a},$$

coincidente (cfr. § 95-2, teor. 13) con el valor (R-C) de la integral del primer miembro (§ 80-1):

$$(\mathrm{R\text{-}C})\int_0^1 x^{-a}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{-a}\,dx = \frac{1}{1-a}.$$

NOTA 1. De la definición [95-1] resulta inmediatamente que si $X = X_1 + X_2$ *la integral de* $f(x)$ *sobre* X *es la suma de las integrales sobre los conjuntos medibles* X_1 *y* X_2, pues el integrando de [95-1] es la suma $\mu(y) = \mu_1(y) + \mu_2(y)$ de los integrandos correspondientes a estas integrales, por la aditividad finita (§ 94-5) de la medida de conjuntos (generalización en § 95-2, teor. 8).

Si X es de *medida infinita*, subsiste la definición [95-1], pero entonces, si *su valor es finito*, como $\mu(0) = +\infty$, la integral (R-C) será además impropia en $y = 0$, y para $\varepsilon > 0$ arbitrario, existirá $\delta > 0$ tal que (§ 80-2):

$$\int_0^\delta \mu(y)\,dy < \varepsilon \quad ,$$

con $\mu(\delta)$ finito; por tanto, *el conjunto* X *podrá descomponerse en un conjunto* X_f *de medida finita* (donde $f(x) \geqslant \delta$) *y en un conjunto medible* X_i *de medida infinita* (donde $\delta > f(x) \geqslant 0$), *tal que en él*

$$\int_{X_i} f(x)\,dx < \varepsilon \quad ,$$

siendo

$$\int_X f(x)\,dx = \int_{X_f} f(x)\,dx + \int_{X_i} f(x)\,dx.$$

b) Si la función real medible $f(x)$ toma también valores negativos en el conjunto medible X del espacio euclídeo $\mathbf{E}_m$, se adopta la siguiente definición general:

DEF. 1. Sea o no acotada, finita o infinita, la función real

medible $f(x)$, llamamos *integral* (L) en el conjunto medible X del espacio euclídeo E_m, a la integral (R-C) (§ 80-3) en $(-\infty, +\infty)$ de la función $\mu(y)$ definida así:

$$\mu(y) = \text{medida del conjunto } f(x) \geqslant y, \quad \text{si es} \quad y \geqslant 0\,;$$
$$-\mu(y) = \text{medida del conjunto } f(x) \leqslant y, \quad \text{si es} \quad y < 0\,.$$

Cuando la integral sea finita, la función se dirá *integrable* (L). Con la terminología de LEBESGUE, suele llamarse *sumable* en X. Su valor se designa por

$$(L) \int_X f(x)\,dx \quad ,$$

pudiéndose simplificar la notación hasta $\int f$ si son consabidos sin confusión los demás datos.

NOTA 2. En la definición de integral (R) es esencial la *acotación* de $f(x)$. Si ésta no es acotada, se generaliza la integral (R) mediante el paso al límite (§ 80) designándola (R-C). En cambio, la diversidad con que se presentan en muchas exposiciones de la teoría de LEBESGUE, los casos de funciones acotadas o no, desaparece con la definición 1 anterior, siendo innecesarias dos designaciones y dos notaciones.

Para $y = 0$ resultan como valores límites $\mu(0) = |X^+|$, $\mu(0^-) = -|X^-|$, llamando: X^+ al conjunto donde $f(x) \geqslant 0$; X^- al conjunto donde $f(x) < 0$. Entonces la definición 1 se reduce a [95-1], pues equivale a descomponer:

[95-2] $$(L) \int_X f\,dx = (L) \int_{X^+} f\,dx + (L) \int_{X^-} f\,dx = $$
$$= (L) \int_{X^+} |f|\,dx - (L) \int_{X^-} |f|\,dx.$$

En cambio es:

[95-3] $$(L) \int_X |f|\,dx = (L) \int_{X^+} |f|\,dx + (L) \int_{X^-} |f|\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \left| (L) \int_X f\,dx \right| .$$

NOTA 3. Obsérvese que si $f(x)$ es medible, también lo es $|f(x)|$, pero que el recíproco puede no ser cierto (§ 94-8, nota 2).

Como resumen, llegamos a este resultado importante:

TEOR. 1. *Toda función integrable lo es absolutamente; y el valor absoluto de la integral no supera a la integral del valor absoluto.*

NOTA 4. A diferencia de la integral (R-C) (§ 80-8), la integrabilidad (L) de $f(x)$ implica, pues, la de $|f(x)|$ y recíprocamente si $f(x)$

es *medible*, lo que no ocurría en la integral (R) (§ 49, ejer. 1). Hay que subrayar con énfasis este hecho: la teoría de la *sumabilidad*, o sea la integral (L), en su máxima generalidad, es paralela a la teoría de las series *absolutamente convergentes*, dejando de lado la integración *condicional*, porque prescinde del orden de los valores de $f(x)$; y la sencillez de los resultados de LEBESGUE radica en esta mutilación de la familia de funciones.

c) Integral (L) *de función acotada.* — Si $|f(x)| \leqslant K$, debe integrarse $\mu(y)$ en $(-K, +K)$, y si es finita la medida del conjunto básico $|X| = |X^+| + |X^-| = \mu(0) - \mu(0^-)$, es también finita la integral [95-1], definida en el intervalo $(-K, K)$. Por tanto

TEOR. 2. *Toda función real, medible y acotada en un conjunto* X *medible, de medida finita, acotado o no, del espacio euclídeo* E_m, *es integrable* (L).

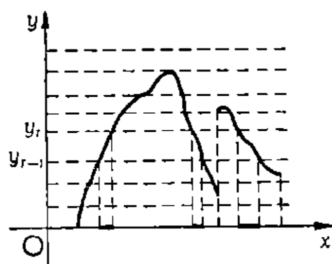


Fig. 323.

d) Método de LEBESGUE. — Aunque la teoría se desarrolla muy simplemente partiendo de la definición 1, conviene (para facilitar la lectura de los libros) exponer brevemente el método usual, más laborioso, que consiste en dividir el intervalo $(-K, +K)$ de la variable y en partes iguales o desiguales, por una escala de valores:

$$-K < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < K$$

y considerar los conjuntos X_r definidos por las acotaciones (fig. 323):

[95-4] $$y_{r-1} \leqslant f(x) < y_r$$

(es decir: $f(x) \geqslant y_{r-1}$, pero no $f(x) \geqslant y_r$),

y llamando

$$\delta_r = |X_r| = \mu(y_{r-1}) - \mu(y_r),$$

formemos las sumas de LEBESGUE

[95-5] $$s = \sum y_{r-1}\,\delta_r \quad , \quad S = \sum y_r\,\delta_r \quad ,$$

cuya diferencia, cuando la norma sea $y_r - y_{r-1} < \varepsilon$, será:

$$S - s = \sum (y_r - y_{r-1})\,\delta_r < \varepsilon \sum \delta_r = \varepsilon\,|X| \quad ,$$

es decir: si la función medible f es acotada y el conjunto X es de medida $|X|$ finita, las dos clases (s, S) son contiguas y definen un número frontera, que LEBESGUE adoptó como definición de la integral.

Para función no acotada y conjunto medible X de *medida finita*, se efectúa (VALLÉE POUSSIN) la misma descomposición [95-2] y para el caso $f(x) \geqslant 0$, se considera la *función truncada* $f_K(x)$ que valga $f(x)$ si $0 \leqslant f \leqslant K$ y valga K si $f(x) > K$. Entonces, por definición, es

[95-6] $$\int_{X^+} f(x)\,dx = \lim_{K \to +\infty} \int_{X^+} f_K(x)\,dx \quad ,$$

siempre existente, finito o infinito. Análogamente para X^-. La función $f(x)$ se llama sumable, si ambos términos del último miembro de [95-2] son finitos, dando [95-2] su valor.

EJEMPLO 3. Por este método, para la función del ejemplo 2 se encuentra

$$(L)\int_0^1 x^{-a}\,dx = \lim_{K\to+\infty}\left\{\int_0^{K^{-1/a}} K\,dx + \int_{K^{-1/a}}^1 x^{-a}\,dx\right\} = \frac{1}{1-a},$$

como antes.

e) Esta definición *d*) de LEBESGUE-VALLÉE POUSSIN coincide con la dada anteriormente, si $|X|$ es finita, pues si consideramos por ejemplo, el caso $f(x) \geqslant 0$, y la función de medida correspondiente a $f_K(x)$ es $\mu_K(y)$, coincidente con $\mu(y)$ para $y \leqslant K$ y nula para $y > K$, entonces [95-1] es igual, para $K \to \infty$, al límite de $\int_0^{K+1}\mu_K(y)\,dy$, de donde integrando por partes entre 0 y $K+1$ resulta esta integral de STIELTJES (§ 79-1):

[95-7]
$$\int_0^{K+1}\mu_K(y)\,dy = y\,.\,\mu_K(y)\Big|_0^{K+1} - \int_0^{K+1} y\,.\,d\mu_K(y) = -\int_0^{K+1} y\,d\mu_K(y),$$

ya que $\mu_K(K+1) = 0$. Las sumas inferiores y superiores del último miembro como integral de STIELTJES (§ 78-1) son las anteriores de LEBESGUE, pues

$$-\Delta\mu(y) = \mu(y_{r-1}) - \mu(y_r) = |X_r| = \delta_r.$$

Obsérvese que la def. 1 es más general que la (*d*) de VALLÉE POUSSIN, pues aquélla incluye el caso en que $|X| = +\infty$. (Cfr. § 95-2, nota 1).

2. **Propiedades de la integral (L).** — Mientras no se advierta lo contrario nos referiremos a funciones reales cualesquiera, medibles (L), acotadas o no, definidas en un conjunto medible (X), de medida finita o infinita, acotado o no.

TEOR. 1. *En cualquier conjunto de medida nula, toda función medible es integrable* (L) *con integral de valor nulo.*

Pues en § 95-1, def. 1, es $\mu(y) \equiv 0$ (§ 94-3, M_2).

TEOR. 2. *La función característica* $\varphi_X(x)$ (§ 94-1, def. 1) *de un conjunto medible* X *tiene por integral* (L) *en todo conjunto* $A(\geqq)X$:

[95-8]
$$(L)\int_A \varphi_X(x)\,dx = |X|.$$

Pues aplicada al primer miembro de [95-8] la definición [95-1] resulta $\mu(y) = 0$ si $y > 1$, $\mu(y) = |X|$ si $0 \leqslant y \leqslant 1$, de donde

$$(L)\int_A \varphi_X(x)\,dx = (R\text{-}C)\int_0^{+\infty}\mu(y)\,dy = (R)\int_0^1 |X|\,dy = |X|.$$

TEOR. 3. *Si c es constante y* f *integrable, también lo es cf y se tiene*:

[95-9]
$$\int_X cf(x)\,dx = c\int_X f(x)\,dx.$$

Pues para $c > 0$, la función de medida $\mu_c(y)$ de cf (§ 95-1, def. 1) en X^+, se relaciona a la $\mu(y)$ de f mediante $\mu_c(y) = \mu(y/c)$, de donde, por [95-1] es

$$\int_{X^+} cf\,dx = \int_0^{+\infty} \mu_c(y)\,dy = \int_0^{+\infty} \mu(y/c)\,dy =$$
$$= c\int_0^{+\infty} \mu(y)\,dy = c\int_{X^+} f(x)\,dx.$$

Análogamente para X^- y para el caso $c \leqslant 0$.

TEOR. 4. (MONOTONÍA). — *Si* $f(x)$ *es medible y está comprendida en* X *entre las funciones integrables* $g(x)$ *y* $G(x)$, *es decir*: $g(x) \leqslant f(x) \leqslant G(x)$ *para todo* x *de* X, *es* $f(x)$ *integrable y se verifica* $\int g \leqslant \int f \leqslant \int G$. En efecto, para $y \geqslant 0$, las respectivas funciones de medida (§ 95-1, def. 1) son $m(y) \leqslant \mu(y) \leqslant M(y)$ porque la sección de f contiene la de g y está contenida en la de G (§ 94-3, M_2), luego igual acotación existe entre las respectivas integrales [95-1]. Lo mismo sucede en X^-, pero en sentido contrario; y como figuran con signo —, subsiste el resultado. Corolario de los teor. 3 y 4 es:

TEOR. 5. PRIMER TEOREMA DEL VALOR MEDIO. — *Si* $k \leqslant f(x) \leqslant K$ *y* $\varphi(x) \geqslant 0$, *se verifica*:

[95-10] $$k\int_X \varphi(x)\,dx \leqslant \int_X f(x)\varphi(x)\,dx \leqslant K\int_X \varphi(x)\,dx \quad ,$$

si existen ambas integrales. Luego la integral del producto $f(x)\varphi(x)$ *es igual a la de* $\varphi(x)$ *por un factor intermedio entre* k *y* K.

En particular, si $\varphi(x) \equiv 1$, resulta

COROL. *Si la función integrable* $f(x)$ *está comprendida entre las cotas* k *y* K, *su integral en* X *de medida finita, está acotada entre* $k\,|X|$ *y* $K\,|X|$.

Otra consecuencia inmediata de § 95-1, teor. 1, es ésta:

TEOR. 6. *Si* $f(x)$ *es medible y en valor absoluto se conserva inferior a una función integrable* $G(x) \geqslant 0$ *sobre un conjunto medible* X, *también* f *es integrable, y se verifica*:

[95-11] $$\left|\int_X f(x)\,dx\right| \leqslant \int_X |f(x)|\,dx \leqslant \int_X G(x)\,dx.$$

Recuérdense las notas 3 y 4 de § 95-1.

La propiedad evidente para las funciones acotadas, de tener valor arbitrariamente pequeño su integral (R, o bien L) sobre conjunto de medida suficientemente pequeña, y que en la integral (R-C) de función no acotada es consecuencia de la definición como límite, tiene en la integral (L) este alcance más general:

TEOR. 7. *Si* f(x) *es integrable* (L) *en* X, *y es* X_r *una sucesión de conjuntos contenidos en* X, *tales que* $|X_r| \to 0$, *también tienden a* 0 *las respectivas integrales sobre estos conjuntos.*

Basta demostrarlo para $f(x) \geqslant 0$, y sea $f_K(x)$ la función truncada correspondiente a la cota K (§ 95-1, *d*). Por [95-6] y § 95-1, *e*, a todo número $\varepsilon > 0$ corresponde un $K = K(\varepsilon)$, tal que

$$\int_{X^+} f dx - \int_{X^+} f_K dx < \varepsilon \quad .$$

Para este K *fijo*, del teor. 5, corol., y de la hipótesis, se deduce que existe un $r_0 = r_0(\varepsilon, K(\varepsilon)) = r_0(\varepsilon)$, tal que para todo $r > r_0$ sea

$$\int_{X_r^+} f_K dx \leqslant K |X_r^+| < \varepsilon.$$

Por tanto (§ 95-1, nota 1):

$$\int_{X_r^+} f\, dx \leqslant \int_{X_r^+} f_K\, dx + \int_{X_r^+} f\, dx - \int_{X_r^+} f_K\, dx +$$

$$+ \left(\int_{X^+ - X_r^+} f\, dx - \int_{X^+ - X_r^+} f_K\, dx \right) =$$

$$= \int_{X_r^+} f_K\, dx + \left(\int_{X^+} f\, dx - \int_{X^+} f_K\, dx \right) < 2\varepsilon$$

para todo $r > r_0(\varepsilon)$, como queríamos demostrar.

TEOR. 8. *La integral* (L) *como función de su conjunto de definición es infinitamente aditiva.* Es decir: *Si* f(x) *es integrable en* $X = \Sigma X_r$ *(suma finita o serie indefinida de* X_r *disjuntos dos a dos), la integral sobre* X *es la suma de las integrales sobre los* X_r.

DEM. Si la suma es finita, la integral [95-1] tiene el integrando $\mu(y) = \Sigma\mu_r(y)$, luego se descompone en suma de integrales, de acuerdo con el enunciado. Si la descomposición es infinita, siendo $|X|$ finita, en la serie $\Sigma |X_r| = |X|$ (§ 94-5, teor. 2), se toma una suma parcial Σ_n suficientemente grande para que el resto sea $< \varepsilon$, y entonces, de la descomposición $X = \Sigma_n X_r + X_0$, resulta ser la integral sobre X_0 (que tiende a cero para $n \to \infty$ según teor. 7) la diferencia entre la integral sobre X y la suma de las integrales sobre los X_r, es decir la convergencia del enunciado.

Si f(x) es integrable en el conjunto medible X de medida infinita, basta suponer $f(x) \geqslant 0$, y aplicando la descomposición de § 95-1, nota 1, es decir $X = X_f + X_i = \Sigma X_r$, si se designa por $X_r' = X_f \frown X_r$, $X_r^i = X_i \frown X_r$, se tendrá (§ 94-3, M_2) para cada suma parcial

$$\sum_{r=1}^{n} \int_{X_r i} = \int_{\Sigma_r X_r i} \leqslant \int_{X_i} < \varepsilon$$

y como, al ser $|X_i|$ finita, por lo anterior es

$$\int_{X_i} = \Sigma \int_{X_r i} ,$$

en definitiva resultará:

$$\int_X - \sum_{r=1}^{n} \int_{X_r} = \int_X - \int_{X_i} + \sum_{r=1}^{\infty} \int_{X_r i} - \sum_{r=1}^{n} \int_{X_r} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{X_i} + \sum_{r=n+1}^{\infty} \int_{X_r i} < 2\varepsilon \quad ,$$

que por la arbitrariedad de $\varepsilon (\to 0)$, justifica la anulación del primer miembro, como queríamos demostrar.

NOTA 1. Si es infinita $|X| = +\infty$, podrá siempre descomponerse X en sumandos X_r disjuntos de medida $|X_r|$ finita (§ 94-6, nota 5) y el teor. 8 asegura que la suma (convergente o no) de las integrales sobre los X_r será independiente de la descomposición de X; entonces podrá tomarse a dicha suma como generalización de la integral de LEBESGUE-VALLÉE POUSSIN para el caso donde también pueda ser $|X| = +\infty$, ya incluído también en § 95-1, definición 1, que da un concepto coincidente con el de esta generalización (teor. 8).

TEOR. 9. *Si es nula la integral de* $f(x) \geqslant 0$, *es* $f(x) = 0$, *salvo a lo sumo en un conjunto de medida nula.*

Pues sólo siendo $\mu(y) = 0$ para todo $y > 0$ puede ser nula la integral [95-1] de función decreciente.

TEOR. 10. *Si* $f(x)$ *es integrable en un conjunto medible* X, *entonces tiene medida nula el conjunto de puntos de* X *donde* $f(x) = +\infty$.

Éste es medible, como intersección (§ 94-5, teor. 3) de todos los $f(x) \geqslant k$; y si su medida fuera $m > 0$, la integral [95-1] en X^+, de integrando $\mu(y) \geqslant m$ para todo y, sería divergente (§ 80-2).

NOTA 2. Indicaremos que una propiedad se verifica con la posible excepción de un conjunto de medida nula de X, diciendo que se verifica en *casi todo* X (abreviadamente: c. t. X) o en casi todos los puntos de X; tal nomenclatura es traducción de la original de LEBESGUE: *presque partout* (p. p.) que muchos autores emplean sin traducir. Así, pues, la conclusión del teor. 9 puede expresarse diciendo que $f(x) = 0$ en casi todo X, mientras que la del teor. 10 diría que $f(x)$ es finita en casi todo X.

DEF. Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se dirán *casi iguales* en X (o *equivalentes* (L) en X) si se cumple $f(x) = g(x)$ en c. t. X.

TEOR. 11. *Si* $f(x)$ *es integrable en* X *y* $g(x)$ *es casi igual*

a f(x) *en* X, *entonces* g(x) *es integrable y su integral coincide con la de* f.

Pues, llamando X_0 al conjunto de medida nula donde puedan dejar de ser iguales f(x) y g(x), $X_f{}^y$ al conjunto donde f $\geqslant y$, $X_g{}^y$ aquel donde g $\geqslant y$, resulta medible (§ 94-5) $X_g{}^y = X_0 \,.\, X_g{}^y + (X - X_0) \,.\, X_f{}^y$, por ser el primer sumando de medida nula (§ 94-3, M_2, y § 94-4, teor. 3), siendo por tanto g(x) medible (§ 94-8, def. 1). Por otra parte, es (teor. 1 y 8):

$$\int_X f\,dx = \int_{X_0} f\,dx + \int_{X-X_0} f\,dx = \int_{X_0} g\,dx +$$

$$+ \int_{X-X_0} g\,dx = \int_X g\,dx \quad ,$$

por ser nulos los primeros sumandos de los miembros intermedios y ser iguales los integrandos de los segundos sumandos.

TEOR. 12. COMPARACIÓN CON LA INTEGRAL (R). — *Es integrable* (L) *toda función acotada integrable* (R) *en un intervalo finito* I; *y ambas integrales coinciden.*

Si f(x) es integrable (R), entonces es medible (L) (§ 94-8, teor. 3). Siendo medible y acotada f(x) admite integral (L) (§ 95-1, teor. 2) en cada intervalo parcial I_r de I, y con la notación de § 82-1 (o de § 83-1), el valor de esta integral estará comprendida entre $m_r\delta_r$ y $M_r\delta_r$ (teor. 5, corol.), luego, según teor. 8, la integral (L) en I está comprendida entre las sumas inferior s y superior S de RIEMANN; por tanto (§ 7-6) dicho valor (L) coincide con el de la integral (R).

EJEMPLO 1. Un caso trivial de función integrable (L) y no (R) es la de DIRICHLET (§ 95-1, ejemplo 1; § 49-2, ejemplo).

TEOR. 13. COMPARACIÓN CON LA INTEGRAL (R-C). — *Es integrable* (L) *toda función medible definida en el espacio euclídeo* E_m *cuya integral impropia* (R-C) *sea absolutamente convergente* (§§ 80-8 y 87-2); *y ambas integrales coinciden.*

Pues los dominios D_n, supuestos en sucesión monótona (§ 87-1, *c*) que definen por paso al límite la integral (R-C) en [87-1] son medibles (§ 94-5, teor. 5, y § 94-4, teor. 2) y en ellos f(x) es medible (§ 94-8, teor. 3). Entonces, la integral (R-C) tiene por valor la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{D_n - D_{n-1}} f(x)\,dx \quad ,$$

cada uno de cuyos términos es integral (R) coincidente con la (L) (teor. 12), y por ser la serie *absolutamente convergente*, su suma representará la integral (L) de f(x) en E_m (nota 1).

NOTAS: 3. En cambio, una integral (R-C) sólo condicionalmente convergente (§§ 80 y 87) no podrá ser una integral (L) (§ 95-1, nota 4).

4. Como ocurre con la integral (R-C) absolutamente convergente, si $f_1(x)$ es integrable (L), no equivalente a una función acotada en X, existe siempre una función $f_2(x)$ integrable (L) en X, tal que el *producto* $f_1(x) \, . \, f_2(x)$ *no es integrable* (L) *en* X.

EJEMPLOS: 2. En § 95-1, ejemplos 2 y 3, se han visto los distintos modos de calcular una integral (R-C) absolutamente convergente por los métodos de CAUCHY, [95-1] y de LEBESGUE - VALLÉE POUSSIN.

3. Sea en E_1:

$$f(0) = 0 \quad ; \quad f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{x^2}\right) = 2x \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{x^2}$$

en $x \neq 0$, cuyo primer término es acotado e integrable (L) en todo intervalo finito, mientras que en el segundo término los valores $x = 2/\sqrt{2n-1}$ dan ordenadas que forman serie armónica divergente (§ 22-1, *d*), luego (§ 95-1, nota 4) al no serlo $|f(x)|$, tampoco $f(x)$ es integrable en ningún intervalo finito que contenga 0 en su interior o en un extremo. En cambio, existe la integral (§ 80-3):

$$(\text{R-C}) \int_0^x f \, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^x f \, dx = x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{x^2} \, .$$

NOTAS: 5. Comparando con los textos más acreditados de otras lenguas, obsérvese la sencillez alcanzada en las demostraciones anteriores, aún en el caso más general de función no acotada y conjunto de definición medible cualquiera, a causa de poder utilizar las propiedades de la integral (R-C) de [95-1] para el estudio de la teoría de la integral de LEBESGUE. La definición (§ 95-1, *b*) que ha permitido esta simplificación, ha sido originariamente expuesta en J. REY PASTOR: *Elementos de la Teoría de Funciones* (3ª ed. Ibero-Americana, Madrid-Buenos Aires, 1953; íd. 1ª ed., 1947), cuya exposición hemos procurado afinar y completar aquí.

6. La propiedad de aditividad finita respecto del integrando de la integral (L) que con el teor. 3 de distributividad, justifica la linealidad de la integral (L), es punto de delicada demostración que parece oportuno hacer preceder por el estudio de las funciones escalonadas en E_m, por otra parte de gran interés intrínseco.

3. Funciones escalonadas en E_m y linealidad de la integral (L). — *a*) Obsérvese el parecido entre las sumas *s* y S de LEBESGUE y las *s* y S de RIEMANN; la diferencia es: en éstas se fracciona el intervalo básico X en número finito de intervalos (ordenados por sus abscisas si el espacio es E_1), y en la (L) se fracciona X en número finito de conjuntos medibles, ordenados por sus alturas; y por eso quedan excluídas las funciones condicionalmente integrables, como también acontece en el método (R) para E_m $(m > 1)$ *. Hagamos ahora resaltar la

* Este carácter absoluto de la integral sobre E_2, E_3, ..., no significa deficiencia del método (R); es natural derivación de no existir una ordenación natural del espacio, mientras que en E_1 la hay y es soslayada por el método (L); el cual es insustituible en los demás espacios, hasta los más abstractos, donde se puede organizar una teoría de la medida (como hizo HAAR).

esencia común de ambos métodos, mediante un concepto muy general, de frecuente uso en Análisis:

DEF. 1. Función *escalonada* sobre el espacio $\mathbf{E}_m$ es la que tiene valor constante y_i en cada uno de los conjuntos medibles X_i en que se fracciona $\mathbf{E}_m = \Sigma X_i$ (a lo más *numerable*). Si la función escalonada $E(x)$ está definida solamente en $X(\leqq)\mathbf{E}_m$ puede completarse su definición, atribuyéndole valor 0 en el conjunto complementario.

DEF. 2. La función escalonada $E(x)$ se dirá *finita*, cuando es finito el número de sus valores o *escalones* y_i, es decir, cuando el fraccionamiento de $\mathbf{E}_m$ es finito. La escalonada finita más sencilla sobre X es la función característica de X (§ 94-1, def. 1).

DEF. 3. La función escalonada $E(x)$ se dirá *infinita*, cuando es infinito numerable el número de sus valores y_i, es decir, cuando la partición de $\mathbf{E}_m$ es infinita numerable.

Bien sea directamente de la definición de § 95-1 de integral, o de su interpretación geométrica, como medida del conjunto de ordenadas, resulta inmediatamente:

TEOR. 1. *La integral de la función escalonada de bases* X_i *y valores* y_i *es la suma de productos de éstos por las correspondientes* $|X_i|$, es decir:

[95-12] $$\int_X E(x)dx = \int_{\mathbf{E}_m} E(x)dx = \Sigma y_i \cdot |X_i| \quad ,$$

debiendo ser *absolutamente convergente* esta serie, en el caso de función escalonada infinita, para que ésta sea *integrable*.

En el caso más simple de escalonada finita se tiene el teor. 2 de § 95-2. Todo teorema sobre la integral da otro sobre la medida de conjuntos.

Dos funciones escalonadas $y' = E'(x)$, $y'' = E''(x)$ sobre las particiones $\mathbf{E}_m = \Sigma X_i'$ y $\mathbf{E}_m = \Sigma X_i''$, definen otra escalonada sobre la partición producto $\mathbf{E}_m = \Sigma X_{ij}$ donde es $X_{ij} = X_i' \cdot X_j''$, si la función toma en cada X_{ij} el valor $y_i' + y_j''$, siendo, por tanto:

$$\int [E'(x) + E''(x)]dx = \Sigma(y_i' + y_j'')|X_{ij}| =$$
$$= \int E'(x)dx + \int E''(x)dx \quad ,$$

es decir:

TEOR. 2. *La suma de escalonadas, en número finito, es una escalonada cuya integral es la suma de las integrales de aquéllas.*

b) Linealidad de la integral. — Vimos (§ 94-8, teor. 4, *c*) que si $f'(x)$ y $f''(x)$ son medibles, también lo es $f'(x) + f''(x)$. Veamos ahora su integrabilidad.

Nos apoyaremos en la propiedad aditiva de las escalonadas; concepto introducido precisamente para facilitar esta demostración, pero que tiene interés en otras cuestiones, sobre la cual basan entre otros VITALI y SANSONE (citado en Cap. IX, nota VIII, 3), HALMOS o MUNROE (citados en nota IV-4) toda la teoría de integración.

Si las funciones $f'(x)$ y $f''(x)$ acotadas en X de medida finita, están comprendidas entre escalonadas de valores y_r (§ 95-1, *d*):

$$e'(x) \leqslant f'(x) \leqslant E'(x), \text{ de donde } \sum y_{i-1}\delta_i \leqslant \int f'(x)dx \leqslant \sum y_i \delta_i \ ,$$

$$e''(x) \leqslant f''(x) \leqslant E''(x), \quad \text{,,} \quad \sum y_{j-1}\delta_j \leqslant \int f''(x)dx \leqslant \sum y_j \delta_j \ ;$$

que dan acotaciones de las integrales sumandos difiriendo en menos de ε, para integrar la acotación suma:

$$e'(x) + e''(x) \leqslant f'(x) + f''(x) \leqslant E'(x) + E''(x) \ ,$$

formaremos la partición producto, llamando $X_r = X_{ij} = X_i \frown X_j$, es decir, ordenaremos los conjuntos intersecciones, y la integral de la suma está definida por las acotaciones:

$$\sum (y'_{r-1} + y''_{r-1})\,\delta_r \leqslant \int [f'(x) + f''(x)]dx \leqslant \sum (y'_r + y''_r)\,\delta_r \ ,$$

que al diferir en menos de 2ε, prueban (§ 95-1, *d*) que la integral (L) de la suma coincide con la suma de las dos integrales.

Si las funciones sumandos $f'(x)$ y $f''(x)$ no están acotadas, pero son integrables en X medible de medida finita, demostremos primero la aditividad en el conjunto X^+ donde a la vez es $f' \geqslant 0$ y $f'' \geqslant 0$. Si es $S(x) = f'(x) + f''(x)$, consideremos las funciones truncadas (§ 95-1 *d*):

$$S_K(x) \leqslant f'_K(x) + f''_K(x) \leqslant S_{2K}(x) \ ,$$

y por el caso de acotación:

$$\int_{X^+} S_K\, dx \leqslant \int_{X^+} f'_K\, dx + \int_{X^+} f''_K\, dx \leqslant \int_{X^+} S_{2K}\, dx \ ,$$

que para $K \to +\infty$, demuestra por [95-6] la aditividad en X^+. En el conjunto donde $f' \geqslant 0$ y $f'' < 0$, se considera por una parte el subconjunto donde $S = f' + f'' \geqslant 0$ y se aplica el caso anterior para $f' = S + (-f'')$, y por otra parte el subconjunto donde $S < 0$, poniendo $-f'' = f' + (-S)$. Análogamente se tratan los casos $f' < 0$ y $f'' \geqslant 0$ ó $f' < 0$ y $f'' < 0$. Si X es de medida infinita, se descompone en conjuntos sumandos de medida finita y en definitiva por aplicación de § 95-2, teor. 8 (nota 1), queda demostrada la propiedad aditiva respecto del integrando, que se extiende inductivamente (§ 2-2) a cualquier número finito de sumandos, dando:

TEOR. 3. *La suma de funciones integrables, en número finito, es también integrable, y su integral es la suma de las integrales de los sumandos.*

El caso de infinitos sumandos (serie convergente) se tratará en § 95-4. Del teor. 3 y de la distributividad vista en teor. 3 de § 95-2, resulta la linealidad de la integral, expresada así:

[95-13] $$\int_X \sum c_r\, f_r(x)\, dx = \sum c_r \int_X f_r(x)\, dx.$$

4. **Teoremas de convergencia.** — He aquí el punto culminante de la teoría de LEBESGUE, porque permite la permutación del signo de integral con el límite (cfr. §§ 94-1 y 85-1), sin más restricción que la *acotación uniforme* del integrando entre dos funciones integrables, o bien la acotación del módulo respecto de una función integrable.

La *uniformidad de la acotación* con que LEBESGUE sustituye la *uniformidad de la convergencia* (§ 85-1), se transforma en esta misma atenuada mediante la exclusión de un conjunto de medida arbitrariamente pequeña; y esta parte de la demostración, desglosada por su utilidad para otras cuestiones, constituye esta proposición:

TEOR. 1. (LEMA DE EGOROFF). *Si una sucesión de funciones medibles* $f_n(x)$ *converge hacia un límite finito* $f(x)$ *en casi todo un conjunto* X (§ 95-2, nota 2) *de medida finita, entonces existe en* X *un subconjunto* X_δ *de medida menor que un número prefijado arbitrario* $\delta > 0$ *tal que en* $X - X_\delta$ *es uniforme la convergencia de* f_n *hacia* f.

DEM. Si $f_n(x) \to f(x)$, medible (§ 94-8, teor. 7) en $X - X_0$ con $|X_0| = 0$, será medible (§ 94-8, teor. 4) la función $g_n(x) = |f(x) - f_n(x)| \to 0$ para x de $X - X_0$. Por definición de convergencia ordinaria, para s número natural cualquiera, es $g_n(x) < 1/s$ si $n > r(x, s)$. Agrupemos en el conjunto medible (§ 94-8, teor. 1) $X_r^s (\leqq) X - X_0$ los puntos x donde se verifiquen las anteriores desigualdades para s y r números naturales dados.

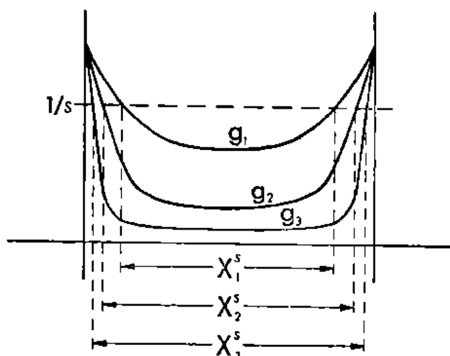


Fig. 324.

Como evidentemente es (fig. 324)

$$X_1^s (\leqq) X_2^s (\leqq) \ldots (\leqq) X_r^s (\leqq) \ldots (\leqq) X - X_0 \quad ,$$

siendo $X - X_0$ la unión de todos los X_r^s (s fijo, $r = 1, 2, \ldots$), será (§ 94-5, teor. 2) $\lim |X_r^s| = |X - X_0|$ para $r \to \infty$, y por tanto existe $r = r(s)$ tal que $|(X - X_0) - X^s_{r(s)}| < \delta/2^s$.

Sobre la intersección medible (§ 94-5, teor. 3) de todos los $X^s_{r(s)}$ para $s = 1, 2, 3, \ldots$, es $g_n(x) < 1/s$, si $n > r(s)$ *cualquiera que sea el punto* x tomado en dicha intersección, es decir, en ella la convergencia es *uniforme* y su complemento X_δ a X tiene por medida

$$|X_\delta| = |X - \cap_s X^s_{r(s)}| = |(X - X_0) - \cap_s X^s_{r(s)}| =$$
$$= |\cup_s [(X - X_0) - X^s_{r(s)}]| \leqslant$$
$$\leqslant \Sigma_s |(X - X_0) - X^s_{r(s)}| < \Sigma_s \delta/2^s = \delta \quad ,$$

como queríamos demostrar.

NOTAS: 1. El lema falla para funciones no medibles (§ 94-7) o para X de medida infinita.

2. En este lema se hace referencia a cuatro tipos de convergencia. Ellos son: la convergencia ordinaria o *puntual* $g_n(x) \to 0$ en $X - X_0$, la convergencia puntual $g_n(x) \to 0$ en c. t. X (al ser $|X_0| = 0$, § 95-2, nota 2), la convergencia uniforme $g_n(x) \to 0$ en $X - X_\delta$, y la que podemos llamar (WEYL) *convergencia esencialmente uniforme* $g_n(x) \to 0$ en X (al ser X_δ de medida $\delta > 0$ arbitrariamente pequeña). En casi todos los textos a este último tipo de convergencia, se le llama menos acertadamente "convergencia casi uniforme en X" que puede confundirse con convergencia uniforme en c. t. X (es decir, uniforme en $X - X_0$ con $|X_0| = 0$).

Con esta nomenclatura, el lema de EGOROFF dice que la convergencia puntual de las funciones medibles $f_n(x) \to f(x)$ en c. t. X de *medida finita,* implica la convergencia esencialmente uniforme en X.

Se usan las abreviaturas: $g_n(x) \to 0$ con

[c. p. en $X - X_0$] , [c. p. en c. t. X] , [c. u. en $X - X_\delta$] ,
[c. e. u. en X].

TEOR. 2. (LEBESGUE). *Si en una familia de funciones medibles, acotadas entre dos funciones integrables* $g(x)$ y $G(x)$ *sobre un conjunto* X *de medida finita o infinita y, por tanto* (§ 95-2, teor. 4), *integrables en* X, *se verifica* $f_n(x) \to f(x)$, *es también*

$$\int_X f_n(x)\,dx \to \int_X f(x)\,dx.$$

DEM. Para probar la convergencia del resto hacia 0, supuesto X de medida finita, haremos la descomposición del lema:

$$\int_X [f_n(x) - f(x)]dx = \int_{X-X_\delta} [f_n(x) - f(x)]dx +$$
$$+ \int_{X_\delta} f_n(x)\,dx - \int_{X_\delta} f(x)\,dx.$$

El sumando 1º, en virtud del lema, tiene valor absoluto $< \varepsilon$ desde un n_0; el 2º y el 3º, por § 95-2, teor. 4, están acotados entre las integrales de g y G sobre el conjunto X_δ, cuya medida puede hacerse tender a 0; luego, por 95-2, teor. 7, desde un δ en adelante, son menores que ε. Siendo, pues, el resto $< 3\varepsilon$ desde n_0, resulta la convergencia del enunciado.

Si X es de medida infinita, siendo $|G(x)|$ y $|g(x)|$ integrables en X (§ 95-1, teor. 1), dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, se po-

drá descomponer $X = X_f + X_i$ de modo que el conjunto medible X_f sea de medida finita y en X_i medible valga

$$\int_{X_i} (|G(x)| + |g(x)|)dx < \varepsilon$$

(§ 95-1, nota 1). Entonces, para todo n será también:

$$\left|\int_{X_i} [f_n(x) - f(x)]dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{X_i} (|f_n| + |f|)dx \leqslant 2 \int_{X_i} (|G| + |g|)dx < 2\varepsilon \quad ,$$

aplicándose para X_f de medida finita el razonamiento ya expuesto.

NOTA 3. Como corolario de teor. 2 resulta de nuevo la aditividad respecto del conjunto básico (§ 95-2, teor. 8). En efecto, suponiendo, en virtud de [95-2] $f(x) \geqslant 0$, las funciones $f_r(x) = f(x)$ en X_r y nulas en el complemento, todas las sumas parciales de $\sum f_r = f$, están comprendidas entre f_0 y f; luego son integrables, según § 95-2, teor. 4, y por teor. 2, se verifica:

$$\int_X f = \Sigma \int_X f_r = \Sigma \int_{X_r} f.$$

TEOR. 3. (FATOU). *Si* $f_n(x) \geqslant 0$ *son medibles en* X *medible, donde* $f(x)$ *es también medible, cumpliendo*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$$

en casi todo X, *entonces es*

[95-14] $$\int_X f(x)dx \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dx \quad ,$$

en el sentido de que si el segundo miembro es finito, entonces $f(x)$ *es finito en casi todo* X *e integrable, mientras que si* $f(x)$ *no es integrable en* X, *entonces es*

[95-15] $$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dx = +\infty .$$

DEM. Supuesta $|X|$ finita, basta utilizar las respectivas funciones truncadas (§ 95-1, *d*) cumpliendo:

$$0 \leqslant f_K \leqslant \underline{\lim}_{n} (f_n)_K \quad .$$

Entonces, para todo x es $0 \leqslant y_n(x) = \inf_{m\geqslant n} (f_m)_K \leqslant (f_n)_K \leqslant K$, por lo que y_n será integrable cumpliendo $\underline{\lim}_n \int_X y_n dx \leqslant \underline{\lim} \int_X (f_n)_K dx$; como para cada x fijo la sucesión y_n es creciente (en sentido amplio), existirá el $\lim_n y_n(x) = \underline{\lim}_n (f_n)_K \geqslant f_K(x)$, por lo que podemos aplicar teor. 2 con $g \equiv 0$ y $G \equiv K$, dando

$$\int_X f_K dx \leqslant \int_X (\lim_n y_n) dx = \lim_n \int_X y_n dx \leqslant$$

$$\leqslant \underline{\lim}_{n} \int_X (f_n)_K dx \leqslant \underline{\lim}_{n} \int_X f_n dx.$$

Si $f(x)$ es finita en c. t. X, se deduce [95-14] de la anterior, haciendo $K \to +\infty$. Si $f(x) = +\infty$ en un conjunto X_1 de medida positiva $|X_1| > 0$, entonces

$$\int_X f_K \, dx \geqslant K \cdot |X_1|$$

y se obtiene [95-15].

Si $|X| = +\infty$ y $f(x)$ no es integrable en X, se obtiene [95-15]. En efecto, si fuese

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x) \, dx$$

finito, descomponiendo X en una suma numerable de conjuntos medibles disjuntos X_r de medida finita (§ 95-2, nota 1), por el caso anterior existirá y será

$$\int_{X_r} f \, dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_{X_r} f_n \, dx \quad ,$$

y por tanto para cada suma parcial (§ 21, ejercicio 12) resultará:

$$\Sigma_r \int_{X_r} f \, dx \leqslant \Sigma_r \varliminf_{n\to\infty} \int_{X_r} f_n \, dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \Sigma_r \int_{X_r} f_n \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, dx$$

finito, es decir (§ 95-2, nota 1) sería $f(x)$ integrable en X.

Si $f(x)$ es integrable en X de medida infinita, se aplica la descomposición de § 95-1, nota 1, y por ser $|X_t|$ finita:

$$\int_{X_t} f dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_{X_t} f_n dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n dx$$

y como además $\int_{X_i} f dx < \varepsilon$, de estas dos resulta:

$$\int_{X_t} f dx + \int_{X_i} f dx = \int_X f dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n dx + \varepsilon \quad ,$$

que justifica [95-14] por la arbitrariedad de $\varepsilon \to 0$. •

La acotación de FATOU es muy útil en diversas cuestiones de Análisis cuando por no disponerse de la acotación uniforme (teor. 2) no puede asegurarse la convergencia de las integrales.

TEOR. 4. (BEPPO LEVI). *Sea* $f(x)$ *el límite finito o infinito de la sucesión creciente*

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots$$

de funciones medibles no negativas en un conjunto medible X. *Entonces es*:

$$[95\text{-}16] \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) \, dx = \int_X f(x) \, dx$$

en el sentido:

1º) *Si el primer miembro es finito, entonces* $f(x)$ *es finito en* c. t. X (§ 95-2, nota 2) *y es integrable, cumpliendo* [95-16].

2º) *Si* $f(x)$ *es integrable, el primer miembro de* [95-16] *es convergente y se cumple la igualdad.*

3º) *Si el primer miembro de* [95-16] *es infinito,* $f(x)$ *no es integrable y recíprocamente.*

DEM. Si el primer miembro de [95-16] es finito, entonces por el teor. 3 de FATOU es $f(x)$ integrable, y por el teor. 2 de LEBESGUE quedan demostrados los casos 1º (§ 95-2, teor. 10) y 2º. De estos dos, se deduce por exclusión el caso 3º. Corolario inmediato es:

TEOR. 5. *Si* $u_n(x) \geqslant 0$ *es medible para todo* n *y punto* x *perteneciente a un conjunto medible* X, *entonces es*

$$[95\text{-}17] \qquad \int_X \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X u_n(x)\, dx \quad ,$$

si uno de los dos miembros existe. En particular, la convergencia del segundo miembro implica la convergencia de la serie $\Sigma u_n(x)$ *en* c. t. X.

NOTAS: 4. Obsérvese la extraordinaria simplicidad del paso al límite bajo el signo integral obtenido en los teor. 4 y 5 para la integral de LEBESGUE y compárese con las limitaciones requeridas en la integral de RIEMANN e ilustradas en el ejemplo de § 85-1, nota 2.

5. El teorema 4 fué enunciado y demostrado por B. LEVI (1906) antes que H. LEBESGUE (1910) dedujera el teor. 2 y en otras exposiciones (tal la excelente de F. RIESZ y B. S. NAGY, ver nota IV, 4) el de LEBESGUE se deduce del de B. LEVI, siendo ambos en realidad equivalentes.

EJEMPLOS: 1. Sea en $(0,1)$ de E_1 la sucesión de funciones acotadas (*no uniformemente acotadas* en su conjunto):

$$f_n(x) = nx^{n-1} \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

con $\lim f_n(x) = f(x) \equiv 0$ para $n \to \infty$.

Entonces, será:

$$0 = \int_0^1 f\, dx = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n)\, dx < \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\, dx = 1 \quad ,$$

que no cumple los teor. 2 (LEBESGUE) y 4 (BEPPO LEVI), pero sí el 3 (FATOU).

2. Sea en $(0,1)$ de E_1 la sucesión de funciones

$$f_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

dando (§ 37-4):

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} [1 - (n+1)x^n] = 1$$

y resulta

$$1 = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} S_n)\, dx = \int_0^1 (\sum_{n=1}^{\infty} f_n)\, dx > \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 S_n\, dx = 0 \quad ,$$

que no cumple el teor. 2 (LEBESGUE), pero tampoco el 3 (FATOU), pues las $S_n(x)$ cambian de signo en $(0,1)$.

3. Sea en E_1 la sucesión *decreciente* de funciones *medibles*, no negativas tales que $f_n(x) = 1$ si $x > n$ y nulas en $x \leqslant n$. Para éstas es $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \equiv 0$ y por tanto

$$0 = \int_0^\infty f\,dx = \int_0^\infty (\lim_{n\to\infty} f_n)dx < \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n\,dx =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_n^\infty dx = +\infty.$$

No se cumple el teor. 4 (B. LEVI), pero sí el 3 (FATOU).

Obsérvese que las $f_n(x)$ *no son integrables*. Demuéstrese que el paso al límite [95-16] es también cierto para una sucesión *decreciente* de funciones *integrables* no-negativas. Para una sucesión creciente de funciones no-negativas bastaba que fuesen medibles.

Por el teor. 2 (LEBESGUE), si la sucesión de funciones medibles no-negativas $f_n(x) \geqslant 0$ está uniformemente acotada en el conjunto medible X por una función integrable y además $f_n(x) \to 0$ en c. t. X, entonces $\int_X f_n\,dx \to 0$.

El *recíproco no es cierto* (cfr. ejemplo 4), a pesar de § 95-2, teor. 9; tal se muestra en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 4. Si dividimos el intervalo $[0,1]$ de E_1, en 2, 3, 4, ... partes iguales y consideramos la sucesión de funciones características (§ 94-1, def. 1) $f_n(x)$ de los intervalos $I_1 = [0,1/2]$, $I_2 = [1/2,1]$, $I_3 = [0,1/3]$, $I_4 = [1/3,2/3]$, $I_5 = [2/3,1]$, $I_6 = [0,1/4]$, ..., será

$$\int_0^1 f_n\,dx = |I_n| \to 0$$

y en *ningún* punto de $[0,1]$ tiende a cero $f_n(x)$ para $n\to\infty$.

NOTA 6. Además de los tipos de convergencia examinados en la nota 2, puede considerarse también la *convergencia en medida*:

Se dirá que la sucesión $f_n(x)$ tiende en medida a $f(x)$ sobre X si para cada $\varepsilon > 0$ fijo, tiende a cero con $1/n$ la medida $\mu_n(\varepsilon)$ del conjunto de puntos x de X donde $|f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon$.

En el ejemplo 4, si bien los $f_n(x)$ no tienden a cero en ningún punto de $[0,1]$, en cambio convergen en medida a cero sobre $[0,1]$.

En general, se tiene:

TEOR. 6. *Si* $f_n(x) \geqslant 0$ *forman una sucesión de funciones integrables sobre un conjunto* X *medible, tal que*

$$\int_X f_n\,dx \to 0 \quad ,$$

entonces la sucesión $f_n(x)$ *tiende en medida a cero sobre* X.

Pues si para $\varepsilon > 0$ fijo, es X_n el conjunto donde $f_n(x) \geqslant \varepsilon$, será $\varepsilon\,|X_n| \leqslant \int_{X_n} f_n\,dx \leqslant \int_X f_n\,dx \to 0$, con $1/n$, y por tanto $|X_n| \to 0$, como queríamos demostrar.

NOTA 7. En Cap. XXV, nota III, examinaremos otro tipo de convergencia, llamado convergencia en media, que origina uno de los más importantes resultados de la teoría de integración de LEBESGUE.

TEOR. 7. *Si* $f_n(x) \geqslant 0$ *forman una sucesión de funciones integrables sobre un conjunto* X *medible, tal que*

$$\int_X f_n\,dx \to 0 \quad ,$$

entonces existe una sucesión parcial de $f_{n_r}(x)$ *que tiende a cero en* c. t. X *para* $n_r \to 0$.

Pues por el teor. 6, para cualquier k natural y todo $\delta > 0$, existe m_k tal que si $n > m_k$, es $\mu_n(1/2^k) < \delta/2^k$, siendo $\mu_n\ (1/2^k)$ la medida del conjunto contenido en X donde $f_n(x) \geqslant 1/2^k$. Si se toma $n_1 = m_1, n_2 = \max[n_1+1, m_2]$, $n_3 = \max[n_2+1, m_3]$, etc., y es X_k el conjunto contenido en X donde $f_{n_r}(x) \geqslant 1/2^k$, será $|X_k| < \delta/2^k$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe s tal que $1/2^s < \varepsilon$, y entonces, si $r > s$, será $0 \leqslant f_{n_r}(x) < 1/2^s < \varepsilon$ en la intersección de todos los conjuntos $X - X_k$ para los que $k \geqslant s$, y con mayor razón en la intersección de todos los conjuntos $X - X_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, con la medida de la unión de los X_k menor o igual que $\sum_k |X_k| \leqslant \sum_k \delta/2^k \leqslant \delta$, es decir, la convergencia $f_{n_r}(x) \to 0$ es esencialmente uniforme en X (nota 2). Esto, por el lema de EGOROFF (teor. 1), implica que $f_{n_r} \to 0$ en c. t. X, pues si existiese un X_ε con medida exterior $|X_\varepsilon| > \varepsilon > 0$, tal que en sus puntos no tendiese f_{n_r} a cero, tomando $\delta < \varepsilon$, para cualquier X_δ de medida $|X_\delta| < \delta$, no podría haber convergencia uniforme de $f_{n_r}(x)$ a cero en $X - X_\delta$, que forzosamente contendría puntos de X_ε.

NOTA 8. Obsérvese que si $f_{2p-1}(x)$ coincide con la función característica de $[0, \frac{1}{2}]$ y $f_{2p}(x)$ con la función característica de $[\frac{1}{2}, 1]$, a pesar de ser $\lim_n f_n(x) = 0$ en $[0, 1]$, no existe sucesión parcial $f_{n_r}(x)$ que tienda a cero en c. t. $[0, 1]$.

TEOR. 8. (COMPARACIÓN DE LA INTEGRAL (L) CON LAS INTEGRALES SUPERIOR E INFERIOR DE DARBOUX). — *Sea una función* $f(x)$ *medible y acotada cualquiera, definida en un intervalo finito* I *del espacio euclídeo* E_m *y*

$$\overline{f}(x) = \lim_{h \to 0} [\operatorname{extr\,sup}_{\xi \in Q(x,h)} f(\xi)] \quad , \quad \underline{f}(x) = \lim_{h \to 0} [\operatorname{extr\,inf}_{\xi \in Q(x,h)} f(\xi)] \ ,$$

las funciones superior e inferior (§ 82-5, def.) *de* $f(x)$, *donde* $Q(x, h)$ *es un entorno cúbico cerrado de centro* x *y lado* h. *Entonces, las funciones* $\overline{f}(x)$ y $\underline{f}(x)$ *son integrables* (L) *y sus integrales son respectivamente iguales a las integrales superior e inferior de* DARBOUX:

$$(L)\int_I \overline{f}(x)dx = \overline{\int_I} f(x)dx \quad ; \quad (L)\int_I \underline{f}(x)dx = \underline{\int_I} f(x)dx.$$

Dada una partición (§ 83-2) de I en cubos Q_r sean m_r y M_r los extremos de $f(x)$ en Q_r, formando las funciones escalonadas finitas (§ 95-3) $e(x)$ y $E(x)$ que toman respectivamente los valores constantes m_r y M_r en el interior de cada Q_r. Si tomamos una sucesión *numerable* de particiones cada vez más finas, con norma que tienda a cero, la frontera de los Q_r para cada partición es de medida m-dimensional nula y lo mismo ocurrirá para la unión numerable de todas las fronteras de los Q_r correspondientes al conjunto numerable de particiones, por lo que las funciones inferior y superior $\underline{f}(x)$ y $\overline{f}(x)$ serán respectivamente los límites me-

dibles (§ 94-8) de las escalonadas $e(x)$ y $E(x)$ en c.t.I. Por el teor. 2 de convergencia acotada (LEBESGUE) existirán y serán:

$$(L)\int_I \underline{f}(x)\,dx = \lim\,(L)\int_I e(x)\,dx = \lim(\Sigma_r\, m_r\,|\,Q_r\,|) = \underline{\int}_I f(x)\,dx,$$

$$(L)\int_I \overline{f}(x)\,dx = \lim\,(L)\int_I E(x)\,dx = \lim(\Sigma_r\, M_r\,|\,Q_r\,|) = \overline{\int}_I f(x)\,dx.$$

NOTA 8. En particular, restando las dos anteriores, la condición necesaria y suficiente para que las integrales de DARBOUX sean iguales, es decir, para que $f(x)$ sea integrable (R) (§ 83-1), es que sea

$$(L)\int_I (\overline{f}(x) - \underline{f}(x))\,dx = 0 \quad ,$$

es decir, (§ 95-2, teor. 9) que en c.t.I sea $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$ condición que es equivalente a la continuidad de $f(x)$, volviendo a encontrar la condición 3ª de § 82-3 y el teor. 12 de § 95-2.

5. **Continuidad absoluta y función integral (L).** — *a*) Aún cuando muchos resultados son ciertos en E_m, como en éste es complicada la teoría de la derivación, vamos a considerar sólo el caso más sencillo de integral (L) definida en la recta real E_1.

Si como en el caso de integral (R) (§ 50) llamamos *función integral* $F(x)$ a la integral (L) de $f(x)$ en (a, x) contenido en (a, b), donde suponemos que $f(x)$ es integrable (L), el teorema 7 de § 95-2 prueba inmediatamente que $F(x)$ es una función continua, como en el caso de integral (R). Si ahora nos proponemos estudiar la existencia de la derivada $F'(x)$ de la función integral (L) y su relación con el integrando $f(x)$, será conveniente anteponer el siguiente resultado, uno de los más sorprendentes e importantes de la teoría de funciones de variable real:

TEOR. 1. (LEBESGUE). *Toda función* m o n ó t o n a *continua* $f(x)$ *admite derivada finita y determinada en casi todo punto* x *de su intervalo de definición* (§ 95-2, nota 2).

DEM. (F. RIESZ). Apoyaremos la demostración en el siguiente lema de RIESZ: Sea $g(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y sea C el conjunto de puntos x interiores a este intervalo tales que exista un punto $\xi > x$ donde $g(\xi) > g(x)$. Entonces el conjunto C es o bien vacío, o bien abierto, suma de un número finito o una infinidad numerable (§ 94-2) de intervalos abiertos disjuntos (a_i, b_i), siendo para todos estos intervalos $g(a_i) \leqslant g(b_i)$.

El conjunto C es abierto, porque si $x_0 \,\varepsilon\, C$, es decir existe $\xi > x_0$ tal que $g(\xi) > g(x_0)$, por la continuidad de $g(x)$, las relaciones $\xi > x$ con $g(\xi) > g(x)$, continúan siendo válidas en un entorno de x_0 (§ 26-1). Sea ahora (a_i, b_i) uno cualquiera de los intervalos abiertos que componen C, a cuyo conjunto no pertenecerá b_i. Vamos a probar que si $x \varepsilon (a_i, b_i)$, entonces $g(x) \leqslant g(b_i)$. Pues si fuera $g(x) > g(b_i)$, como C contiene x y no b_i, existirá un $\xi \varepsilon (x, b_i)$ tal que $g(\xi) > g(x) > g(b_i)$, y el máximo absoluto (§ 26-5) de la función continua $g(x)$ en $[x, b_i]$ se daría en un punto de $(x, b_i) \,\varepsilon\, C$, sin que pudiese cumplir la condición que caracteriza los puntos de C. Haciendo $x \to a_i$, por continuidad resultará también $g(a_i) \leqslant g(b_i)$ y el lema queda demostrado.

Para fijar las ideas supongamos que $f(x)$ sea continua y *creciente*

(en sentido amplio) en $a \leqslant x \leqslant b$. Vamos a ver que entonces los cuatro números derivados (Cap. IX, nota V) de $f(x)$ son iguales y finitos en c. t. (a, b), que es lo afirmado por la tesis a demostrar. Para esto bastará probar que en c. t. (a, b) se cumplen las relaciones:

$$1^a)\ D^+ < +\infty \quad ; \quad 2^a)\ D^+ \leqslant D_- \quad ;$$

pues aplicando la 2ª a la función creciente $-f(-x)$, resultará en c. t. (a, b), que también es $D^- \leqslant D_+$, y combinando con la 1ª y 2ª se obtiene

$$D^+ \leqslant D_- \leqslant D^- \leqslant D_+ \leqslant D^+ < +\infty \quad ,$$

debiendo valer por tanto los signos de igualdad, con valor finito por ser no negativos (Cap. IX, nota V).

Dado un número positivo K cualquiera, sea C_k el conjunto de puntos de (a, b) donde $D^+ > K$. Esta relación implica la existencia de un $\xi > x$, tal que $[f(\xi) - f(x)]/(\xi - x) > K$, es decir, $g(\xi) > g(x)$ para $g(x) = f(x) - Kx$. Por el lema, el conjunto C_k está contenido en un conjunto de intervalos abiertos (a_i, b_i) donde $f(b_i) - Kb_i \geqslant f(a_i) - Ka_i$, es decir, sumando queda:

$$[95\text{-}18] \qquad K\sum_i (b_i - a_i) \leqslant \sum_i [f(b_i) - f(a_i)] \leqslant f(b) - f(a).$$

Para K arbitrariamente grande, deberá ser $\sum_i (b_i - a_i)$ tan pequeña como se quiera, lo que muestra que el conjunto C_∞ donde $D^+ = +\infty$ es de medida nula (§ 82-2), quedando probada la relación 1ª.

Vamos a ver ahora que dados arbitrariamente los números positivos $k < K$, los puntos en donde *simultáneamente* sea $D^+ > K$ y $D_- < k$ forman un conjunto C_{Kk} de medida nula. La relación $D_- < k$ implica la existencia de un $\xi < x$ tal que $f(\xi) - f(x) > k(\xi - x)$, es decir $g_1(-\xi) > g_1(-x)$ para $g_1(x) = f(-x) + kx$, y aplicando el lema como antes, los puntos donde $D_- < k$ estarán situados en un sistema de intervalos abiertos (a_j, b_j), tales que $g_1(-a_j) > g_1(-b_j)$, es decir

$$\sum_j [f(b_j) - f(a_j)] \leqslant k\sum_j (b_j - a_j).$$

Si ahora en cada (a_j, b_j) consideramos la función $g(x) = f(x) - Kx$, tendremos por el lema un sistema de intervalos (a_{ji}, b_{ji}) al que será aplicable [95-18], de modo que:

$$K\sum_i (b_{ji} - a_{ji}) \leqslant \sum_i [f(b_{ji}) - f(a_{ji})] \leqslant f(b_j) - f(a_j)$$

y sumando respecto de j, quedará

$$K\Sigma_2 \leqslant k\Sigma_1 \quad ,$$

donde

$$\Sigma_2 = \sum_j \sum_i (b_{ji} - a_{ji}) \quad , \quad \Sigma_1 = \sum_j (b_j - a_j) \quad ,$$

estando en el sistema Σ_2 los puntos donde a la vez sea $D^+ > K$ y $D_- < k$.

Si repetimos en los intervalos del sistema Σ_2 el procedimiento anterior y seguimos así sucesivamente, se tendrá en general

$$\Sigma_{2n} \leqslant (k/K)\Sigma_{2n-1} \leqslant (k/K)\Sigma_{2n-2} \quad ,$$

de donde

$$\Sigma_{2n} \leqslant (k/K)^n \Sigma_1 \to 0 \quad \text{para} \quad n \to \infty \quad ,$$

y como los puntos en donde simultáneamente es $D^+ > K$ y $D_- < k$ están en todos los Σ_{2n}, es $|C_{Kk}| = 0$.

Si ahora formamos los conjuntos C_{Kk} correspondientes a todos los pares de números racionales positivos $k < K$, formarán una infinidad numerable (§ 2-7, ejemplo 4) y su unión tendrá medida nula (§ 94-5, teor. 2). Como a esta unión deben pertenecer los puntos donde $D^+ > D_-$, pues en este caso siempre es posible encontrar (§ 7-6, *c*) un par de números racionales positivos k y K tales que sea $D^+ > K > k > D_-$, quedará demostrada también la relación 2ª y por tanto el teorema 1 de LEBESGUE.

Como toda función es de variación acotada cuando y sólo cuando

puede expresarse como diferencia de dos funciones crecientes (§ 55-9, *d*), un inmediato corolario del teor. 1 es:

TEOR. 2. (LEBESGUE). *Toda función de variación acotada admite derivada finita en casi todo punto.*

NOTA 1. Tanto el teorema 1 como el lema de RIESZ se extienden fácilmente a funciones con sólo puntos de discontinuidad de primera especie (§ 25-4, *b*) (hágase), por lo que se puede prescindir en el enunciado del teorema 2 de la hipótesis de la continuidad. Por otra parte, el conjunto de puntos de discontinuidad de una función de variación acotada es numerable (§ 94-2, *a*, nota 1) y por tanto de medida nula (§ 94-5, teor. 2).

b) Basándonos en las descomposiciones [95-2] y [95-3] no es difícil probar que la función integral F(*x*) es de variación acotada y que su variación total (§ 55-9) viene dada por:

[95-19] $$V_a^b F(x) = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Pero la función integral es algo más que continua y de variación acotada. En efecto, cualesquiera que sean los intervalos (a_i, b_i), $(i = 1, 2, 3, \dots)$ no rampantes, de longitud total *h*, cuyo conjunto suma llamaremos X_h, los correspondientes incrementos de F(*x*) son

$$\Delta_i = F(b_i) - F(a_i) = \int_{a_i}^{b_i} f(x)dx \quad ,$$

luego

$$\Sigma\, |\Delta_i| \leqslant \Sigma \int_{a_i}^{b_i} |f(x)|\, dx = \int_{X_h} |f(x)|\, dx < \varepsilon$$

para valores de *h* suficientemente pequeños (§ 95-2, teor. 7).

Esta propiedad fué definida en general por VITALI:

DEF. Una función se llama *absolutamente-continua* en (a, b) cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe un $h > 0$, tal que para toda familia finita de intervalos h_i no rampantes de longitud total $\Sigma h_i < h$ sea la correspondiente suma absoluta de incrementos $\Sigma\, |\Delta_i| < \varepsilon$.

En particular, para un solo intervalo, resulta la continuidad uniforme (§ 26-6) y por tanto la ordinaria, incluída en la absoluta.

NOTA 2. Aunque algunos autores, siguiendo a VITALI, exigen más estrictamente la acotación de la suma absoluta de incrementos para toda familia, *finita* o *infinita* de intervalos no rampantes, es obvio que si la condición $\Sigma\, |\Delta_i| < \varepsilon$ se verifica para toda suma finita de longitud total $\leqslant h$, también vale para toda serie (§ 22-2, *a*) de suma $\leqslant h$. Ambas definiciones son, pues, equivalentes. VITALI llamaba *borelianos* a tales conjuntos, sumas de intervalos en número finito o infinito numerable, a no confundir con el concepto más amplio de conjunto medible (B) (introducido anteriormente (§ 94-1).

EJEMPLO. El más sencillo de *función monótona, continua, no absolutamente*, del que partió VITALI, es la función de CANTOR (Cap. IX, nota

VI, b). Para los intervalos que encierren el correspondiente conjunto ternario de CANTOR (§ 50-2, nota 3), cuya suma es arbitrariamente pequeña, la suma de incrementos vale 1. Por tanto, esta función continua y de variación acotada, *no es integral indefinida* (§ 50-1, b) *de ninguna función.*

Pero además la continuidad absoluta es propiedad característica de las funciones integrales (L), resultado capital que completa el de VITALI, dando:

TEOR. 3 (LEBESGUE). *Para que* $F(x)$ *sea una integral indefinida* (§ 50-1, b) *es necesario y suficiente que sea absolutamente continua.*

DEM. Antes se ha demostrado la necesidad. Recíprocamente, si $F(x)$ es absolutamente continua, entonces es de variación acotada. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, y un $h > 0$ correspondiente a la definición de continuidad absoluta, descompongamos el intervalo (a, b) en subintervalos cualesquiera, cada uno de longitud $< \frac{1}{2}h$. En la correspondiente $\Sigma \mid \Delta_i \mid$, habrá a lo más m grupos de sumandos, con

$$m \leqslant \frac{2(b-a)}{h} + 1 \quad ,$$

tales que la longitud total de los subintervalos respectivos sea $< h$ y por tanto, la contribución de cada grupo a la suma $\Sigma \mid \Delta_i \mid$ sea $< \varepsilon$. Por tanto, la variación total (§ 55-9) será

$$V_a^b F(x) < \varepsilon \left(\frac{2(b-a)}{h} + 1 \right).$$

Aplicando la descomposición de JORDAN (§ 55-9, d), resultarán también absolutamente continuas las variaciones positiva y negativa de $F(x)$ y por tanto podremos suponer que $F(x)$ es creciente.

Entonces, el cociente incremental $[F(x+h) - F(x)]/h$ es no-negativo y tiende (teor. 1) en c.t. x hacia $F'(x)$. Como además, su integral en el intervalo (α, β) vale

$$\frac{1}{h}\int_{\beta}^{\beta+h} F(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\alpha+h} F(x)\,dx$$

y siendo $F(x)$ continua, esta integral tiende hacia $F(\beta) - F(\alpha)$ para $h \to 0$ (§ 50-1), podremos aplicar el teorema de FATOU (§ 95-4, teor. 3) para afirmar que $F'(x)$ es integrable (L), cumpliendo

[95-20] $$\int_{\alpha}^{\beta} F'(x)\,dx \leqslant F(\beta) - F(\alpha).$$

Por tanto, si $G(x)$ es la función integral de $F'(x)$, la diferencia $F(x) - G(x)$ es creciente y además absolutamente continua, pues lo son $F(x)$ por hipótesis y $G(x)$ por el teorema directo. Además en c.t. x existe (teor. 1) y es $G'(x) = F'(x)$. Pues de [95-20] deducimos, por formación de los respectivos cocientes incrementales, que debe ser $G'(x) \leqslant F'(x)$ y por el teorema de convergencia acotada (§ 95-4, teor. 2) por la función integrable $F'(x)$, es

$$\lim_{h \to 0} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} G'(x)\,dx \quad ,$$

cuya integral del primer miembro igual a

$$\frac{1}{h}\int_{\beta}^{\beta+h} G(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\alpha+h} G(x)\,dx$$

tiende hacia $G(\beta) - G(\alpha)$, por la continuidad de $G(x)$ (§ 50-1).

Por tanto

$$\int_a^\beta F'(x)\,dx - \int_a^\beta G'(x)\,dx = \int_a^\beta [F'(x) - G'(x)]\,dx = 0 \quad ,$$

que al tener integrando no-negativo, prueba (§ 95-2, teor. 9) que éste es nulo en c. t. punto.

La demostración queda, pues, reducida a probar que si $F(x)$ es *creciente, absolutamente continua, con derivada* $F'(x) = 0$ *en* c. t. x, *entonces* $F(x)$ *se reduce a una constante.* En efecto, es de medida nula el conjunto C donde no exista o no sea nula $F'(x)$. Entonces, el conjunto imagen $F(C)$ es también de medida nula por la continuidad absoluta de F, ya que dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, puede cubrirse C por un sistema de intervalos no rampantes de longitud total $< h$ y las imágenes de estos intervalos será de longitud total $< \varepsilon$ (definición de continuidad absoluta) y cubrirán $F(C)$ (§ 82-2). Finalmente, es también de medida nula el conjunto imagen $F(E)$ del E donde es $F'(x) = 0$. Pues, dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, se podrá hacer corresponder a cada punto x de E un $\xi > x$ tal que $F(\xi) - F(x) < \varepsilon(\xi - x)$, y si se toma $g(x) = \varepsilon x - F(x)$ para aplicar el lema de RIESZ visto en la demostración del teorema 1, el conjunto E está comprendido en un conjunto abierto suma de intervalos abiertos disjuntos (a_i, b_i) para los que $g(a_i) \leqslant g(b_i)$, es decir $F(b_i) - F(a_i) \leqslant \varepsilon(b_i - a_i)$; por tanto, el conjunto $F(E)$ está constituído con una suma de intervalos de longitud total $< \varepsilon(b - a)$ arbitrariamente pequeña. Por tanto el intervalo de extremos $F(a)$, $F(b)$ cubierto por dos conjuntos de medida nula, deberá ser de medida nula, es decir $F(a) = F(b)$, como queríamos demostrar.

De la demostración anterior deducimos además que si $F(x)$ es absolutamente continua, en [95-20] vale el signo de igualdad y por tanto:

TEOR. 4. *Si* $F(x)$ *es absolutamente continua en* (a, b), *entonces es la función integral de su derivada (a menos de una constante,* § 50-1, *b), cumpliendo:*

$$[95\text{-}21] \qquad \int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

NOTA 3. El mismo método de demostración anterior da la llamada *descomposición canónica de* LEBESGUE de una función monótona o más generalmente de una función de variación acotada cualquiera. Sea $F(x)$ una función creciente y continua cualquiera. Por el teorema de FATOU se demuestra como antes que su derivada (teor. 1) es integrable y si $G(x)$ es su función integral, la función $H(x) = F(x) - G(x)$ es creciente. Como $F'(x) \geqslant 0$, es $G(x)$ también creciente y entonces $H'(x) = 0$ en c. t. x. A una función de esta clase se le llama *función singular* (tal la función de CANTOR; Cap. IX, nota VI, *b*), y por tanto:

TEOR. 5. *Toda función monótona continua* $F(x)$ *puede descomponerse en suma de dos funciones monótonas continuas* $G(x)$ y $H(x)$, *siendo* $G(x)$ *absolutamente continua y* $H(x)$ *singular, es decir, tal que* $H'(x) = 0$ *para* c. t. x.

Si $F(x)$ monótona, no es continua, se le debe añadir una *función de saltos* que da la suma numerable (§ 94-2, *a*, nota 1) de éstos en los puntos de discontinuidad (que son de 1ª especie, § 25-4) de la función monótona.

NOTA 4. El teorema 3 fué generalizado por J. RADON a un espacio euclídeo cualquiera E_m, demostrando finalmente O. NIKODYM su validez en espacios abstractos para una función medible infinitamente aditiva en un conjunto medible suma, a lo más, de una infinidad numerable de conjuntos de medida finita.

TEOR. 6. *Toda función* f(x) *integrable* (L) *en* (a, b) *es igual en casi todo punto a la derivada de su función integral.*

Es consecuencia inmediata de [95-21], es decir de que para todo x de (a, b) es

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x F'(t)\,dt \quad ,$$

o sea

$$\int_a^x [f(t) - F'(t)]\,dt = 0$$

y para $\varphi(t) = f(t) - F'(t)$, del lema:

TEOR. 7. *Si* $\varphi(x)$ *es integrable y su función integral es nula para todo* x *de* (a, b), *entonces es* $\varphi(x) = 0$ *para casi todo* x *de* (a, b).

Pues si la función integral es nula en todo intervalo de $[a, b]$, lo es también en todo conjunto abierto (§ 94-2, teor. 4), compuesto de una infinidad numerable de intervalos (§ 94-2, teor. 8) y por tanto en todo conjunto cerrado de $[a, b]$, complemento de un abierto. Si $\varphi(x)$ conservase un mismo signo (por ejemplo positivo), en un conjunto de medida positiva, lo mismo ocurriría con un conjunto cerrado contenido en él y de medida también positiva (§ 94-6, teor. 7) y al ser nula su función integral en él, debería ser nula $\varphi(x)$ en casi todo punto de dicho conjunto cerrado (§ 95-2, teor. 9), contrariamente a lo supuesto.

c) Estamos ahora en condiciones de ver en qué condiciones se cumple la regla de BARROW (§ 50-2) para la integral de LEBESGUE. Dada una primitiva $\Phi(x)$ de f(x), es decir:

[95-22] $$\Phi'(x) = f(x) \quad ,$$

si $\Phi(x)$ es absolutamente continua, por el teor. 4 puede escribirse la fórmula de BARROW:

[95-23] $$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a) \quad ,$$

y recíprocamente, la expresión [95-23] para $\Phi(x)$ prueba por el teor. 3 que $\Phi(x)$ es absolutamente continua. De aquí resulta:

TEOR. 8. *Si* f(x) *es integrable* (L) *en* $[a, b]$ *y en casi todo* x *de* (a, b) *se cumple* [95-22], *la condición necesaria y suficiente para que sea válida la fórmula de* BARROW [95-23] *para todo* x *de* $[a, b]$, *es que* $\Phi(x)$ *sea absolutamente continua en* $[a, b]$.

NOTA 5. También se demuestra que para la validez de [95-21] es *suficiente* (no necesario), que exista y sea finita en *todos* los puntos de (a, b) la derivada $F'(t)$, siendo además integrable (L) en (a, b). En particular (§ 95-1, teor. 2), es suficiente que $F'(x)$ sea finita en todos los puntos de (a, b) y acotada, lo que no ocurría para la integral (R), como mostró el ejemplo de VOLTERRA (Cap. XIII, nota IV). Por otra parte, el ejemplo de la función de CANTOR (§ 50-2, nota 3) prueba que

aun siendo $\Phi(x)$ de variación acotada y $\Phi'(x)$ integrable (L), puede no cumplirse [95-23].

Sin embargo, aunque una función $F(x)$ pueda tener derivada *finita* en *todo* punto de (a, b), si ésta no es acotada, puede no ser integrable (L) y no ser aplicable para esta integral la fórmula [95-21]. Tal ocurría en el ejemplo 3 de § 95-2. Para resolver este caso se generaliza la integral de LEBESGUE (ver nota II), mediante la consideración de integrales no absolutamente convergentes, siendo particularmente importante el proceso transfinito de *totalización* empleado por DENJOY que resuelve por completo el problema de integración de derivadas finitas.

6. Integración por partes y por sustitución. — *a)* TEOR. 1. *Si* $F(x)$ *es absolutamente continua en* (a, b) *y* $g(x)$ *es integrable, con función integral* $G(x)$, *es válida la fórmula*:

$$[95\text{-}24] \qquad \int_a^b F(x)g(x)dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F'(x)G(x)dx.$$

Pues existen en c.t. punto (§ 95-5, teor. 4 y 6) las derivadas $F'(x)$ y $G'(x) = g(x)$ y por tanto existirá (§ 32-4):

$$\frac{d}{dx}[F(x).G(x)] = F'(x)G(x) + F(x)g(x) \quad ,$$

a la que puede aplicarse la fórmula de BARROW (§ 95-5, teor. 8), dando [95-24], por ser el producto $F(x)G(x)$ absolutamente continuo con los factores $F(x)$ y $G(x)$ (§ 95-5, teor. 3). En efecto, cualesquiera sean los intervalos no rampantes (a_i, b_i) $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ contenidos en (a, b) es

$$\begin{aligned} &\Sigma\,|F(b_i)G(b_i) - F(a_i)G(a_i)| = \\ &= \Sigma\,|[F(b_i) - F(a_i)]G(b_i) + F(a_i)[G(b_i) - G(a_i)]| \leqslant \\ &\leqslant M(\Sigma\,|F(b_i) - F(a_i)| + \Sigma\,|G(b_i) - G(a_i)|) \quad , \end{aligned}$$

donde M designa una cota común (§ 26-5) de $F(x)$ y $G(x)$ en (a, b).

NOTA 1. Aquí se han generalizado y precisado las condiciones impuestas en § 51-5, *b*, pero aún resultan más restringidas que las obtenidas mediante la integral de STIELTJES (§ 79-1).

Por ejemplo, si $F(x)$ es la función ternaria de CANTOR (§ 50-2, nota 3) monótona y continua, pero no absolutamente (§ 95-5, ejemplo) y $g(x) = 1$ en todo (a, b), la [95-24] no es válida, pues el primer miembro vale 1/2 y el segundo 1, por anularse

$$\int_0^1 F'(x)G(x)\,dx \quad ,$$

lo que no ocurre con

$$(\text{R-St}) \int_0^1 x\,dF = \tfrac{1}{2} \quad ,$$

siendo en cambio válida [79-4] para $\alpha(x) = F(x)$ función de CANTOR y $u(x) = g(x) = 1$.

Mediante la utilización de la integral de LEBESGUE-STIELTJES (nota II, *b*), pueden generalizarse los resultados del § 79 a este caso.

b) TEOR. 2. *Si la función* $x = G(t)$ *es una función creciente (en sentido amplio) y absolutamente continua en el intervalo* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, *y* $f(x)$ *es una función integrable en* $G(\alpha) = a \leqslant x \leqslant b = G(\beta)$, *entonces la función* $f[G(t)]G'(t)$ *es integrable en* (α, β) *y se tiene*

[95-25] $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[G(t)]G'(t)\,dt.$$

La función inversa de $x = G(t)$, de la que son valores α y β, puede no ser unívoca si $G(t)$ se conserva constante en algunos intervalos. Pero si a un valor dado de x corresponde más de un valor de t, éstos forman un intervalo cerrado y la función inversa se hace uniforme eligiendo, por ejemplo, el extremo derecho de este intervalo.

Si $F(x)$ es la función integral de $f(x)$ y por tanto absolutamente continua en (a, b) y $G(t)$, absolutamente continua, es además *monótona* en (α, β), entonces $F[G(t)]$ es absolutamente continua en (α, β). Pues los subintervalos no rampantes (α_i, β_i) se transforman en los subintervalos *también no rampantes* (a_i, b_i), mediante la función *monótona* $x = G(t)$ y como $F(x)$ es absolutamente continua, la $\sum |[F[G(\beta_i)] - F[G(\alpha_i)]|$ tiende a cero con $\sum |G(\beta_i) - G(\alpha_i)|$, lo que así ocurre para $\sum(\beta_i - \alpha_i) \to 0$ por ser $G(t)$ absolutamente continua en (α, β).

Entonces, en c. t. (α, β) existe la derivada de $F[G(t)]$ y es (§ 95-5, teor. 4 y 8):

[95-26] $$\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\{F[G(t)]\}\,dt = F[G(\beta)] - F[G(\alpha)] =$$
$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

La dificultad de la demostración reside ahora en no poder afirmar que en c. t. (α, β) sea

[95-27] $$\frac{d}{dt}\{F[G(t)]\} = f[G(t)]\,.\,G'(t) \quad ,$$

pues aunque

$$\frac{F[G(t+h)] - F[G(t)]}{h} = \frac{F[G(t+h)] - F[G(t)]}{G(t+h) - G(t)} \cdot \frac{G(t+h) - G(t)}{h}$$

y el segundo factor del último miembro tienda a $G'(t)$ en c. t. (α, β), mientras que el primer factor tienda a $f[G(t)]$ en c. t. $(a = G(\alpha) \leqslant x \leqslant G(\beta) = b)$, no es cierto que un conjunto de medida nula en (a, b) sea siempre correspondiente de un conjunto de medida nula (ni aún tan sólo medible) de (α, β) mediante $x = G(t)$.

Sin embargo, la dificultad queda salvada si se observa que los conjuntos imagen de puntos de medida nula en x obtenidos mediante $x = G(t)$ son precisamente los que provienen de los conjuntos de medida nula en t y de aquellos donde $G'(t) = 0$ (§ 95-5, teor. 3, última parte de la demostración), pues un conjunto C de medida *exterior* (L) positiva contenido en (α, β) donde sea $G'(t) > 0$, no puede tener un conjunto imagen G(C) en (a, b) de medida nula en x. En efecto, si C_n es el conjunto (acaso vacío) contenido en C donde $G'(t) > 1/n$, cuya unión numerable da C $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, por ser la medida exterior de C no mayor que la suma de las medidas exteriores de los C_n (§ 94-3, M_3), hay algún C_N de medida exterior $|C_N| > 0$. Encerremos cada punto t de C_N en un intervalo $(t - h_2, t + h_1)$ tal que, al existir en dicho punto t la derivada $G'(t) > 1/N$, sea

$$G(t + h_1) - G(t - h_2) = G(t + h_1) - G(t) + G(t) - G(t - h_2) >$$
$$> \frac{h_1 + h_2}{2N},$$

Por tanto, la medida exterior de G(C) será no menor que $\frac{1}{2} | C_N |/N > 0$, es decir, no nula.

Así, pues, dividiendo a menos de un conjunto de medida nula, el intervalo (α, β) en los conjuntos medibles T_1 donde $G'(t) > 0$ y T_2 donde $G'(t) = 0$, se ha de cumplir [95-27] en c. t. T_1, mientras que en T_2 el segundo miembro de [95-27] es nulo y $| G(T_2) | = 0$ en (a, b). Si ahora cubrimos T_2 por un abierto de medida que tienda a la de T_2 (§ 94-6, teor. 6), a este abierto, suma numerable de intervalos disjuntos (§ 94-2, teor. 4), le corresponderá mediante $G(t)$ monótona una suma numerable de intervalos disjuntos de longitud total tan pequeña como se quiera, por ser $| G(T_2) | = 0$. Sobre cada intervalo sumando será válida la [95-26], lo que prueba (§ 95-2, teor. 7 y 8) que debe ser nula la integral

$$\int_{T_2} \frac{d}{dt} \{F[G(t)]\} dt \quad ,$$

al serlo

$$\int_{G(T)} f(x) dx \quad (\S\ 95\text{-}2,\ \text{teor. } 1).$$

Entonces, el primer miembro de [95-26] será igual a la integral en T_1 del segundo miembro de [95-27], por lo que existe el segundo miembro de [95-25] y es igual a [95-26], como queríamos demostrar.

NOTAS: 2. No siempre una función absolutamente continua $F(x)$ de función $x = G(t)$ absolutamente continua, es función $F[G(t)]$ absolutamente continua si $G(t)$ no es monótona, fallando la demostración antes dada, porque a los subintervalos no-rampantes (α_i, β_i), puede corresponderles subintervalos rampantes (a_i, b_i). Por ejemplo, $F(x) = + \sqrt{x}$ en $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $x = G(t) = t^2 \cos^2(1/t)$, en $0 < t \leqslant 1$ con $G(0) = 0$, son absolutamente continuas, mientras que $F[G(t)] = t \,| \cos(1/t) |$, no es absolutamente continua ni tan sólo de variación acotada, en $0 \leqslant t \leqslant 1$ (cfr. § 55-9, ejemplo).

3. CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN ha probado que si $G(t)$ es absolutamente continua, aún cuando no sea monótona y existe el segundo miembro de [95-25], entonces existe el primero y se cumple la igualdad. Un caso particular de este teorema, con condiciones que aseguren la integrabilidad (R), es el considerado en § 51-3 *b*. En cambio, como caso particular del teor. 2, puede darse un teorema para la integral (R) *distinto* del entonces visto, que diga: Es válida para integral (R) la fórmula [95-25] si se supone sólo que $f(x)$ es integrable (R) y que $G(t)$ es la integral (R) de su derivada $G'(t)$, siempre que además $G(t)$ sea *monótona*.

4. La integración por sustitución está íntimamente ligada con la relación estudiada en § 78-2 entre la integral de STIELTJES y la integral de medida ordinaria. Un estudio completo de la cuestión en los distintos casos (R-St), (R), (L-St) y (L) se ha efectuado en el trabajo: P. PI CALLEJA: *Sobre la integral de* STIELTJES (Math. Notae, V, p. 19-44, Rosario, 1943) donde está por primera vez expuesta la sencilla demostración dada del teorema 2.

5. *Otros teoremas útiles en el manejo de la integral* (L). — Para no extender más la exposición vamos a enunciar sólo otros teoremas cuya demostración puede encontrarse en la bibliografía citada en Nota IV.

TEOR. 3. (SEGUNDO TEOREMA DEL VALOR MEDIO). — *Subsiste la fórmula* [79-6] *para integrales* (L) *en las mismas condiciones, con la significación integrable* (L).

TEOR. 4. (FUBINI). *Para toda función* $f(x, y)$ *superficialmente su-*

mable en el rectángulo $I^{(2)} = [a_1, b_1; a_2, b_2]$, *donde* $I^{(2)}$ *puede comprender todo el plano euclídeo, existe la integral*

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx$$

en c. t. (a_2, b_2) *y también existe*

$$\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy$$

en c. t. (a_1, b_1), *siendo válida:*

$$[95\text{-}28] \quad \int\int_{I^{(2)}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy = \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx .$$

El recíproco no es cierto, pues SIERPINSKI ha dado ejemplos de existir y ser iguales las integrales reiteradas para función $f(x, y)$ superficialmente no medible en $I^{(2)}$ y también para función medible, pero superficialmente no integrable (L) en $I^{(2)}$. Sin embargo, TONELLI ha demostrado:

TEOR. 5. *Si una cualquiera de las tres integrales*

$$\int\int_{I^{(2)}} |f|\, dx\, dy \quad , \quad \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} |f|\, dy \quad , \quad \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} |f|\, dx$$

existe, entonces existen las tres integrales de f *y se cumple* [95-28].

Un corolario de este teorema es el siguiente (cfr. § 87-2, nota 3):

TEOR. 6. *Si* f *es medible* (L) *en el plano euclídeo, y si existen las integrales de* RIEMANN-CAUCHY (§ 80):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx \quad ,$$

siendo una de ellas absolutamente convergente (existente para $|f|$*), entonces ambas son iguales.*

Para convergencia condicional, habrá que hacer un estudio especial en cada caso (cfr. § 86). Sin embargo, para integral (L) se ha demostrado recientemente (1952):

TEOR. 7. (F. CAFIERO). *Si* $f(x, y)$ *es medible en* $I^{(2)} = [a_1\, b_1; a_2, b_2]$, *existen las integrales*

$$\int_{a_1}^{b_1} f\, dx$$

en c. t. (a_2, b_2), *y también*

$$\int_{a_2}^{b_2} f\, dy$$

en c. t. (a_1, b_1), *y para conjuntos medibles cualesquiera* X, Y *contenidos respectivamente en* $[a_1, b_1]$ *y* $[a_2, b_2]$, *existe la integral reiterada*

$$\int_X dx \int_Y f\, dy \quad ,$$

entonces, existe también con igual valor la integral

$$\int_Y dy \int_X f\, dx .$$

EJERCICIOS

1. Si f(x) es integrable (L) sobre X, probar que si X_K es el subconjunto de X donde $|f(x)| \geqq K$, entonces es $|X_K| = o(1/K)$.

2. Estudiar la integrabilidad según RIEMANN, CAUCHY, HARNACK y LEBESGUE de la función $f(x)$ tal que $f(x)=0$ en el conjunto ternario de CANTOR (§ 50-2, nota 3) y $f(x)=p$ en cada uno de los intervalos complementarios de longitud 3^{-p} y calcular el valor de la integral en caso de existir.

3. Demostrar que si $f_1(x)$ es medible y acotada y $f_2(x)$ es integrable (L), entonces el producto $f_1(x) \cdot f_2(x)$ es integrable (L). (Cfr. § 95-2, nota 4).

4. Probar que las definiciones dadas en § 95-1, *a*, *d* (REY PASTOR o VALLÉE POUSSIN) de la integral de LEBESGUE de función medible, no-negativa y posiblemente no-acotada sobre un conjunto medible X, coinciden con las dos siguientes (aun para $|X| = +\infty$): *a*) (SAKS) Es

$$(S) \int_X f(x)dx = \text{extr}\sup_\gamma \sum_{r=1}^{n} e_r |X_r| ,$$

donde γ representa una cualquiera de todas las particiones de X en un número finito *n* cualquiera de conjuntos medibles X_r disjuntos, siendo $e_r = \text{extr inf } f(x)$ para $x \varepsilon X_r$; *b*) (CARATHÉODORY) Si $f(x) \geqq 0$ medible, está definida en un conjunto medible $X (\subseteq) E_n$, su integral es la medida de LEBESGUE en E_{n+1} del *conjunto de ordenadas*, es decir

$$(C) \int_X f(x)dx = m_{n+1}\{(x, z) \text{ tal que } x \varepsilon X,\ 0 \leqq z \leqq f(x)\}.$$

5. Si la escalonada E(x) es finita (§ 95-3, *a*), muchos autores (§ 95-3, *b*) siguiendo a F. RIESZ, definen inicialmente su integral (L) mediante [95-12], y para f(x) no-negativa y medible en X medible, definen esta función como integrable en X, si existe una sucesión creciente $E_1(x) \leqq E_2(x) \leqq \ldots \leqq E_j(x) \leqq \ldots \leqq f(x)$ de escalonadas finitas $E_j(x)$, cada una de ellas integrable en X (es decir, con integral finita), tal que para cada $x \varepsilon X$ sea $\lim_j E_j(x) = f(x)$ con $\lim_j \int_X E_j(x)dx$ finito; en este caso, por definición se toma este último límite como valor de $(E) \int_X f(x)dx$. Demostrar que esta definición es equivalente a la dada en § 95-1, *a*.

6. HAHN y ROSENTHAL (nota IV, 4) definen la integral $(\sigma) \int_X f(x)d\mu$ en un espacio métrico E de medida finita, como la función de conjunto $\sigma(X)$ infinitamente aditiva tal que si X es cualquier conjunto medible (μ) y si $k \leqq f(x) \leqq K$ para todo $x \varepsilon X$, entonces es $k\mu(X) \leqq \sigma(X) \leqq$ $\leqq K\mu(X)$. Demostrar que esta definición coincide con la de § 95-1 para el caso de medida (L) (§ 94-3, *b*) con $|X|$ finita.

7. En el lema de EGOROFF (§ 95-4, teor. 1) puede sustituirse la restricción de que $|X|$ sea finita por la más apropiada para el teorema de LEBESGUE (§ 95-4, teor. 2) de la acotación integrofuncional de la sucesión f_n. Demuéstrese así: *Para que* $f_n(x) \to f(x)$ *con* [c. e. u. en X], *siendo las* $f_n(x)$ *y* X *medibles, basta que* $f_n(x) \to f(x)$ *con* [c. p. en c. t. X] *y existan dos funciones integrables* g(x) *y* G(x) *en* X, *tales que para todo n sea* $g(x) \leqq f_n(x) \leqq G(x)$ *en* c. t. X.

8. Demostrar que si f(x) es el límite de una sucesión *decreciente* $f_1(x) \geqq f_2(x) \geqq \ldots \geqq f_n(x) \geqq \ldots \geqq 0$ de funciones *integrables* no-negati-

vas en un conjunto medible X, entonces existe y es $\int_X f(x)\,dx = \lim_n \int_X f_n(x)\,dx$; (cfr. § 95-4, ejemplo 3 y teor. 4).

9. Demostrar que una serie funcional convergente en c. t. X medible cuyas sumas parciales medibles se conservan acotadas por una misma constante M, puede ser multiplicada por cualquier función integrable $\Phi(x)$ sobre X e integrada término a término sobre X.

10. Demostrar que si $f_n(x)$ y $g_n(x)$ medibles tienden en medida a $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente sobre X medible, entonces la suma $f_n(x) + g_n(x)$ tiende en medida a $f(x) + g(x)$ sobre X.

11. Demostrar que si $f_n(x)$ y $g_n(x)$ medibles tienden en medida a $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente sobre X de *medida finita*, entonces el producto $f_n(x)\,.\,g_n(x)$ tiende en medida a $f(x)\,.\,g(x)$ sobre X.

12. Si en c. t. X de medida finita tiende $f_n(x)$ medible a $f(x)$, entonces $f_n(x)$ tiende en medida a $f(x)$ sobre X.

13. Si en c. t. X medible tiende $f_n(x)$ medible a $f(x)$ y existen dos funciones integrables $g(x)$ y $G(x)$ en X tales que para todo n sea $g(x) \leqq f_n(x) \leqq G(x)$ en c. t. X, entonces $f_n(x)$ tiende en medida a $f(x)$ sobre X.

14. Dada la función $f(x)$ integrable (L) en el conjunto medible $X_m(\leqq)E_m$, sea la función infinitamente aditiva de conjunto $\sigma(X) = \int_X f(x)\,dx$, definida para todo conjunto medible $X(\leqq)X_m$. Demostrar que las variaciones superior e inferior (§ 94, ejercicio 5) vienen dadas por

$$\overline{V}(\sigma, X) = \int_X f^+(x)\,dx \quad ; \quad \underline{V}(\sigma, X) = -\int_X f^-(x)\,dx \quad ,$$

donde $f^+(x) = \text{máx.}\{f(x), 0\}$; $f^-(x) = \text{máx.}\{-f(x), 0\}$. Deducir de aquí que [95-3] da la variación total $V(\sigma, X) = \overline{V}(\sigma, X) - \underline{V}(\sigma, X) = \int_X |f(x)|\,dx$.

15. Probar que si $f(x)$ es absolutamente continua en $[a, b]$, también lo es $|f(x)|^p$ con $p \geqq 1$.

16. Demostrar que si $f(x)$ es integrable (L) en $[a, b]$, el llamado *conjunto de* LEBESGUE, definido por la condición

$$\int_0^h |f(x + t) - f(x)|\,dt = o(h)$$

con $h \to 0$, comprende las x de casi todo $[a, b]$.

17. La *densidad* de un conjunto medible X en un punto x de la recta euclídea E_1 puede definirse por el lim $|XH|/(2h)$ para $h \to 0$, donde H es el intervalo $(x - h, x + h)$. Demostrar que la densidad vale 1 en c. t. X y 0 en c. t. $E_1 - X$.

18. Aunque ambas sean integrales convergentes de RIEMANN-CAUCHY, probar que son desiguales

$$I_1 = \int_0^1 dy \int_1^\infty (e^{-xy} - 2e^{-2xy})\,dx \neq \int_1^\infty dx \int_0^1 (e^{-xy} - 2e^{-2xy})\,dy = I_2.$$

19. A pesar de ser absolutamente convergente cada una de las cuatro integraciones del ejercicio 18 anterior, si completamos el integrando fuera del rectángulo $1 \leqq x \leqq \infty$, $0 \leqq y \leqq 1$, con $f = 0$, ¿por qué no contradice dicho ejercicio a § 95-6, teor. 6?

20. ¿Por qué no contradice el ejercicio 18 a § 95-6, teor. 7?

21. Tomemos para E el conjunto de números naturales y para $X(\leqq)E$ sea $\mu(X)$ el número de puntos de X. Demostrar que si $f(n)$ es una función real no-negativa definida en E (es decir, una sucesión de números reales no-negativos), entonces $f(n)$ es integrable (μ) si y sólo si la serie $\sum f(n)$ es convergente. Demostrar que la teoría de la integración en E respecto de la medida (μ) se reduce a la teoría de las series absolutamente convergentes.

NOTAS AL CAPÍTULO XXIV

I. Generalizaciones de la teoría de la medida. — *a*) *Medida de* LEBESGUE-STIELTJES. — Una generalización inmediata de la medida exterior (L) dada por [94-8] consiste en dar un "peso" a los intervalos I_k de cubrimiento, distinto a su longitud, como se ha hecho al estudiar la integral de RIEMANN-STIELTJES en § 78. En la recta euclídea E_1, tomemos como allí, una nueva "métrica" definida por cualquier función *creciente* (en sentido amplio, § 23-11) de valor finito $g(x)$ que supondremos además *continua a la derecha* en cada punto (§ 25-5), lo que no impone restricción nueva especial respecto de la clase $g(x)$ de funciones consideradas, pues dicha condición sólo fija en el conjunto numerable de sus puntos de discontinuidad (§ 94-2, *a*) el valor de la función mediante su límite lateral derecho, siempre existente (cfr. § 80, ejercicio 8). Entonces, se define como medida de LEBESGUE-STIELTJES $\mu(X)$ a la obtenida sustituyendo en [94-8] la "longitud" del intervalo abierto de cubrimiento $|I_k|$ por el "peso" $g(b_k)-g(a_k)$, llamando también aquí (cfr. § 78-2, nota 2) *función de repartición* o *de distribución* a la función $g(x)$ que determina la función de conjunto $\mu(X)$, que como en § 94-3, teor. 2, se prueba es una medida exterior métrica de CARATHÉODORY (§ 94-3, *a*). En dicha demostración basta hacer uso de la supuesta continuidad a la derecha de $g(x)$, pudiéndose también trasladar la de § 94-3, teor. 1, a probar que $\mu\{(a, b]\}\equiv g(b)-g(a)$. En cambio, es fácil dar ejemplos de funciones $g(x)$ crecientes y continuas a la derecha, para las que $\mu\{(a, b)\}<$ $< g(b)-g(a)<\mu\{[a, b]\}$ (y claro está, también $=$, pero no $>$), pudiendo ser $\mu\{[a, b)\}$ menor, igual o mayor que $g(b)-g(a)$. Si a es un punto de discontinuidad de $g(x)$, es $\mu(\{a\})=g(a^+)-g(a^-)$, (cfr. § 25-4), diciéndose entonces que a es un punto de "masa concentrada".

Obsérvese que $g(x)$ es sólo *una* función de distribución de la medida exterior de LEBESGUE-STIELTJES $\mu(X)$, pues $g(x)+$ constante es *otra* función de distribución de la misma medida $\mu(X)$.

La medida (μ) de LEBESGUE-STIELTJES es regular (§ 94-6, teor. 1) y los intervalos finitos (abiertos, semi-abiertos o cerrados) son medibles (μ), (§ 94-4), con medida finita, pudiendo cubrirse E_1 con una infinidad numerable de dichos intervalos; entonces los teoremas 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 de § 94-6 se aplican también a esta medida (μ) de LEBESGUE-STIELTJES.

Como en § 78-6, podemos considerar también que la función de distribución $g(x)$ es de variación acotada continua a la derecha, sin más que aplicar la descomposición de JORDAN (§ 55-9, *d*) $g(x)=g_1(x)-g_2(x)$, con $g_1(x)$ y $g_2(x)$ funciones crecientes continuas a la derecha, resultando para $\mu(X)$ la correspondiente descomposición (§ 94, ejercicio 6).

Para el caso de plano euclídeo E_2 (y análogamente se procedería en un espacio euclídeo E_n de cualquier número de dimensiones), se aplica también la definición [94-8], sustituyendo la "medida" $|I_k|$ del intervalo abierto de cubrimiento $a_1<x_1<b_1$, $a_2<x_2<b_2$ por el "peso" $g(b_1, b_2)-$ $-g(a_1, b_2)-g(b_1, a_2)+g(a_1, a_2)$, adoptando para función de distribución $g(x_1, x_2)$ una función continua a la derecha en cada variable separadamente y tal que el anterior "peso" resulte no-negativo. Obsérvese que una función creciente en cada variable separadamente [tal la $g(x_1, x_2)=$ $=x_1+x_2$ para $x_1+x_2<0$; $g(x_1, x_2)=0$ para $x_1+x_2>0$] puede dar un peso negativo para ciertos intervalos (en el ejemplo, los de diagonal so-

bre $x_1 + x_2 = 0$) y por otra parte, una función de distribución [tal la $g(x_1, x_2) = x_2$ para $x_1 \geqslant 0$; $g(x_1, x_2) = 0$ para $x_1 < 0$] puede dar lugar a un peso no-negativo, sin que sea creciente en cada variable separadamente.

Físicamente puede interpretarse el valor $g(a_1, a_2)$ de la función de distribución como el valor total de una masa distribuída en el intervalo semi-infinito $x_1 \leqslant a_1$, $x_2 \leqslant a_2$ (fig. 325), siendo entonces el peso anterior la masa contenida en el intervalo semi-abierto $a_1 < x_1 \leqslant b_1$, $a_2 < x_2 \leqslant b_2$.

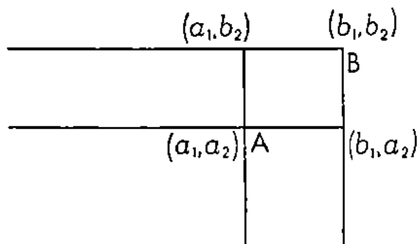


Fig. 325.

Resulta así la llamada *medida exterior* $\mu(X)$ *de* LEBESGUE-STIELTJES *inducida por la función de distribución* $g(x)$, que es una medida exterior métrica de CARATHÉODORY (§ 94-3, *a*) y además regular, por lo que subsisten los resultados de § 94-6.

Un caso importante de medida de LEBESGUE-STIELTJES en E_n es aquel en que $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es el producto de n funciones $g_r(x_r)$ dependientes cada una de una variable coordenada, es decir, $g(x) = \prod_{r=1}^{n} g_r(x_r)$, bastando que cada $g_r(x_r)$ sea creciente y continua a la derecha, para que la $g(x)$ producto, dé lugar a un peso no-negativo y sea continua a la derecha en cada variable separadamente. En tal caso, la función de conjunto n-dimensional $\mu(X)$ obtenida, se llama una *medida producto.* En particular, si $g(x) = x_1 . x_2 . \ldots x_n$, se obtiene la medida de LEBESGUE n-dimensional de peso [94-4].

Una importante aplicación de la medida de LEBESGUE-STIELTJES se da en la Teoría de la probabilidad. Así para el tratamiento matemático de una cuestión estadística, se acepta ahora generalmente que un acontecimiento es un conjunto puntual medible X, la probabilidad de este acontecimiento es una cierta medida $\mu(X)$ de dicho conjunto puntual, de manera que la medida del conjunto total E de sucesos sea $\mu(E) = 1$, una variable aleatoria es una función medible y la esperanza matemática es la integral de la función. Si cada suceso depende de n variables, representables en E_n, las variables se llaman *independientes* si la medida $\mu(X)$ es una medida producto. Un proceso estocástico puede considerarse también como un proceso cualquiera que corre a lo largo del tiempo t y matemáticamente viene dado por una familia de variables aleatorias x_t. Los teoremas de convergencia en medida (probabilidad), (§ 95-4, nota 6, ejercicios 10 a 13), o en casi todo X (certeza probabilística), (§ 95-2, nota 2), tienen un inmediato y evidente significado en los teoremas de convergencia básicos de la Teoría de la probabilidad. Sin embargo, aunque así la Teoría de la probabilidad resulte ser sólo una rama de la Teoría de la medida que tiene sus características propias y su especial campo de aplicación, la organización de la Teoría de la probabilidad requiere además una elaboración considerable, donde: 1º) Deban tratarse los distintos modelos de variables aleatorias y espacios medibles asociados; 2º) Deban definirse probabilidades y esperanzas condicionadas y establecerse sus propiedades; 3º) Deba discutirse la medida básica de probabilidad en términos de adecuadas y oportunas modificaciones y restricciones.

b) *Medida de* HAUSDORFF. — El método que hemos empleado en [94-8] para introducir la medida (L) y que hemos generalizado en *a*), no es apto para asignar una medida p-dimensional a un conjunto puntual X cualquiera de E_n (o de un espacio métrico separable E, cap. XVIII, nota I, *d*, y § 94-2, *a*). El método empleado por HAUSDORFF, que re-

laciona los conceptos de medida y dimensión, es importante en muchas aplicaciones. Sea p un número real no-negativo arbitrario, $0 \leqslant p < +\infty$ y dado $\varepsilon > 0$, consideremos

$$\mu^{\varepsilon}_{p}(\mathrm{X}) = \operatorname{extr} \inf_{d(\mathrm{X}_k) < \varepsilon} \sum_{k=1} [d(\mathrm{X}_k)]^p \quad ,$$

donde $\mathrm{X} = \sum_k \mathrm{X}_k$ es una descomposición finita o infinita numerable cualquiera de X en subconjuntos X_k de diámetros $d(\mathrm{X}_k)$ (§ 94-2, *e*, [94-6]) menores que ε. Cuando $\varepsilon \to 0$, el número $\mu^{\varepsilon}_{p}(\mathrm{X})$ tiende en forma monótona creciente a un determinado límite (finito o infinito)

[XXIV-1] $\qquad \mu_p(\mathrm{X}) = \lim \mu^{\varepsilon}_{p}(\mathrm{X}) \quad \text{para} \quad \varepsilon \to 0 \quad ,$

que se llama la *medida exterior p-dimensional* del conjunto X. Es una medida exterior métrica de CARATHÉODORY (§ 94-3, *a*). En el espacio euclídeo E_n los conjuntos para los que $\mu_n(\mathrm{X}) = 0$ son precisamente los conjuntos de medida nula en el sentido de LEBESGUE (§ 82-2, def. 2). La medida de HAUSDORFF puede servir para definir la dimensión de un conjunto, debido a que un conjunto puede tener medida p-dimensional finita y no nula a lo más para un solo valor de p. En efecto, se cumple:

TEOR.: *Si* $\mu_p(\mathrm{X})$ *es finita y si* $q > p$, *entonces* $\mu_q(\mathrm{X}) = 0$.
Pues

$$[d(\mathrm{X}_k)]^q / [d(\mathrm{X}_k)]^p = [d(\mathrm{X}_k)]^{q-p} \leqslant \varepsilon^{q-p}$$

implica

$$\mu^{\varepsilon}_{q}(\mathrm{X}) \leqslant \varepsilon^{q-p} \sum_k [d(\mathrm{X}_k)]^p$$

para cualquier descomposición $\mathrm{X} = \sum_k \mathrm{X}_k$, de donde

$$\mu^{\varepsilon}_{q}(\mathrm{X}) \leqslant \varepsilon^{q-p} \mu^{\varepsilon}_{p}(\mathrm{X}).$$

De esta acotación, la definición [XXIV-1] y la hipótesis se deduce sin más la tesis.

Aunque pueda no existir valor real de p para el que $\mu_p(\mathrm{X})$ sea finita y no nula, puede definirse la *dimensión* de X, designada por dim(X), como el extremo superior de todos los números reales p para los que $\mu_p(\mathrm{X}) > 0$. Entonces es $\mu_q(\mathrm{X}) = 0$ si $q > \dim(\mathrm{X})$, mientras que $\mu_q(\mathrm{X}) = +\infty$ si $q < \dim(\mathrm{X})$. Obsérvese que la dimensión de HAUSDORFF de un conjunto no necesita ser un número entero; por ejemplo, la dimensión del conjunto ternario de CANTOR (§ 50-2, nota 3) es $\ln 2/\ln 3 = 0{,}63093$, como se demuestra en la memoria original de F. HAUSDORFF: *Dimension und äusseres Mass* (Math. Ann., *79*, 1919, pp. 157-179).

Los conjuntos de medida finita $\mu_p(\mathrm{X})$ se llaman conjuntos de medida p-dimensional finita y en particular, para $p = 1, 2, 3$ se llaman respectivamente conjuntos de *longitud finita*, *área finita*, *volumen finito*.

c) *Medida de* HAAR. — La importancia *geométrica* del concepto de medida de LEBESGUE en E_n radica en que resulta invariante respecto del grupo euclídeo (§ 61-7, *c*, y § 48-1). En este orden de ideas, A. HAAR generaliza el problema definiendo una medida en un espacio E dotado de una estructura algebraica de grupo de modo que aquélla resulte invariante respecto de éste. Como mínimas restricciones se imponen las siguientes: El espacio E debe ser topológico (cap. XVIII, nota I, *b*) y *localmente compacto*, es decir que para cada uno de sus puntos exista un entorno cuya clausura sea compacta (cap. XVIII, nota II), siendo además el grupo topológico en E, es decir la operación de grupo y la inversión de cada elemento sean continuas respecto de la topología de **E**.

Recordemos (§ 5-12, *b*) que un grupo en E se define por una operación binaria (§ 2-4, *a*) tal que para cada par de puntos **x** é **y** de **E** corresponda un punto **x & y** de E, cumpliendo los postulados: 1º) La operación es asociativa, es decir, para cada terna de puntos x, y, z de E es **x & (y & z) = (x & y) & z**; 2º) Existe un solo elemento modular **u** en E tal que para cada x de E es **x & u = u & x = x**; 3º) A cada x de **E** corresponde un solo inverso $\mathbf{x}^{-1}$ punto de E tal que $\mathbf{x}^{-1} \& \mathbf{x} = \mathbf{x} \& \mathbf{x}^{-1} = \mathbf{u}$.

El grupo es *topológico* si $\lim_n (x_n \& y_n) = x_0 \& y_0$ y $\lim_n x_n^{-1} = x_0^{-1}$, siempre que $\lim_n x_n = x_0$, $\lim_n y_n = y_0$.

Si X es un subconjunto de E, se define su *traslación izquierda* por y, designada $y \& X$, como el conjunto de elementos $y \& x$ tales que $x \varepsilon X$. Análogamente, los elementos $x \& y$ forman la $X \& y$ llamada *traslación derecha* de X por y. Si X, Y son subconjuntos de E, se designa por $X \& Y$ el conjunto de elementos $x \& y$ con $x \varepsilon X$, $y \varepsilon Y$ y análogamente X^{-1} es el conjunto de elementos x^{-1} con $x \varepsilon X$.

Definida una medida μ exterior de CARATHÉODORY en E para la familia de sus conjuntos de BOREL (§ 94-3, nota 1, y § 94-1, nota 3) se dice que es una *medida izquierda de* HAAR si cumple las condiciones: 1º) μ es invariante respecto de las traslaciones izquierdas, es decir, para cada $X \varepsilon B$ y cada $y \varepsilon E$ es $\mu(y \& X) = \mu(X)$; 2º) Para cada conjunto compacto C, su medida $\mu(C)$ es finita; 3º) Para cada conjunto abierto G no vacío, su medida es positiva, $\mu(G) > 0$. Análogamente se define una *medida derecha de* HAAR, si en 1º) se postula $\mu(X \& y) = \mu(X)$.

El teorema fundamental dice que *para todo grupo topológico de un espacio localmente compacto existe una medida izquierda de* HAAR *que es única a menos de un factor constante*; es fácil ver que si μ es una medida izquierda de HAAR y si se define $\nu(X) = \mu(X^{-1})$, entonces ν es una medida derecha de HAAR.

La demostración del teorema fundamental parte de un conjunto U_0 tomado como de referencia en la clase de los conjuntos abiertos no vacíos U cuyas clausuras son compactas. Dado un cualquier abierto G, existe un número mínimo finito de sus traslaciones izquierdas que cubren el conjunto compacto $\overline{U}$, número finito que designaremos por $(U:G)$ y así el "tamaño" de U respecto de U_0 puede venir dado por $\tau_G(U) = (U:G)/(U_0:G)$. Como $1 \leqslant (A:C) \leqslant (A:B)(B:C)$, resulta $1/(U_0:U) \leqslant \tau_G(U) \leqslant (U:U_0)$ y por tanto para U fijo es $\tau_G(U)$ una funcional *acotada* de G. La demostración de S. BANACH efectuada en un espacio métrico, utiliza ahora una sucesión de esferas V_n de centro u y radio $1/n$, para que al hacer $G = V_n$ se obtenga una sucesión *acotada* de números $\{\tau_n\}$ respecto de la que define un límite generalizado $\tau = \text{limg}_n \tau_n$ con las siguientes propiedades: 1º) Es una funcional lineal aditiva, es decir, $\text{limg}_n(a\tau_n + b\sigma_n) = a\,\text{limg}_n \tau_n + b\,\text{limg}_n \sigma_n$; 2º) Es $\lim_n \inf \tau_n \leqslant \text{limg}_n \tau_n \leqslant \lim_n \sup \tau_n$ y por tanto el límite generalizado coincide con el ordinario cuando éste existe; 3º) $\text{limg}_n \tau_{n+1} = \text{limg}_n \tau_n$ que implica la invariancia del límite generalizado al suprimir de la sucesión un número finito cualquiera de sus términos. Dicho límite generalizado se construye en la siguiente forma: Para cada sucesión acotada $\{\tau_n\}$ se introduce $p(\{\tau_n\})$ como el extremo inferior para todos los conjuntos finitos de números naturales $i_1, i_2, \ldots, i_k$, de los números

$$\lim_n \sup \left[\left(\sum_{j=1}^{k} \tau_{n+i_j} \right) / k \right].$$

Este promedio generalizado cumple $p(\{a\tau_n\}) = a\,p(\{\tau_n\})$ para $a \geqslant 0$ y es subaditivo, es decir, $p(\{\tau_n + \sigma_n\}) \leqslant p(\{\tau_n\}) + p(\{\sigma_n\})$. Entonces, por aplicación del famoso teorema de HAHN-BANACH de prolongación de una funcional lineal aditiva, acotada por una funcional subaditiva, se ve que puede principiarse tomando para una particular sucesión acotada $\{\tau_n\}$ como límite generalizado el mismo $p(\{\tau_n\}) = \text{limg}_n \tau_n = \tau$. En efecto, dicho teorema dice que si S es un subespacio lineal de un espacio lineal L (cap. II, nota III, b_3; cfr. § 90-1), si $p(x)$ es una funcional subaditiva en L tal que $p(ax) = a\,p(x)$ para $a \geqslant 0$ y si $\tau(x)$ es una funcional lineal aditiva en S, tal que $\tau(x) \leqslant p(x)$ para todo x de S, entonces existe una prolongación $\tau(x)$ a todo x de L como funcional lineal aditiva que cumple $\tau(x) \leqslant p(x)$ en L. En nuestro caso L es el espacio lineal de las sucesiones acotadas de números reales y tomemos para S las sucesiones cuyos términos reales son iguales entre sí. Para $U = U_0$ se obtiene $\{\tau_n\} = \{1\}$ con $p(\{1\}) = 1$, y en el subespacio lineal S de su-

cesiones $\{a\} = \{a, a, a, \ldots\}$, ($a$ real), es $\tau(\{a\}) = a\mathrm{p}(\{1\}) = a$, funcional lineal aditiva en S. Dada una sucesión acotada cualquiera $\{\tau_n\}$, se demuestra que la prolongación de $\tau(\{a\})$ a $\tau(\{a + b\tau_n\})$ con b real cualquiera, se efectúa mediante $\tau(\{a + b\tau_n\}) = \tau(\{a\}) + bt = a + bt$, para un t que cumpla $-\mathrm{p}(\{-a - \tau_n\}) - \tau(\{a\}) \leqslant t \leqslant \mathrm{p}(\{a + \tau_n\}) - \tau(\{a\})$, probándose con el axioma de ZERMELO (§ 94-7) que así se alcanza a llenar todo L. En nuestro caso, se verifica $\mathrm{p}(\{a + \tau_n\}) = \mathrm{p}(\{\tau_n\}) + a$ para todo a real y basta que t cumpla $-\mathrm{p}(\{-\tau_n\}) \leqslant t \leqslant \mathrm{p}(\{\tau_n\})$. Tomando $a = 0$, $b = 1$, $t = \mathrm{p}(\{\tau_n\})$ resulta $\tau(\{\tau_n\}) = t = \mathrm{p}(\{\tau_n\})$ como habíamos dicho.

Fundándose en la unicidad de la medida de HAAR se demuestra que para *otra* sucesión cualquiera acotada $\{\sigma_n\}$, la prolongación de HAHN-BANACH de la *misma* funcional τ a partir de $\{\tau_n\}$ daría también $\tau(\{\sigma_n\}) = \mathrm{p}(\{\sigma_n\})$.

Así queda determinado el "tamaño" $\tau(\mathrm{U})$ en referencia al de $\tau(\mathrm{U}_0) = 1$ y si agregamos a la familia de conjuntos U el vacío 0 con $\tau(0) = 0$ y el total E con $\tau(\mathrm{E}) = +\infty$ si E no es compacto, podremos emplear dicha familia en sustitución de los intervalos abiertos I de la definición [94-8] y sustituir en ésta la medida $|\mathrm{I}|$ por $\tau(\mathrm{U})$, dando lugar así por la análoga de [94-8] a una funcional $\mu(\mathrm{X})$ que por las propiedades de $\tau(\mathrm{U})$ se demuestra es una medida exterior de CARATHÉODORY y una medida izquierda de HAAR.

La unicidad de la medida de HAAR fué demostrada por J. VON NEUMANN (1936); otras demostraciones de la existencia y unicidad de la medida de HAAR partiendo de las hipótesis generales antes dichas y utilizando también el axioma de ZERMELO, han sido dadas por A. WEIL (1938) y H. CARTAN (1940). Imponiendo restricciones al espacio E considerado, la demostración primitiva de A. HAAR (*Der Maasbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen*, Ann. of Math. (II), *34*, 1933; p. 147) no utiliza el axioma de ZERMELO.

EJEMPLOS: Si E es el conjunto de números reales con la distancia usual y el grupo es el aditivo (& se interpreta como $+$), al tomar para U_0 el intervalo $(0; 1)$ se obtiene como medida μ de HAAR (izquierda = derecha) la medida de LEBESGUE (§ 94-3, *b*). Si E es el conjunto de los números reales positivos con la distancia usual, y el grupo es el multiplicativo (& se interpreta como .), al tomar para U_0 el intervalo $(1; e)$ (con e base la los logaritmos naturales, §8-8, c_2) se obtiene como medida μ de HAAR (izquierda = derecha) una que cumple $\mu[(a; b)] = \ln(b/a)$.

II. Generalizaciones de la integral de Lebesgue. — *a*) *Integración en los espacios abstractos.* — La definición y propiedades fundamentales de la integral de LEBESGUE dependen de las propiedades de la función de conjunto $\mu(\mathrm{X})$ que representa la medida (L), función infinitamente aditiva si se restringe a la familia de conjuntos medibles (L), los que entonces forman también una familia infinitamente aditiva (§ 94-5). Las propiedades de monotonía de la integral (§ 95-2) dependen también de que $\mu(\mathrm{X})$ es no-negativa. En un espacio topológico general E y respecto de una familia H de conjuntos X, infinitamente aditiva (§ 94-1, nota 3) diremos que $\mu(\mathrm{X})$ es una *función de medida* si es una función de conjunto infinitamente aditiva sobre H (§ 94, ejercicio 1) que admite sólo valores no-negativos (y por tanto es función creciente, § 94, ejercicio 4). Los conjuntos X de la familia H se llaman medibles (μ). Análogamente a § 94-8, dada una función numérica $\mathrm{f}(\mathbf{x})$ de punto $\mathbf{x}$ del espacio E (es decir, una funcional), se llama medible (μ) si para todo número real k es medible (μ) el conjunto de puntos x para los que $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \geqslant k$. Como en el caso de medida (L), mediante una dada medida exterior de CARATHÉODORY, restringida a los respectivos conjuntos medibles, se puede llegar a la función de medida sobre H (§ 94-3, 4, 5).

Procedimientos adecuados y equivalentes para definir la integral $\int_{\mathrm{X}} \mathrm{f}d\mu$ de una función no-negativa, medible (μ) en un conjunto X me-

dible (μ), pueden ser los dados bien en [95-1], bien en § 95, ejercicio 4-*a*, o ejercicio 5, o ejercicio 6, extendiéndose según [95-2] la definición a una función cualquiera medible (μ).

De la misma manera que la integral de RIEMANN-STIELTJES se extiende de una función de distribución creciente a una función de distribución de variación acotada (§ 78-6), es posible generalizar el anterior proceso de integración refiriéndolo a una función $\sigma(X)$ cualquiera de conjunto infinitamente aditiva sobre **H** (§ 94, ejercicio 1), sin más que aplicar la descomposición de JORDAN (§ 94, ejercicio 6) $\sigma(X) = \mu_1(X) - \mu_2(X)$, donde μ_1 y μ_2 son ya funciones infinitamente aditivas *crecientes* y si f es a la vez integrable (μ_1) y (μ_2), decir que f es integrable (σ) con valor $\int_X f\, d\sigma = \int_X f\, d\mu_1 - \int_X f\, d\mu_2$.

Pero así como las propiedades de §§ 95-2, 95-3 y los teoremas de convergencia de § 95-4 subsisten para la integral respecto de una función de medida $\mu(X)$, con demostraciones completamente análogas a las allí expuestas, en cambio para la integral $\int_X f\, d\sigma$ respecto de una función $\sigma(X)$ sólo infinitamente aditiva, pueden no subsistir las propiedades enunciadas en los teoremas 4, 5, 6 y 9 de § 95-2. Sin embargo, para $\int_X f\, d\sigma$ conservan su validez los teoremas 1, 2, 3, 7, 8, 10, 11 de § 95-2, la linealidad (§ 95-3, *b*) y el teorema 2 de convergencia de § 95-4.

b) *Integral de* LEBESGUE-STIELTJES. — Algunos autores llaman así a la anteriormente definida $\int_X f\, d\sigma$ respecto de una función $\sigma(X)$ de conjunto infinitamente aditiva sobre **H** (no necesariamente monótona), pero la mayoría emplea dicha designación para especializar la función de medida $\mu(X)$ en una medida de LEBESGUE-STIELTJES del espacio euclídeo E_n (nota I, *a*).

b_1) Para el caso de recta euclídea E_1, si se da la función de distribución $g(x)$ (creciente o aún de variación acotada) y se construye la función aditiva (que es única, cfr. § 94, ejercicio 7) coincidente en todo intervalo $I = (a, b)$ con la función de intervalo $\mu(I) = g(b) - g(a)$, se obtiene la integral (L-St) primeramente estudiada por J. RADON (1913). Toda integral (L-St) puede reducirse de varios modos a una integral (L); entonces la primera es una integral (R-St) (§ 78-1, nota 2), si la segunda es una integral (R). Así supuesta $g(x)$ acotada y creciente (en sentido amplio), hagamos corresponder a un punto x de continuidad de $g(x)$ el punto $\xi = g(x)$, y a un punto x_d de discontinuidad de $g(x)$ todo el intervalo *cerrado* $[g(x_d^-), g(x_d^+)]$; entonces un conjunto de las x es medible (g) si su correspondiente de las ξ es medible (L). Haciendo $F(\xi) = F[g(x)] = f(x)$, con $\alpha = g(a)$, $\beta = g(x)$, la existencia y valor del primer miembro de

$$\text{[XXIV-2]} \qquad (\text{L-St}) \int_a^b f(x)\, dg(x) = (\text{L}) \int_a^\beta F(\xi)\, d\xi$$

viene dado por la existencia y valor de su segundo miembro.

A un intervalo (abierto, semi-abierto o cerrado) de las x corresponde en la forma antes dicha, un punto o un intervalo (no necesariamente abierto) de las ξ y por tanto a un conjunto medible (B) de las x corresponde siempre un conjunto (B) de las ξ (§ 94-1). Dado un conjunto $C^{(x)}$ medible (L) de las x y su cápsula $G_\delta^{(x)}$ continente y núcleo $F_\sigma^{(x)}$ contenido, ambos borelianos de igual medida y por tanto con $G_\delta^{(x)} - F_\sigma^{(x)}$ de medida (L) nula (§ 94-6, nota 5), también serán borelianos los conjuntos $G_\delta^{(\xi)}$, $F_\sigma^{(\xi)}$ correspondientes en las ξ a los $G_\delta^{(x)}$, $F_\sigma^{(x)}$, pero $G_\delta^{(\xi)} - F_\sigma^{(\xi)}$ no será necesariamente de medida (L) nula y el conjunto $C^{(\xi)}$ correspondiente al $C^{(x)}$ puede no ser medible (L), ni aún siendo $g(x)$ continua (§ 94, ejercicio 13), y por tanto $C^{(x)}$ puede no ser medible (g). Sin embargo, si $g(x)$ es creciente y absolutamente continua (§ 95-5), a todo conjunto de las x de medida (L) nula, le corresponde un conjunto de las ξ de medida (L) nula y entonces a todo conjunto medible (L) de

las x corresponde un conjunto medible (L) de las ξ, es decir, aquel conjunto $C^{(x)}$ medible (L) de las x es en x también medible (g).

La [XXIV-2] y el teorema 2 de § 95-6 justifican inmediatamente, que si $g(x)$ es creciente (en sentido amplio) y *absolutamente continua*, sea

$$\text{[XXIV-3]} \qquad (\text{L-St}) \int_a^b f(x)\,dg(x) = (\text{L}) \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \quad ,$$

asegurando la existencia de uno de ambos miembros la del otro con igual valor.

Una función de distribución $g(x)$ *absolutamente continua* conserva la mensurabilidad (L) en (g), pero puede no conservar la integrabilidad (L) en (g) (como valor finito) de una determinada función $f(x)$.

Ejemplo 1. Sea $g(0)=0$, $g(x)=x^{3/2}\operatorname{sen}(\pi/x)$ para $x\neq 0$, que es de variación acotada, absolutamente continua y con derivada finita en todo punto de $[0;1]$, tal que en los intervalos $I_n=(4/(4n+1)<x<$ $<4/(4n-1))$ para $n>10$ es $\pi\sqrt{4n+1}>|g'(x)|>\pi\sqrt{4n-1}/8$; $(-1)^{n+1}g'(x)>0$; formemos la función

$$f(x) = (-1)^{n+1}(4n-1)^{-3/2}(16n^2-1)/8$$

en los intervalos I_n y nula en lo restante, que no es acotada pero integrable (L) en $[0;1]$, por ser convergente la serie $\sum(4n-1)^{-3/2}$ (§ 22-2, *b*), mientras que $f(x)g'(x)$ no es integrable (L), por ser divergente la serie $\sum(4n-1)^{-1}$, y en virtud de [XXIV-3] la $f(x)$ no será integrable (g) en $[0;1]$.

b_2) T. H. Hildebrandt (1918) ha aplicado a la integral de Stieltjes en E_1 el procedimiento de sumación de W. H. Young (1905) para definir la integral de Lebesgue, consistente en emplear la subdivisión del campo de integración en un número finito o *infinito numerable* de conjuntos medibles (B) sobre los que $g(x)$ tenga variación δ_r y siendo M_r y m_r los extremos de $f(x)$ en ellos, los extremos inferior y superior respectivamente de las sumas $\sum M_r\delta_r$, $\sum m_r\delta_r$, definen, cuando coinciden, la integral (H-L-S) de $f(x)$ respecto de $g(x)$. Pero paralelamente a lo que ocurre en la partición riemanniana (§ 78-1, nota 2), esta integral (H-L-S) es más general que la integral (L-St) antes considerada, pues si $g(x)$ es discontinua, puede existir la integral (H-L-S) sin que exista la (L-St) (cfr. § 78). En cambio, siempre que exista la integral (L-St), existe la (H-L-S) con igual valor, y para función de distribución $g(x)$ *continua*, la existencia de la integral (H-L-S) implica la de la (L-St) con igual valor.

Otro procedimiento de gran trascendencia en el análisis funcional moderno, es el de partir del teorema de F. Riesz sobre funcionales lineales continuas (§ 78-7) definidas en el campo de las funciones continuas y efectuar la prolongación de dichas funcionales para que queden definidas en campos de funciones más amplios.

c) *Integral* (R^S) *absoluta de* Rey Pastor. — Para remediar en lo posible las dos deficiencias de la integral (L) (teoría previa de las funciones medibles y ordenación por alturas, que excluye en E_1 la integrabilidad condicional) J. Rey Pastor considera el método de Cauchy-Riemann, con la sola modificación de admitir además de los intervalos de E_m, otros *conjuntos elementales*, para aprovechar la ventaja de la aditividad infinita; sin necesidad, no ya de la teoría, sino del concepto de *función medible*.

c_1) Def. 1. Llamaremos *conjuntos elementales* de E_m a los conjuntos abiertos, cerrados (§ 94-2, *b*) y a los nulos (L) (§ 82-2, def. 2).

Def. 2. Dada una función real cualquiera $f(x)$ en E_m, consideremos particiones de E_m, tal que cada una de ellas esté formada por un número *finito* o *infinito numerable* de conjuntos elementales (def. 1) que produzcan sumas de Riemann $s=\sum m_r\delta_r$, $S=\sum M_r\delta_r$ (§§ 83-1, 82-1, 48-2) que sean series *absolutamente convergentes*; si existe un conjunto

de dichas particiones tales que $\{s, S\}$ formen un par de clases contiguas (§ 7-6), su número frontera o elemento de separación, se llamará integral (R^g) absoluta de la función f(x).

La integral (R^g) sobre un conjunto X de E_m se define como integral (R^g) de la función que coincide con f(x) en X y es nula en el complementario.

La demostración de la ordenación $s_1 \leqslant S_2$ dada para las clases riemannianas (§§ 48-3, *a*, 82-1, 83-1) subsiste aquí gracias a la supuesta convergencia absoluta de las series que definen *s* y S.

Si la función está acotada y el conjunto X también lo está por un intervalo finito I_m, la definición anterior es equivalente a la obtenida considerando sólo particiones de I_m en un número *finito* de conjuntos elementales. Aún así, la integral (R^g) absoluta podrá existir aún cuando no exista la (R), pues hemos ampliado las clases *s* y S con nuevos elementos procedentes no sólo de una partición en intervalos, sino también en conjuntos elementales cualesquiera y cabe muy bien que ahora sean contiguas si antes no lo eran.

Especial interés tienen los conjuntos nulos (L), que no influyen en las sumas *s*, S por ser $m_r \cdot 0 = M_r \cdot 0 = 0$, incluso por convenio, cuando sean infinitos m_r ó M_r.

Ejemplo 2. Si f(x) es la función de Dirichlet (§ 23-3, ejemplo 4), la partición del intervalo (0; 1) en un abierto de medida δ arbitrariamente pequeña que cubra los puntos racionales y del cerrado complementario, donde es $f(x) = 0$, da las sumas $s = 0$, $S = \delta$; luego la integral (R^g) vale 0, mientras que la (R) no existe (§ 49-2, ejemplo). Nótese que la descomposición del intervalo en los dos conjuntos de puntos racionales e irracionales no entra en la def. 2, por no ser elemental el segundo. Claro está que demostrada la aditividad, resultará la descomposición $0 . 1 + 1 . 0 = 0$. También, si se sabe que dos funciones casi-iguales (§ 95-2) tienen la misma integral (R^g), entonces la función de Dirichlet casi-igual a la constante 0, tiene integral nula.

c_2) Cuando las clases *s* y S obtenidas con *todas* las particiones no sean contiguas, el extremo superior de *s* se llamará integral *inferior*; y el extremo inferior de las S es la integral *superior*. La igualdad de ambas es necesaria y suficiente para la existencia de la integral (R^g) absoluta. La existencia de una sola suma finita S asegura (a menos que valga $-\infty$) la existencia de la integral superior *finita*; en caso contrario se dirá que ésta es $+\infty$. Análogamente, cuando exista una suma finita *s*, la integral inferior es finita (o vale $+\infty$); y en caso contrario, se dirá que la integral inferior es $-\infty$.

c_3) Las propiedades de aditividad finita, linealidad, monotonía y valor medio se demuestran para la integral (R^g) absoluta con el mismo método y la misma sencillez que en §§ 48-5 y 48-6. Aquí también subsiste el teorema 1 de § 95-1, es decir, si f(x) es integrable (R^g) absolutamente, también lo es $|f(x)|$, no siendo cierto en general el recíproco, pues para la función $f_1(x)$ no medible (L) de § 94-8, nota 2, no existirá la integral (R^g) absoluta (teorema 2), mientras existe para $|f_1(x)| \equiv \frac{1}{2}$. Obsérvese también que aunque una función sea integrable (R^g) absolutamente en un conjunto X, puede no serlo en un conjuto parcial de éste y que aún siendo $0 \leqslant f(x) \leqslant F(x)$ en X y F(x) integrable (R^g) absolutamente en X, esto no asegura lo sea f(x); basta considerar como ejemplo para F(x) la función característica del conjunto X medible (L) y su restricción f(x) a un conjunto no-medible (L) contenido en X (§ 94-7, *b*).

c_4) Teor. 1. *Las funciones integrables* (L) *lo son también* (R^g) *absolutamente con el mismo valor.* En efecto, respecto de una partición de Lebesgue de la función truncada $f_K(x)$ (§ 95-1, *d*), podemos considerar otra *posterior* (§ 48-3, *a*) consistente en subdividir cada conjunto

donde $y_{r-1} \leqslant f(x) < y_r$ en una suma numerable de conjuntos cerrados (que forman su núcleo boreliano F_σ) más un conjunto nulo (L) (§ 94-6, nota 5), partición posterior formada por conjuntos elementales, cuyas respectivas sumas s y S estarán entre las [95-5] de LEBESGUE (§ 48-3, a) y por tanto, haciendo $K \to \infty$, la contigüidad de las clases de LEBESGUE implica la de las clases que definen la integral (R^K) absoluta.

TEOR. 2. *Toda función absolutamente integrable* (R^K) *es medible* (L) *e integrable* (L) *con igual valor.* En efecto, en la definición (R^K) se acota f(x) por dos escalonadas $m_i(x)$ y $M_i(x)$, cuyas integrales (L) en E_n son precisamente las sumas s_i y S_i de dicha definición (§ 95-2, teors. 2 y 8); si consideramos sendas sucesiones de escalonadas monótonas obtenidas por sucesivas particiones *posteriores* (§ 48-3, a), con s_i, S_i que converjan monótonamente al valor supuesto existente de la integral (R^K), las escalonadas $m_i(x)$, $M_i(x)$ convergerán respectivamente hacia funciones $m(x)$, $M(x)$ tales que

$$m_1(x) \leqslant m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x) \leqslant M_1(x)$$

y por el teorema de convergencia acotada (§ 95-4, teor. 2) será

$$\lim_i S_i = \lim_i (L) \int M_i(x)dx = (L) \int M(x)dx \quad ;$$
$$\lim_i s_i = \lim_i (L) \int m_i(x)dx = (L) \int m(x)dx \quad ,$$

y como ambos límites coinciden con el valor de la integral (R^K), resulta $(L)\int [M(x) - m(x)]dx = 0$, de donde (§ 95-2, teor. 9) es $M(x) = f(x) = m(x)$ en casi todo E_n y por tanto (§ 95-2, teor. 11) resulta f(x) medible (L) y además integrable (L) con igual valor que la integral (R^K) absoluta.

De los dos teoremas anteriores resulta la equivalencia de los métodos (L) y (R^K) absoluto, pero con este último se evita la teoría de la medida de conjuntos y de funciones, sin más que estudiar la medida boreliana de los conjuntos elementales (§ 94-2, b). Aún se puede introducir el concepto de conjunto medible como aquel cuya función característica es integrable (R^K) (con valor posiblemente $+\infty$), y deducir los teoremas de la teoría de la medida y de la integración (L) de los previamente demostrados en la teoría de la integración (R^K) absoluta.

d) *Integrales condicionalmente convergentes.* — d_1) El orden lineal establecido según las x crecientes en E_1 permite la definición de la integral (R-C) (§ 80-1), para cuya generalización por el método de A. HARNACK (§ 80-9) suponíamos implícitamente que el conjunto cerrado C de puntos singulares fuese no-denso (cualquier intervalo de E_1 contiene un subintervalo de puntos exteriores a C) y de extensión nula (§ 82-2, def. 1). Dichas definiciones pueden extenderse a la integral (L) sustituyendo en la definición 1 de § 80-1 la no acotación por la no integrabilidad (L) o no sumabilidad. Sea la función $f(x)$ medible (L) en el intervalo lineal (a, b), pero no integrable (L).

DEF. 3. Es x_0 *punto* HARNACK, *punto* (H) o *punto de no sumabilidad*, si la función $f(x)$ no es integrable (L) en todo intervalo que contenga en su interior o en un extremo el punto x_0.

Todos los puntos (H) son de discontinuidad infinita, pero no al revés.

DEF. 4. Sea H el conjunto cerrado de puntos (H) en el intervalo lineal I, tal que sea no-denso y de extensión nula (§ 82-2, def. 1). Si se cubren con un número finito de entornos de medida total ϱ, y es I_ϱ el conjunto de intervalos que queda al suprimir tales entornos, se define la integral de LEBESGUE-HARNACK por

$$[\text{XXIV-4}] \qquad (\text{L-Ha}) \int_I f(x)dx = \lim (L) \int_{I_\varrho} f(x)dx \qquad \text{para} \quad \varrho \to 0 \quad ,$$

siempre que el límite del segundo miembro exista.

Si algún extremo a ó b es punto (H), se cubrirá con un semi-entorno de radio ϱ; si es $b = +\infty$ punto (H), el semi-entorno será una semi-recta $x > 1/\varrho$.

Para el caso particular de un solo punto (H) se obtiene la definición de la integral (L-C) o de LEBESGUE-CAUCHY. Si la función $f(x)$ es integrable (R) en I_ϱ, la integral (L-Ha) se convierte en la integral (R-Ha) o de RIEMANN-HARNACK definida en § 80-9.

La integral (L-Ha) es *aditiva* (§ 80-9, a), pero como sucede para las series no absolutamente convergentes (§ 81-4 y 5), no es *infinitamente aditiva* (§ 95-2, teor. 8) y se aparta de la integral (L) en los teoremas de convergencia (§ 95-4). Sin embargo, la función integral (L-Ha) es continua, aún cuando no absolutamente continua (§ 95-5), tiene por derivada en casi todo punto a su integrando, y se establecen (§ 80-9, b y c) la regla de BARROW y la integración por partes con las mismas restricciones en I_e que para la integral (L) (§ 95-5, teor, 8, y § 95-6, teor. 1).

La suma de dos integrales (L-Ha) puede no ser una integral (L-Ha), no subsistiendo en general el teorema de aditividad funcional (§ 95-3); sin embargo, éste se cumple si los conjuntos H_1 y H_2 de ambos integrandos son disjuntos.

d_2) DEF. 5. Se obtendrá la *integración* (R^s) *condicional* si en def. 2 se admiten particiones que produzcan series *condicionalmente convergentes*, quedando subordinado el valor obtenido al *tipo de ordenación adoptado*.

Prefijar la ordenación en que se han de sumar las series condicionalmente convergentes que produzcan las particiones admitidas, es esencial para que la integral definida tenga un valor determinado, pues variando la ordenación podemos hacer que dicho valor sea uno arbitrario (§ 22-4, b_2). Un determinado método de integración (R^s) condicional según un orden prefijado merece ser tomado en cuenta si puede fijarse la regla de ordenación independientemente del integrando que se considere. Así puede ocurrir en E_1 donde existe una ordenación natural y caso particular importante de integración (R^s) condicional es el método (L-C), o más generalmente el (L-Ha) antes introducido.

EJEMPLOS: 3. La figura 326 representa la integración de una función no acotada de integral absoluta divergente; inaccesible, por tanto, al método (L). En las dos mitades de cada intervalo de la partición ter-

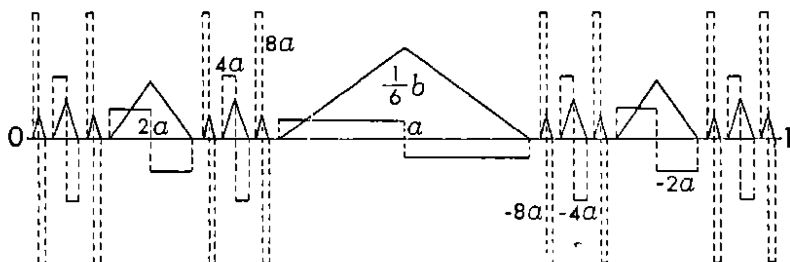


Fig. 326.

naria de CANTOR (§ 50-2, nota 3), es $f(x) = \pm 2^r a$ y en el conjunto ternario de CANTOR C es $f(x)$ arbitraria. Por ser nulo C, basta considerar la sucesión de intervalos contiguos (a_r, b_r) en cada uno de los cuales es nula la integral, luego también lo es en (0, 1), cualquiera que sea el orden de ellos. Menos inmediato es el cálculo en cada intervalo $(0, x)$; pero tanto en el orden *natural* de abscisas crecientes, como en la

ordenación *cantoriana*, resulta la misma función integral (§ 95-5), dibujada en la figura 326.

4. Sea $f(x) = a$ en el intervalo central de la partición ternaria de CANTOR (§ 50-2, nota 3), y en los 2^{n-1} intervalos de la partición *n-sima* sea, alternativamente, $\pm (3/2)^{n-1} a$. Las integrales respectivas valen $\pm a/3.2^{n-1}$; luego la suma absoluta es infinita, mientras que la suma en orden cantoriano o natural es $a/3$. He aquí, pues, una función integrable

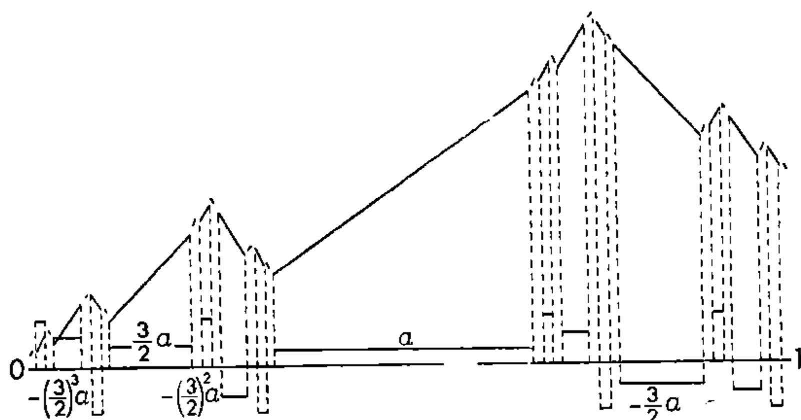


Fig. 327.

(R^E) [inaccesible al método (L) y al (L-C)], cuya función integral (§ 95-5) está dibujada en la figura 327.

Ordénese en forma de serie alternada y resultará el mismo valor; pónganse dos términos positivos y uno negativo y resultará la suma $a/2$ como integral en $(0, 1)$. Calcúlese de este modo y dibújese la nueva función integral en $(0, x)$. Nótese que en la figura se han multiplicado las ordenadas por 39. Si en cada partición del intervalo se colocan primero los sumandos positivos y después los negativos, resulta oscilante la integral. Ordénense los intervalos de modo que la integral sea $+\infty$ o bien $-\infty$.

d_5) Es deseable que una teoría de la integración tenga las tres siguientes propiedades: 1ª) La integrabilidad para toda función medible acotada en un conjunto de medida finita; 2ª) La aditividad infinita de la integral; 3ª) La admisión de integrales condicionalmente convergentes. La integral (L) tiene sólo las dos primeras propiedades, mientras que la integral (R-C) tiene sólo la 3ª. La integral (L-C) y sus generalizaciones que ahora examinamos tienen las propiedades 1ª y 3ª; pero resulta que las propiedades 2ª y 3ª son incompatibles.

En la definición [XXII-4] se supone que el conjunto H de no sumabilidad es de extensión nula. Para resolver el problema de la función primitiva (§ 95-5, nota 5), A. DENJOY ha introducido un proceso de integración, llamado por él *totalización*, en donde el conjunto de no sumabilidad puede ser cualquier conjunto cerrado no-denso. Anteriormente O. HÖLDER trató el problema de la función primitiva para el caso en que el conjunto de no sumabilidad es finito o numerable.

DEF. 6. Definida la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que el conjunto cerrado de sus puntos de no sumabilidad sea *finito* o *numerable*, se dirá que $F(x)$ continua en $[a, b]$ es su *primitiva de* HÖLDER,

si en todo intervalo parcial (a', b') donde f(x) sea sumable, la integral (L) de ésta viene expresada por la regla de BARROW F(b') — F(a'). La función f(x) se dirá entonces integrable según LEBESGUE-HÖLDER, adoptando por definición el valor

$$\text{[XXIV-5]} \qquad (\text{L-Hö}) \int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Es obvio que si f(x), acotada o no, es integrable (L) en (a, b), llamando F(x) a la función integral (§ 95-5), o sea en (a, x), se verifica la fórmula anterior, es decir, el método (L-Hö) comprende al (L); pero si f(x) no es sumable, cabe la existencia de alguna F(x) con las condiciones enunciadas, y el método (L-Hö) será una generalización del (L), *una vez demostrado un teorema de unicidad* análogo al visto en Cap. IX, nota VI, *d*. Condición esencial para tal unicidad es la hipótesis de ser *finito* o *numerable* el conjunto de no sumabilidad; basta considerar, por ejemplo, la derivada f(x) de la función F(x), deducida de la de CANTOR (Cap. IX, nota VI, *c*), cuyo conjunto de no sumabilidad es el C de CANTOR, no numerable, donde es f$(x) = +\infty$. Todas las funciones kF(x) (en particular la $y = 0$) cumplen la condición impuesta en definición 6, y dan resultados distintos.

d_4) Al suprimir la restricción de la numerabilidad, DENJOY tuvo que imponer más fuertes restricciones a la primitiva F(x). Cualquiera que sea el conjunto cerrado y no-denso C, consideremos los intervalos (a_r, b_r) *contiguos* que componen el complementario abierto de C (§ 94-2, teor. 4) y los conjuntos X intersección de un intervalo dado (a', b') con C. Los intervalos (a_r, b_r) se llaman *contiguos* a C, porque todo punto de C, o es extremo de uno de ellos o punto de acumulación de extremos, y por tanto, en cada entorno hay algún intervalo (a_r, b_r). Por el método de P. ROMANOWSKI (1932), la primitiva y la integral de DENJOY pueden definirse así:

DEF. 7. La *primitiva* de DENJOY es una función F(x) *continua* en $\mathrm{I} = [a, b]$ y tal que para todo conjunto perfecto C de I se verifique en la parte X de C cubierta por cada intervalo (a', b'), de extremos pertenecientes a C:

$$\text{[XXIV-6]} \qquad (\text{L}) \int_{\mathrm{X}} \mathrm{f}(x)\,dx + \sum[\mathrm{F}(b_r) - \mathrm{F}(a_r)] = \mathrm{F}(b') - \mathrm{F}(a') \quad ,$$

siendo (a_r, b_r) los intervalos contiguos a C, y absolutamente convergente la serie de incrementos en ellos. Entonces la integral (D) en (a, b) se define por

$$\text{[XXIV-7]} \qquad (\text{D}) \int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Una vez *probada su unicidad*, se ve que comprende a la (L-Hö) y por tanto a la (L); pero esta mayor generalidad se refiere al crecimiento de f(x) y no a la estructura, pues debe ser *medible* y *finita* (§ 95-5, nota 5) en casi todo (a, b). Las propiedades lineales y de monotonía se conservan; y si f$(x) \geqslant 0$, la integral (D) coincide con la (L). La importancia de esta integral de DENJOY reside en conservar la regla de BARROW, es decir, en integrar *toda derivada finita* (sea o no acotada) por la fórmula [95-21].

Nótese que la función del ejemplo 3 es integrable (D), mientras que la función del ejemplo 4, integrable por el método (R^{κ}) condicional, no lo es por el de DENJOY, es decir, *no es totalizable*.

A diferencia de lo que ocurría con la integral (L-Ha), la integral (D) posee la propiedad de aditividad funcional (§ 95-3).

d_5) Más tarde A. DENJOY, A. KHINTCHINE y W. H. YOUNG construyeron otra integral llamada *total general* o integral (D-K-Y) que se

adapta mejor a una caracterización lógico-axiomática de los procesos de integración en condiciones muy amplias. Una tal teoría de las operaciones integrales generalizadas puede estudiarse en el libro de S. SAKS citado en nota IV-4.

III. Rectificación de curvas y área de superficies. — *a) Aplicación de la teoría de* LEBESGUE *a la rectificación de curvas.* — Respecto del concepto geométrico de F-curva en E_3, se ha logrado obtener un perfecto ajuste entre el concepto de su longitud y su expresión mediante la integral (L) en estrecha relación con los conceptos de derivada, variación acotada y absoluta continuidad.

Para una curva C dada por su representación vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ con u tomado en el intervalo cerrado I_0 (§ 72-6, *a*), hemos definido, siguiendo a PEANO (§ 55-1, *c*) lo que se entiende por su longitud $L(I_0, \mathbf{r})$ como extremo superior de los perímetros de todas las quebradas inscritas y hemos demostrado (Cap. XV, nota I, *a*, teor.) la equivalencia de esta definición con la obtenida mediante el límite de los perímetros de las quebradas inscritas al tender a cero su norma. También hemos visto que estas definiciones de longitud *por abajo*, mediante perímetros de quebradas inscritas, son equivalentes a la definición de LEBESGUE *por arriba*, utilizando quebradas no necesariamente inscritas que tiendan uniformemente a la curva C (Cap. XV, nota II), para lo que se utiliza la propiedad de que la longitud es una funcional semicontinua inferiormente, propiedad que se toma como principio básico para generalizar la teoría al caso de las superficies.

a_1) Es fácil ver que la longitud $L(C) = L(I_0, \mathbf{r})$ es independiente de la particular representación analítica (§ 72-9) de la F-curva C considerada. Por el criterio de JORDAN (§ 55-9, *b*) una curva es rectificable cuando y sólo cuando una cualquiera de sus representaciones analíticas $\mathbf{r}(u)$ es de variación acotada en I_0. Una función vectorial $\mathbf{r}(u)$ se llama de variación acotada en I_0 si cada una de sus componentes escalares es de variación acotada en I_0 (§ 55-9, *a*), con definición análoga para la absoluta continuidad (§ 95-5, *b*, def.). Si una curva es rectificable, cualquiera de sus representaciones $\mathbf{r}(u)$ tendrá derivada $\mathbf{r}'(u)$ en casi todo I_0 (§ 95-5, teor. 2) y entonces existirá siempre como integral de LEBESGUE (cfr. con [73-1]) el primer miembro de

[XXIV-8] $$\int_{I_0} |\mathbf{r}'(u)|\, du \leqq L(I_0, \mathbf{r}) \quad ,$$

dándose el caso de igualdad cuando y sólo cuando $\mathbf{r}(u)$ *es absolutamente continua en* I_0 (§ 95-5, *c*, teor. 8).

Un ejemplo bien conocido de que la integral clásica [73-1] da un valor menor que la longitud de la curva, es el de la gráfica de la función $f(u)$ de CANTOR (Cap. IX, nota VI, *b*); $\mathbf{r}(u) = u\mathbf{i} + f(u)\mathbf{j}$, $(0 \leqslant u \leqslant 1)$, siendo 1 el valor del primer miembro de [XXIV-8] y 2 el del segundo miembro (§ 55-1, ejemplo 4).

Sin embargo, *toda* curva rectificable C *admite una representación óptima para la que subsiste la igualdad en* [XXIV-8], es decir, la longitud viene dada por la integral clásica [73-1] tomada en sentido de LEBESGUE. Basta adoptar como parámetro la abscisa curvilínea $s = L(I, \mathbf{r})$ (§ 55-1, *b*), pues la nueva representación de C: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ tiene $|\mathbf{r}'(s)| = 1$ en casi todo $0 \leqslant s \leqslant L(C)$ (§ 95-5, teor. 1) por lo que

$$\int_0^{L(C)} |\mathbf{r}'(s)|\, ds = L(C) \quad ,$$

resultando $\mathbf{r}(s)$ absolutamente continua.

Por otra parte, *cualquier* F-curva C *admite una representación* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, $u \in I_0$, *para la que* $\mathbf{r}'(u)$ *existe y es nula en casi todo* I_0, *haciendo* por tanto *nulo el primer miembro de* [XXIV-8].

a_2) Propiedades importantes de la rectificación de curvas que *no subsisten* al pasar a examinar el caso de las superficies, son las siguientes:

La longitud $L(C)=0$ cuando y sólo cuando la curva C se reduce a un punto, es decir, cuando $r(u)$ es constante en I_0.

Para una *curva rectificable* C *el volumen tridimensional de su huella* Γ (§ 72-9, *b*) dado por su medida de HAUSDORFF [XXIV-1] para $p=3$ (nota I, *b*) *es nulo* y lo mismo ocurre respecto del área bidimensional de las huellas de sus proyecciones sobre los planos coordenados, habiendo aún probado que son conjuntos de extensión nula, es decir, de área (R) nula (§ 82-2, nota 1). Así queda asegurada la intuitiva *delgadez* métrica y topológica de una curva rectificable. Las curvas de PEANO (Cap. VII, nota I) que llenan un área o un volumen, no son rectificables.

Si $\mu_1(\Gamma)$ es la longitud unidimensional (nota I, *b*) de la huella Γ de la curva C, para *cualquier* curva es siempre $\mu_1(\Gamma) \leqslant L(C)$, siendo *suficiente* que la curva sea del tipo de arco simple, es decir, *sin puntos múltiples* (§ 72-9, *c*) para que se dé el caso de *igualdad*.

La longitud $L(I_0, r)$ es una *funcional convexa* por cumplir la desigualdad de STEINER

$$[XXIV\text{-}9] \qquad L(I_0, r_1+r_2) \leqslant L(I_0, r_1) + L(I_0, r_2) \quad ,$$

equivalente a poner

$$L(I_0, \tfrac{1}{2}(r_1+r_2)) \leqslant \tfrac{1}{2}(L(I_0, r_1) + L(I_0, r_2)) \quad ,$$

siendo una de las dificultades que se presentan en el caso del área de las superficies que en él no subsista [XXIV-9].

b) *Área de las superficies según* LEBESGUE. — Para una superficie del espacio E_3 suficientemente regular para que exista la integral clásica [84-17], hemos definido su área como suma límite de "escamas" o elementos tangenciales planos de la superficie (§ 84-4), habiendo ya explicado la objeción que el clásico ejemplo de SCHWARZ (Cap. XXI, nota I) representa para ser considerada como área límite de las correspondientes a poliedrales inscritas.

Para superficies más generales de E_3, tales las F-superficies continuas (§ 72-9), se ha creado en estos últimos años una teoría paralela a la de rectificación de curvas, lo que partiendo de conceptos fundamentales dados por H. LEBESGUE y Z. DE GEÖCZE, han logrado L. TONELLI (1926) y S. SAKS (1927) para superficies uniformes con representación explícita [72-44] y más recientemente T. RADÓ y L. CESARI para el caso paramétrico general [72-43].

b_1) Aún en el caso de conjuntos planos de E_2, para los que se ha definido el área (R) (§§ 48-1, 54-1, 83-3, *d*, def.) y se ha generalizado su medida (§ 94) y el cálculo de ésta por la integral de LEBESGUE (§ 95), surgen delicados problemas si se considera un dominio cuya frontera no cumpla las restricciones impuestas en §§ 82-3, 82-4, 83-3, *d*). Parecería, que todo *recinto de* JORDAN *simplemente conexo*, es decir, el interior de toda curva simple cerrada (§ 72-9, *c*), habría de ser cuadrable (R) y nula (L) la frontera. Sin embargo, existen las llamadas *curvas de* OSGOOD (naturalmente no rectificables, § 82-2, nota 1) que son curvas simples cerradas de JORDAN de medida (L) bidimensional positiva.

EJEMPLO. Recordemos las curvas de PEANO (Cap. VII, nota I) que tienen área positiva y modifiquemos la construcción para que no tengan puntos múltiples. Consideremos la curva C de SCHOENFLIES allí explicada modificando la construcción al separar los 9 cuadrados de la primera etapa, cuyos lados miden 1/3, distanciándoles $1/3^2$ y uniendo entre si los vértices separados mediante segmentos, como indica la fig. 328.

Los 9 cuadrados de lado $1/3^2$ que forman cada cuadrado ya separado, los separamos análogamente una distancia $1/3^4$; los cuadrados subsiguien-

tes los separamos $1/3^6$; etc. El lado del cuadrado resultante tiene longitud final $1+(2/3^2)+(2.3/3^4)+(2.3^2/3^6)+\ldots=1+(1/3)$. Para formar una curva simple cerrada, únanse los extremos A y B de la curva resultante (situados en una diagonal) por una quebrada isósceles APB con P

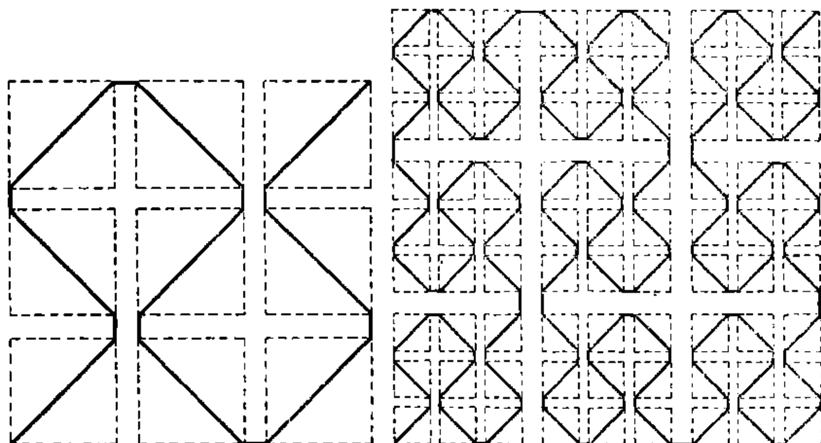


Fig. 328.

en la prolongación de la otra diagonal. En cada etapa, los cuadrados necesarios para cubrir C son los que componían el cuadro inicial, de área 1, luego la *extensión exterior* es 1; y como la *interior* es 0 resulta que la curva C *no es cuadrable* (R) y sería absurdo decir que tiene área (R). Sin embargo, *tiene área* (L) *positiva* de valor igual a su extensión exterior (§ 94-2, teor. 6).

b_2) Dadas dos F-superficies S_1 y S_2 en E_3 de una cierta clase, por ejemplo de tipo rectangular (§ 72-9, *c*), definamos su distancia de FRÉCHET-MCSHANE $\delta(S_1, S_2)$ en la siguiente forma: Sea $T_1(R_1)=\Gamma_1$ una representación de S_1 y $T_2(R_2)=\Gamma_2$ una representación de S_2; diremos que $\delta(S_1, S_2)$ es la distancia $\delta\geqslant 0$ de las superficies S_1 y S_2 si δ es el extremo inferior de los números positivos $\varepsilon>0$ con la siguiente propiedad: existe un homeomorfismo $H_\varepsilon(R_1)=R_2$ que conserva las orientaciones prefijadas de R_1 y R_2, y tal que la distancia $\varrho[T_1(x_1), T_2H_\varepsilon(x_1)]\leqslant\varepsilon$ para todo punto x_1 de R_1. Para $R_1\neq R_2$ y $T_1\sim T_2$ (*ts*) (§ 72-9) se ve ya inmediatamente que puede ser $\delta=0$ con $T_1\neq T_2$, pero se puede probar que respecto de las *F-superficies* S_1 y S_2, no tan sólo la distancia es independiente de las representaciones empleadas, sino que además cumple las condiciones:

1º) $\delta(S_1, S_2)=\delta(S_2, S_1)$;

2º) $0\leqslant\delta(S_1, S_2)<+\infty$;

3º) $\delta(S_1, S_2)=0$ *cuando y sólo cuando* S_1 *y* S_2 *coinciden como F-superficies*;

4º) $\delta(S_1, S_3)\leqslant\delta(S_1, S_2)+\delta(S_2, S_3)$, (*desigualdad triangular*).

Si tenemos una sucesión S_n de F-superficies en E_3 de una cierta clase, por ejemplo de tipo rectangular, diremos que la sucesión S_n *converge hacia* S, en notación $S_n\to S$, *cuando y sólo cuando* $\delta(S_n, S)\to 0$.

b_3) Diremos que una F-superficie de tipo rectangular (§ 72-9, c) es una *poliedral* P si admite una representación

[XXIV-10] $\quad P: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad , \quad (u, v) \varepsilon R_0 \quad ,$

tal que el contorno de R_0 sea un polígono convexo y R_0 puede ser dividido en un número finito de triángulos rectilíneos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ en los que las funciones escalares componentes de $\mathbf{r}(u, v)$ sean lineales. A los triángulos t_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ les corresponde en E_3 conjuntos de puntos τ_s que forman triángulos planos rectilíneos posiblemente degenerados en segmentos o puntos, de área elemental (§ 48-1) $|\tau_s| \geqslant 0$. Llamaremos *área elemental* E(P) de la poliedral P al valor $E(P) = \sum_1^n |\tau_s|$.

Dada una superficie S, existe siempre una sucesión de poliedrales P_n, tal que $P_n \to S$ en el sentido visto en b_2).

El *área de* LEBESGUE A(S) de la superficie S queda definida por

[XXIV-11] $\quad A(S) = \underset{P_n}{\text{extr inf}} \{\liminf_n E(P_n)\} \quad ,$

donde el extremo inferior se toma respecto de todas las posibles sucesiones P_n de poliedrales (incluso no inscritas) tales que $P_n \to S$.

La funcional A(S), *posiblemente infinita*, es independiente de la particular representación $\mathbf{r}(u, v)$ que tenga S y al ser introducida análogamente a [XV-2] será también *semicontinua inferiormente* en la clase de las F-superficies de tipo rectangular, es decir

[XXIV-12] $\quad A(S) \leqslant \liminf_n A(S_n) \quad ,$

para toda sucesión $S_n \to S$. La desigualdad $<$ aparece efectivamente, por ejemplo, respecto de las sucesiones [XXI-2] consideradas en la paradoja de SCHWARZ.

Modernamente se ha demostrado que es equivalente tomar en [XXIV-11] sólo poliedrales inscritas $P_n \to S$, difícil problema que había propuesto GEÖCZE.

El área de LEBESGUE es una funcional A(S) con las siguientes propiedades: 1º) A(S) está definida, es no negativa y posiblemente infinita para toda F-superficie de tipo rectangular; 2º) A(S) = E(P) para toda F-poliedral P de tipo rectangular; 3º) A(S) es una funcional semicontinua inferiormente, es decir, cumple [XXIV-12]; 4º) Para toda superficie S existe una sucesión de poliedrales P_n tal que $P_n \to S$ y $E(P_n) \to A(S)$.

Además, *estas propiedades son características*, pues de ellas fácilmente se deduce que toda funcional $\alpha(S)$ que las cumpla es tal que $\alpha(S) = A(S)$. En particular, si $\alpha(S)$ sólo cumple las tres primeras condiciones, para una sucesión P_n que cumpla $P_n \to S$ y $E(P_n) \to A(S)$ será

[XXIV-13] $\quad \alpha(S) \leqslant \liminf_n \alpha(P_n) = \liminf_n E(P_n) = A(S) \quad ,$

es decir, el área de LEBESGUE es la máxima funcional sobre las superficies, semicontinua inferiormente, que coinciden con el área elemental sobre las poliedrales.

b_4) Para el caso de superficie S dada en forma explícita

[XXIV-14] $\quad z = f(u, v) \quad , \quad (u, v) \varepsilon R \quad ; \quad a_1 \leqslant u \leqslant b_1 \quad , \quad a_2 \leqslant v \leqslant b_2 \quad ,$

L. TONELLI introdujo conceptos de *variación acotada* y *absoluta continuidad linealmente iteradas* y por tanto no propiamente bidimensionales. Para cada v fijo en $a_2 \leqslant v \leqslant b_2$ es $f(u, v)$ función continua de u con variación total (§ 55-9, a), finita o infinita,

$$\underset{u=a_1}{\overset{u=b_1}{V}} f(u, v) = V_u(v).$$

Se dirá que $f(u, v)$ es de VAT$_u$ en R (*de variación acotada según* To-

NELLI *respecto de u en* R) cuando y sólo cuando $V_u(v)$ es sumable en $a_2 \leqslant v \leqslant b_2$. Análogamente se define la función $f(u, v)$ de VAT_v en R mediante la sumabilidad de

$$\underset{v=a_2}{\overset{v=b_2}{V}} f(u, v) = V_v(u) \quad \text{en} \quad a_1 \leqslant u \leqslant b_1.$$

Se dirá que $f(u, v)$ es ACT_u en R (*absolutamente continua según* TONELLI *respecto de u en* R) cuando y sólo cuando es de VAT_u en R y para casi todo $[a_2 \leqslant v \leqslant b_2]$ es $f(u, v)$ absolutamente continua (AC) como función de u (§ 95-5, *b*, def.) en el intervalo $a_1 \leqslant u \leqslant b_1$.

Se dirá que $f(u, v)$ es de VAT en R (*de variación acotada según* TONELLI *en* R), cuando y sólo cuando $f(u, v)$ es a la vez de VAT_u y VAT_v en R. Se dirá que $f(u, v)$ es ACT en R (*absolutamente continua según* TONELLI en R), cuando y sólo cuando $f(u, v)$ es a la vez ACT_u y ACT_v en R.

Designando por R° el interior de un recinto de JORDAN R, se llega así al teorema capital de L. TONELLI (1926) que resuelve en forma completamente paralela al caso (*a*) de las curvas, el problema del área de superficie dada en representación explícita:

Representada una superficie S *en forma explícita* $z = f(u, v)$, $(u, v) \varepsilon R$, *su área de* LEBESGUE A(S), *es finita cuando y sólo cuando* $f(u. v)$ *es de* VAT *en* R. *Si* A(S) *es finita, entonces las primeras derivadas parciales* f_u, f_v *existen en* c. t. R° *y son sumables en* R°, *siéndolo también* $\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}$. *Además es*

$$[\text{XXIV-15}] \qquad \iint_{R^\circ} \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}\, du\, dv \leqq A(S) = A(R, f) \quad ,$$

valiendo el signo de igualdad cuando y sólo cuando $f(u, v)$ *es* ACT *en* R.

b_5) Para el caso paramétrico general, el primer problema a resolver, dada una superficie S por cualquiera de sus representaciones $r = r(u, v)$, es encontrar una caracterización de sus funciones componentes para que el área A(S) sea finita. Como ya ocurre en la teoría elemental al considerar los jacobianos que se refieren a *pares* de funciones, S. BANACH observó que dicha caracterización debe ser buscada no en dichas componentes, sino en los tres pares que representan las proyecciones de la superficie S sobre los planos coordenados y pueden considerarse como *transformaciones planas* del plano (u, v) en dichos planos coordenados.

Modificando conceptos previos de S. BANACH, por métodos diversos que resultan equivalentes, T. RADÓ y L. CESARI han introducido conceptos de variación acotada (*e*VA) y absoluta continuidad (*e*AC) de una transformación plana, adecuados para poder afirmar que una superficie dada por $r = r(u, v)$ en $(u, v) \varepsilon R$ *tiene* A(S) *finita cuando y sólo cuando las tres correspondientes transformaciones planas de* R *en las proyecciones de* S *sobre los planos coordenados son* eVA (*esencialmente de variación acotada*).

Si además, para A(S) finita, resulta que la representación analítica $r = r(u, v)$ es tal que los tres jacobianos [72-55] existen en c. t. R°, entonces la función $W(u, v)$ dada por [72-57] es sumable en R° y es

$$[\text{XXIV-16}] \qquad \iint_{R^\circ} W(u, v)\, du\, dv \leqslant A(S) \quad ,$$

valiendo el signo de igualdad cuando y sólo cuando aquellas tres transformaciones planas son eAC *en* R.

J. W. T. YOUNG ha probado que *cualquier* superficie continua de tipo rectangular admite una representación $r = r(u, v)$ tal que los jacobianos [72-55] existen y son nulos en c. t. R°, haciendo por tanto también nulo el primer miembro de [XXIV-16]. Por otra parte, llamando

representación *casi-conforme* a una $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ para la que sus componentes tengan primeras derivadas parciales en c. t. R, de cuadrado sumable en R, y en c. t. R se cumplan las igualdades clásicas de la representación conforme, $g_{11} = g_{22}$, $g_{12} = 0$, con los g_{ik} dados por [72-45], C. B. MORREY ha demostrado que cualquier superficie abierta no degenerada de área de LEBESGUE A(S) *finita*, admite una representación casi-conforme para la que sus componentes son ACT (b_4), caso particular de *e*AC, y el área de LEBESGUE A(S) viene dada por la integral clásica [84-17] en sentido (L), primer miembro de [XXIV-16], convertida en igualdad.

T. RADÓ y L. CESARI han creado independientemente conceptos de jacobianos generalizados, tales que para una superficie de área *finita* A(S), *cualquiera* de sus representación analíticas $r = \mathbf{r}(u, v)$ posea en c. t. R° dichos jacobianos generalizados sumables, de modo que subsista [XXIV-16], valiendo también el signo de igualdad cuando y sólo cuando la representación es *e*AC.

A pesar de que E. J. MCSHANE ha probado que existen superficies abiertas no degeneradas de área finita, sin plano tangente en ningún punto, en contraste con las curvas rectificables para las que existe $\mathbf{r}'(u)$ en c. t. I_0 (a_1), L. CESARI ha determinado para una representación cualquiera de una superficie S de área *finita* un triedro trirrectángulo existente en c. t. R° tal que sus propiedades justifican que se llame a una de sus caras *plano casi-tangente* y a la arista opuesta: *dirección casi-normal*.

b_6) Veamos discrepancias importantes sobre el comportamiento de las curvas y de las superficies.

Dada una pequeña esfera, toda curva suficientemente corta, de forma cualquiera, podrá encerrarse en ella; en cambio, si consideramos un rectángulo largo y estrecho, vemos que la proposición anterior no subsiste para las superficies. Tampoco subsiste la propiedad análoga a la anulación del volumen tridimensional de la huella de una curva rectificable (a_2); en efecto, sea $\varepsilon > 0$ muy pequeño; si una curva debe pasar a una distancia menor que ε de todo punto contenido en el cubo unidad, la longitud de la curva deberá ser muy larga; en cambio, doblando adecuadamente un rectángulo muy largo y muy estrecho, podemos obtener una superficie de área tan pequeña como se quiera y que pase a una distancia menor que ε de todo punto contenido en el cubo unidad. Aún más, por paso al límite del trivial ejemplo anterior, Z. DE GEÖCZE probó la existencia de una superficie de área cero que llena un cubo. Con el mismo procedimiento es posible también construir una superficie S de área cero, imagen del cuadrado unidad R_0 tal que la huella de S contenga no tan solo todos los puntos de R_0, sino algunos de ellos cubiertos varias veces; sin embargo, es $0 = A(S) < A(R_0) = 1$.

A. S. BESICOVITCH ha construído una superficie S homeomorfa con el cuadrado unidad R_0 de área finita y cuya huella Γ tenga volumen positivo, es decir, $A(S) < +\infty$, $\mu_3(\Gamma) > 0$, $S \sim R_0$ (*ts*); (R_0: $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$).

Con una pequeña modificación del ejemplo anterior, dados $\delta > 0$ tan pequeño como se quiera y $H > 0$ tan grande como se quiera, BESICOVITCH construye, en analogía a una curva de OSGOOD (b_1), una F-superficie Σ del tipo esféricamente cerrado (§ 72-9), de $\mu_3(\Sigma) > 0$ y tal que si D es el recinto (abierto) encerrado por Σ, de medida tridimensional $|D|$, y consideramos el volumen interior $V_i = |D|$ y el volumen exterior $V_e = |D| + \mu_3(\Sigma)$, resulta $A(\Sigma) < \delta$ y $V_e > H$. La *desigualdad isoperimétrica* que cumple la superficie esférica respecto de las demás, puede formularse diciendo que toda superficie esféricamente cerrada de área A determina un volumen V que cumple $V^2 \leqslant A^3/(36\pi)$, lo que *no se verifica para el volumen exterior* V_e *del ejemplo anterior.* Sin embargo, la desigualdad isoperimétrica queda verificada para el volumen interior V_i, lo que sugiere que *sea el concepto de volumen interior el adecuado al*

concepto de área de una superficie esféricamente cerrada; a este respecto, L. TONELLI y T. RADÓ han probado la propiedad isoperimétrica de la esfera en el espacio euclídeo E_3 en forma muy general, mediante el empleo del área de LEBESGUE.

c) La teoría del área de LEBESGUE resuelve la paradoja de SCHWARZ (cap. XXI, nota I) con alcance extraordinario, pues se aplica al tipo más general de superficies continuas. Sin embargo, muchos matemáticos, cautivados por su carácter intuitivo, han intentado definir el área como *límite* de poliedrales *inscritas*, estableciendo tanto en las superficies como en las poliedrales, restricciones adecuadas para que el nuevo concepto no entre en conflicto con las fórmulas clásicas establecidas para los casos elementales. Así, M. FRÉCHET ha establecido la siguiente definición de área que tiene carácter geométrico intrínseco: *El área* $\alpha(S)$ *de una superficie* S *de clase* K *se define como el límite común de sucesiones de áreas de poliedrales* P_n *inscritas a la superficie* S *cuando la arista máxima de* P_n *tienda a cero, pero* P_n *variando de manera que se puedan descomponer sus caras en triángulos cuyos vértices sean puntos de* S *y tales que el extremo superior de los ángulos sea un número fijo inferior a dos rectos*. Las condiciones de regularidad de la superficie que la incluyen en la clase K para que la anterior definición tenga sentido y sea compatible con los casos elementales, han sido estudiadas por FRÉCHET y por otros autores. Por ejemplo, pueden adoptarse como condiciones suficientes de regularidad las que cumplen la clase K de superficies para las que S no tiene punto múltiple y existe una representación paramétrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ de S tal que sus funciones componentes escalares tengan derivadas primeras parciales continuas con $W(u, v) \neq 0$ en R_0.

Que dicha clase K no puede ser muy amplia y que la definición por límite de poliedrales *inscritas* (no por extremo inferior [XXIV-11] del problema de GEÖCZE (b_3)) ha de tener siempre un carácter muy restringido y artificial, ha sido puesto de manifiesto por BESICOVITCH al dar un ejemplo de superficie S continua en forma explícita [XXIV-14] tal que es posible dividir el cuadrado paramétrico R en triángulos arbitrariamente pequeños *de forma muy próxima a cualquiera dada anteriormente* y tal que el área de las respectivas poliedrales inscritas tengan un área, bien arbitrariamente grande, bien tan próxima como se quiera a A(S).

IV. **Bibliografía.** — **Para iniciar el estudio de la integral (L) en su forma clásica es siempre recomendable la sucinta exposición.**

C. DE LA VALLÉE POUSSIN: *Intégrales de* LEBESGUE, *Fonctions d'ensemble, Classes de* BAIRE (Gauthier-Villars, Paris; 2ª ed., 1934; reimpr. 1946).

Del mismo tipo clásico y conciso, evitando sumergirse excesivamente en las profundidades de la teoría de funciones reales, han seguido la monografía

J. C. BURKILL: *The* LEBESGUE *integral* (Cambridge Tracts, 1951),

y los capítulos X, XI y XII de la excelente y didáctica obra de TITCHMARSH (citada en Cap. XI, nota IV, 3).

Para penetrar en la esencia de la integral (L) es indispensable consultar el profundo libro de H. LEBESGUE (citado en Cap. XIII, nota V, 3). Una minuciosa y completa exposición hasta la fecha de su publicación, de todo lo referente a integración, contiene el monumental tratado de E. W. HOBSON (citado en Cap. IX, nota VIII, 3). Un tratado moderno sobre la teoría de la medida y la integración, con enfoque general y abstracto y su última parte dedicada a aplicaciones, constituye el Vol. III: *Integralrechnung* (2ª ed., 1955) de la obra de HAUPT, AUMANN y PAUC citada en Cap. XVIII, nota III, 1.

2. Gran trascendencia ha tenido el método geométrico (hecha previamente la sistematización de la medida) introducido en la obra de C. CARATHÉODORY (citada en Cap. IX, nota VIII, 3) que ha sido seguido

para las funciones acotadas, aunque para las no acotadas se prefiera seguir la teoría de las primitivas de Perron, en

E. Kamke: Das Lebesgue*sche Integral. Eine Einfürung in die neuere Theorie der reellen Funktionen* (Teubner, Leipzig, 1925).

Una versión modernizada y enteramente rehecha de la obra precedente, con cambio de énfasis de la integral de Lebesgue en una dimensión, a la de Lebesgue-Stieltjes en n dimensiones, es:

E. Kamke: *Das* Lebesgue-Stieltjes-*Integral* (Teubner, Leipzig, 1956).

El mismo método geométrico adopta la didáctica obra de H. Kestelman (citada en Cap. XIII, nota V, 2) que con lujo de simbolismo trata las integrales (R) y (L) con nociones de la (D).

Escrita en el estilo clásico de Carathéodory, Hahn y Hausdorff, introduce suave y cuidadosamente los puntos delicados y señala bien en qué consiste la superioridad de la integral de Lebesgue sobre la de Riemann, la didáctica obra

C. Goffman: *Real functions* (Rinehart, Nueva York, 1953).

Sacrificando a veces la precisión y la claridad, dedica una breve exposición según moldes clásicos a las integrales de Riemann, Stieltjes y Lebesgue la obra:

R. L. Jeffery: *The Theory of Functions of a Real Variable* (Toronto Press, 1951).

Curso excelente, traducido del ruso, para el estudio inicial de la teoría superior de las funciones de variable real, conteniendo conjuntos medibles, integrales de Lebesgue y de Stieltjes, continuidad absoluta y derivación es

I. P. Natanson: *Theory of functions of a real variable* (Ungar, Nueva York, 1955).

Siguiendo las ideas de Riesz, introduce la integral de Lebesgue por sus propiedades funcionales, para luego, mediante ella, estudiar los conjuntos medibles y, en el último capítulo, la integral de Lebesgue-Stieltjes, la excelente obra de Graves (citada en Cap. IX, nota VIII, 2). En análogo orden de ideas desarrolla su exposición la obra

E. J. McShane: *Integration* (Princeton Univ. Press, 1944).

En castellano, además de la de J. Rey Pastor (citada en Cap. VI, nota VI, 2, *Elementos de la teoría de funciones*, 3ª ed., Iberoamericana, Madrid, 1953) que ha servido de base para nuestra exposición, están las notables obras de A. E. Sagastume (citada en Cap. IX, nota VIII, 2) y

S. Ríos: *Teoría de la integral* (Rev. Acad. Ciencias, vol. *36*, Madrid, 1942; reimp. por C. Bermejo),

resumida en

S. Ríos: *Conceptos de integral* (Monografías del Cons. Sup. Invest. Cient., Madrid, 1946).

Basada sistemáticamente en el uso de escalonadas (§ 95-3) está la original exposición de la obra de Vitali y Sansone (citada en Cap. IX, nota VIII, 3).

3. Principalmente a la integral de Lebesgue-Stieltjes con capítulos sobre funciones aditivas de conjunto está dedicada la obra de Picone y Viola (citada en Cap. XXI, nota II, 1).

Mostrando bien la importancia de la teoría de la medida en el fundamento del cálculo de probabilidades, contiene una didáctica introducción de la integral de Lebesgue-Stieltjes la famosa y didáctica obra

H. Cramér: *Mathematical Methods of Statistics* (Princeton Univ. Press, 1946; trad. castellana: *Métodos matemáticos de estadística*, Aguilar, Madrid, 1953).

La aplicación de la teoría de la medida a la teoría de la probabilidad, donde una variable aleatoria es una función medible, un acontecimiento es un conjunto puntual medible cuya medida es su probabilidad, la esperanza matemática es la integral de la función, los teoremas de convergencia en medida (probabilidad) o en casi todo punto (certeza probabilística) tienen un inmediato significado en los teoremas de conver-

gencia básicos de la teoría de la probabilidad, alcanza su plena fecundidad en las magníficas obras:

J. L. DOOB: *Stochastic processes* (Wiley, Nueva York, 1953),

B. V. GNEDENKO y A. N. KOLMOGOROV: *Limit distributions for sums of independent random variables* (trad. del ruso con anotaciones de K. L. CHUNG y apéndice de J. L. DOOB; Addison-Wesley, Cambridge Mass., 1954).

Contiene material básico sobre teoría de conjuntos, medida e integral de LEBESGUE la obra de orientación moderna traducida del ruso, orientada hacia el estudio de espacios métricos y espacios lineales normados, y las ecuaciones en operadores lineales:

A. N. KOLMOGOROV y S. V. FOMIN: *Elements of the theory of functions and functional analysis*. Vol. I: *Metric and normal spaces* (Graylock Press, Rochester, 1957).

4. Tratados completos y enciclopédicos sobre la teoría de la integral y funciones de conjunto, con el estudio de la integración en espacios abstractos y la generalización del concepto de la medida, son

S. SAKS: *Theory of the integral* (2ª ed., ZSFKN, Varsovia, 1937, y Stechert, Nueva York; más didáctica, pero de menor alcance era la 1ª ed.: *Théorie de l'intégrale*, Varsovia, 1933);

H. HAHN y A. ROSENTHAL: *Set Functions* (Univ. of New Mexico, Albuquerque, 1948; continuación de la obra de H. HAHN citada en Cap. IX, nota VIII, 3).

Da una detallada exposición de las investigaciones de su autor sobre la teoría de la medida y de la integración en formulación abstracta, la obra:

C. CARATHÉODORY: *Mass und Integral und ihre Algebraisierung* (Birkhäuser; Basilea y Stuttgart; 1956).

Una excelente introducción a estas obras, altamente recomendable para un curso superior de la teoría de la medida y de la integración, con tratamiento moderno y muy asequible, conteniendo numerosos y bien elegidos ejemplos y ejercicios, es

M. E. MUNROE: *Introduction to measure and integration* (Addison-Wesley, Cambridge Mass., 1953).

Como introducción al Análisis funcional (con un apéndice en su última edición sobre transformaciones particulares en espacios de HILBERT), trata de mano maestra en su primera parte las modernas teorías de derivación e integración desde el punto de vista funcional originado en el primero de sus autores, señalando los puntos capitales con acertadas referencias históricas, la magnífica obra

F. RIESZ y B. SZ-NAGY: *Leçons d'analyse fonctionnelle* (3ª ed., Gauthier-Villars, París, 1955), trad. inglesa de L. F. BORON: *Functional analysis* (Ungar, Nueva York, 1955).

Complemento a esta obra es

B. SZ-NAGY: *Prolongements des transformations de l'espace de* HILBERT *qui sortent de cet espace* (Akad. Kiadó, Budapest, 1955).

También como funcional lineal, previamente a la idea de medida de un conjunto puntual, estúdiase la integral de funciones reales definidas en un espacio vectorial topológico, en el fascículo XIII (Livre VI: *Intégration*; Cap. I a VI; Act. Sci. Ind., nº 1175, 1952) de la monumental obra de BOURBAKI (citada en Cap. I, nota IV, 9).

En el mismo orden de ideas, prueba que es posible desarrollar en muy corto espacio lo más importante de la integral de LEBESGUE en su forma más general, si se adopta el método funcional originado en DANIELL y en RIESZ, el notable folleto, claramente escrito

R. L. GOMES: *Integral de* LEBESGUE-STIELTJES *num espaço localmente compacto*. I (Cadernos de Análise Geral, nº 21, Junta Invest. Matem., Porto, 1952).

La generalización del método de DANIELL al caso donde la "integral" tome sus valores en un conjunto ordenado conveniente (en lugar

de la recta real), con la mayor generalidad posible para englobar los resultados de STONE, NAKAMO, BOCHNER y ampliar el campo de aplicaciones de la teoría, está en

E. J. MCSHANE: *Order-preserving maps and integration processes* (Princeton Univ. Press, 1953).

Con el objeto de servir como libro de texto para estudiantes y también de consulta para especialistas, escrita en claro estilo, presenta unificadamente la teoría general de la medida, dedicando los dos últimos capítulos a la de HAAR, la obra

P. R. HALMOS: *Measure Theory* (van Nostrand, Nueva York, 1950).

La medida ne HAUSDORFF con sus propiedades dimensionales, está tratada en la anteriormente citada obra de MUNROE y en

W. HUREWICZ y H. WALLMAN: *Dimension Theory* (Princeton Univ. Press, 1941).

El concepto de medida de HAAR es fundamental en la obra de clara exposición de los resultados altamente especializados más importantes, completados en muchos puntos y con demostraciones perfeccionadas, debida a

A. WEIL: *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (Act. Sci. Ind., nº 869, Hermann, Paris, 1949).

Una exposición detallada de la clásica teoría de la medida de LEBESGUE en un espacio euclídeo n-dimensional y su generalización a espacios métricos cualesquiera, reproduciendo apuntes que durante 15 años sirvieron de fuente de información, contiene

J. VON NEUMANN: *Functional Operators. I. Measures and Integrals* (Princeton Univ. Press, 1950).

Después de incluir las integrales de PERRON, RIEMANN, LEBESGUE y STIELTJES dedica sus dos últimos capítulos a medidas e integración abstractas, siguiendo los lineamientos de STONE y basándose en el álgebra de BOOLE, la obra de AUMANN (citada en Cap. XVIII, nota IV. 2).

Exposición didáctica para adquirir a partir de la integral de LEBESGUE, ideas claras y generales sobre las integrales de DENJOY y sus generalizaciones, limitándose al caso de una variable real y medida ordinaria, es

R. L. JEFFERY: *Non-absolutely convergent integrals* (Proc. 2nd Canadian Math. Congress, Vancouver, 1949; pp. 93-145, Toronto Univ. Press, 1951).

5. La teoría de la longitud de curvas y área de superficies continuas en el espacio euclídeo tridimensional, está monográficamente desarrollada en las exposiciones de RADÓ y de PI CALLEJA (citadas en Cap. XV, nota III, 2).

Recientemente ha aparecido la magnífica obra

L. CESARI: *Surface area* (Annals of Math. Studies, nº 35; Princeton Univ. Press, 1956).

CAPÍTULO XXV

SERIES E INTEGRAL DE FOURIER

§ 96. ESPACIOS $\mathbf{E}_n$ Y ESPACIO DE HILBERT

1. El espacio vectorial $\mathbf{E}_n$; sus axiomas fundamentales. — El Cálculo vectorial, cuyas ventajas sobre el método cartesiano conoce ya el lector (Cap. XVII) y que, al resumir en tres fórmulas capitales (§§ 91-4; 92-1, *b*; y 92-3) las relaciones de Geometría infinitesimal que más interesan a la Física, se hizo su instrumento indispensable, condujo (Cap. XVII, nota I) por natural abstracción a la Geometría n-dimensional, que conserva el nombre de *vector* o de *punto* para cada grupo de n números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entes abstractos que, designados por letras $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$, como elementos o puntos, constituyen el *espacio* $\mathbf{E}_n$, si:

(G) Se define la *suma*, como es usual en la Geometría de $\mathbf{E}_2$ y $\mathbf{E}_3$, por adición de componentes o coordenadas homólogas, operación asociativa, siempre posible con su inversa dentro de la clase $\mathbf{E}_n$, la cual entra así en la categoría de *grupo* (§ 5-12, *b*);

(L) Pero es un grupo *lineal*, por admitir la multiplicación por coeficientes numéricos, asociativa y distributiva; y por ende el espacio $\mathbf{E}_n$ es *lineal* (Cap. II, nota III, *b*) ;

(M) Finalmente, es *métrico*, por admitir la definición pitagórica de *distancia* entre cada par de puntos, la cual resulta como caso particular de la *multiplicación escalar* (Cap. XVII, nota II) que asigna a cada par $\mathbf{x} = \{x_i\}$, $\mathbf{y} = \{y_i\}$ un número real designado así: $\mathbf{xy} = \Sigma x_i y_i$; y como caso especial resulta la *norma* $\|\mathbf{x}\| = \mathbf{xx} = \Sigma x_i^2 \geqslant 0$, cuya raíz cuadrada positiva es el *valor absoluto* o *módulo* $|\mathbf{x}|$ del vector $\mathbf{x}$, siendo su anulación necesaria y suficiente para que el vector sea nulo, es decir, tenga nulas sus n componentes. Resumiendo estas propiedades fundamentales, se dice que el espacio $\mathbf{E}_n$ es un *grupo vectorial normado, con norma definida por un producto escalar.*

Distancia $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$; es el valor absoluto de $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ ó de $\mathbf{y} - \mathbf{x}$, es decir

$$[96\text{-}1] \quad \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})} = \sqrt{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}.$$

A este cuadro de axiomas satisfacen, como salta a la vista, los espacios $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, ...; y el carácter distintivo de la *dimensión* es el de ser el máximo número de vectores *linealmente independientes*, es decir, tales que no satisfacen a ninguna ecuación del tipo $\Sigma k_j \mathbf{x}^j = \mathbf{0}$ (§ 60-2) a menos que todos los $k_j = 0$.

2. **Espacio de Hilbert.** — Parecería natural definir el espacio $\mathbf{E}_\infty$ de infinitas dimensiones, por el cuadro de propiedades G, L, M de § 96-1, con la condición de existir infinitos vectores independientes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$; pero mientras en la Geometría de $\mathbf{E}_n$ son equivalentes el método sintético o intrínseco y el analítico, puesto que todo vector se descompone en sus n componentes sobre los vectores independientes elegidos como sistema de referencia, y el espacio de vectores puede sustituirse por el de grupos de n números $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, que son sus coordenadas, no puede asegurarse análoga descomposición en el caso de infinitas dimensiones, si no se agregan nuevos postulados, como haremos en § 96-4. Sigamos el método analítico, definiendo el espacio por coordenadas, del modo siguiente:

DEF. El *espacio real de* HILBERT, que llamaremos también *espacio* **H**, tiene como puntos o elementos todas las sucesiones de números reales $\mathbf{x} = \{x_r\}$ de *cuadrado sumable*; es decir, tales que son convergentes las series Σx_r^2, que así definen las *normas* $\|\mathbf{x}\|$ y luego los *módulos* $|\mathbf{x}| = +\sqrt{\|\mathbf{x}\|}$ como en el caso de $\mathbf{E}_n$ (§ 96-1).

Esta condición es *necesaria* para la finitud de los productos escalares $\mathbf{xy} = \Sigma x_r y_r$, pues resulta haciendo $\mathbf{x} = \mathbf{y}$; y es *suficiente*, puesto que

$$2\,|x_r|\,.\,|y_r| \leqslant x_r^2 + y_r^2 \quad ,$$

luego

[96-2] $$2\,|\mathbf{xy}| \leqslant 2\,\Sigma\,|x_r|\,.\,|y_r| \leqslant \Sigma x_r^2 + \Sigma y_r^2 .$$

Resulta, además, la finitud de todas las sumas $\Sigma(x_r \pm y_r)^2$; luego las sucesiones $\{x_r \pm y_r\}$ pertenecen al espacio **H**, es decir, *el espacio* **H** *es un grupo* (§ 96-1, G); y, como se ha visto, también se verifican L y M. La distancia entre dos puntos viene expresada por la fórmula pitagórica:

[96-3] $$\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varrho(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\Sigma(x_r - y_r)^2} .$$

NOTA. A estos mismos resultados se llega mediante la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ (Cap. XVII, nota II, *b*):

[96-4] $$(\Sigma x_r y_r)^2 \leqslant \Sigma x_r^2 . \Sigma y_r^2 \quad , \quad \text{o sea} \quad |\mathbf{xy}| \leqslant |\mathbf{x}|\,.\,|\mathbf{y}| \quad ,$$

que tanto en $\mathbf{E}_n$ como en **H** puede enunciarse así: *El valor absoluto del producto escalar de dos vectores no supera al producto de los módulos.*

Vimos también (Cap. XVII, nota II, *b*, y nota III) que esta impor-

tante desigualdad permite introducir analíticamente el ángulo de dos vectores por su coseno $xy/(|x|.|y|)$, y demostrar la *propiedad triangular* de las distancias definidas por [96-3]: $\varrho(x,z) \leqslant \varrho(x,y)+\varrho(y,z)$, o su equivalente:

$$[96\text{-}5] \qquad \sqrt{\Sigma(a_r+b_r)^2} \leqslant \sqrt{\Sigma a_r^2}+\sqrt{\Sigma b_r^2}.$$

Queda así justificada la denominación *distancia*, que en la teoría general de los espacios abstractos (cfr. Cap. XVIII, nota I) se define por las tres condiciones siguientes:

1) *Es un número no negativo asignado a cada par de puntos, número que designaremos* $\varrho(x,y)=\varrho(y,x)$. (Cuando no hay simetría se definen *distancias orientadas*).

2) *La distancia es nula cuando, y sólo cuando,* $x=y$ (condición que se cumple evidentemente en la definición [96-3]).

3) *Si* x, y, z, *son puntos cualesquiera, se verifica*: $\varrho(x,z) \leqslant \varrho(x,y)+\varrho(y,z)$. (Esta condición triangular, que cumple [96-3] puede sustituirse por otra menos exigente: dos puntos infinitamente próximos a otro, son infinitamente próximos entre sí).

3. **Espacios funcionales.** — La conservación de las propiedades esenciales de E_n se logra también con funciones $x(t)$, $y(t)$, ..., en lugar de sucesiones. Definido correlativamente el producto escalar de dos funciones, que suponemos integrables en un campo A, por el número

$$xy = \int_A x(t)y(t)\,dt \quad ,$$

la existencia de estas integrales exige, en particular, que los cuadrados, $x^2(t)$, $y^2(t)$, sean integrables.

Según el tipo de integral que se considere (RIEMANN-CAUCHY, LEBESGUE, DENJOY) tendremos una u otra teoría correspondiente. La más satisfactoria por su armonía es la de LEBESGUE, que es común en muchos teoremas con la de RIEMANN.

Recíprocamente, la acotación correlativa de [96-2] demuestra que las funciones de cuadrado integrable tienen producto escalar finito y distancia finita dada a partir de:

$$[96\text{-}6] \qquad \varrho^2(x,y) = (x-y)(x-y) = \int_A [x(t)-y(t)]^2\,dt$$

y forman un subgrupo (L^2) del grupo de funciones integrables (L).

Como, además, se verifican las condiciones L y M de § **96-1**, resulta:

DEF. Todo grupo de funciones de cuadrado integrable en el campo A forma un espacio vectorial normado, adoptando como producto escalar xy de cada par de funciones la integral de $x(t)y(t)$ sobre A. En particular, dos funciones se llaman *ortogonales* cuando es $xy=0$, es decir:

$$\int_A x(t)y(t)\,dt = 0.$$

Ejemplo muy importante nos ofrece la familia de funciones circulares cos mx y sen mx $(m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ (§ 53-1, ejemplos 1 y 2).

Dos funciones cualesquiera de la familia de senos y cosenos de múltiplos de x son ortogonales en $(0, 2\pi)$ *y en cualquier intervalo de amplitud* 2π. Además resulta como producto de cada una por ella misma, o sea como *norma*, el valor π.

4. Espacio H complejo y espacio H abstracto. — Por imposición de la Mecánica cuántica, se hace necesario ampliar el espacio H, admitiendo productos escalares no conmutativos, tales que la permutación de factores se traduzca en la conjugación de los números. (Ver J. VON NEUMANN, citado en nota IV, 8, y J. REY PASTOR, citado en nota IV, 1).

DEF. Llamaremos *espacio complejo* **H** al conjunto de todas las sucesiones de números complejos de cuadrado sumable, cuya multiplicación se define así: $\mathbf{xy} = \sum x_r \bar{y}_r$. Por tanto, las propiedades M_1 y M_3 quedan modificadas en la forma M'_1 y M'_3 que a continuación formulamos.

Repase el lector las seis fórmulas que siguen y comprobará que las satisface el espacio complejo; para definir el espacio abstracto bastará postular M'_1 y M'_3, que conjuntamente con las M_2 y M_3 del espacio real permiten deducir las restantes y otras muchas que no interesa escribir. Tenemos así el nuevo cuadro de axiomas:

$$\mathbf{xy} = \overline{\mathbf{yx}} = \text{número complejo (simetría hermítica)} \qquad [M'_1]$$

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\mathbf{y} = \mathbf{x}_1\mathbf{y} - \mathbf{x}_2\mathbf{y} \text{ (distribución respecto del primer factor)} \qquad [M_2]$$

Pasando por permutación a los conjugados, según M'_1, resulta la distribución respecto del segundo factor;

$$(h\mathbf{x})\mathbf{y} = h(\mathbf{xy}) \text{ (asociación de coeficiente al primer factor)} \qquad [M'_3]$$

La asociación al segundo factor, según M'_1, se deduce así:

$$\mathbf{x}(h\mathbf{y}) = \overline{(h\mathbf{y})\mathbf{x}} = \bar{h}\,\overline{(\mathbf{yx})} = \bar{h}(\mathbf{xy})$$

La norma se define $\mathbf{xx} = \overline{\mathbf{xx}}$ (por M'_1), luego es número *real*; postulamos:

$$\mathbf{xx} \geqslant 0 \quad ; \qquad [M_4]$$

siendo $\mathbf{xx} = 0$ cuando, y sólo cuando, sea $\mathbf{x} = 0$.

La teoría aritmética se desarrolla, como se ve, casi tan sencillamente como en el espacio H real. (Ver J. VON NEUMANN, citado en nota IV, 8).

Pero inmediatamente se plantea la cuestión recíproca: que tales axiomas no bastan para caracterizar H, es obvio, puesto que también los cumplen los espacios E_n en cualquier número de dimensiones; y exigir que éstas sean infinitas, o sea, que haya infinitos vectores linealmente independientes, tampoco basta; pues tal condición cumplen, por ejemplo, todas las funciones continuas (grupo C), todas las funciones de cuadrado R-integrable (grupo R^2), etc.

Ahora bien, esta diversidad aparente no debe desorientarnos. El lector conoce ya la esencia del método axiomático, en el que no interesa la *naturaleza* de los elementos, sino solamente sus *relaciones*; y se plantea el problema de saber si un sistema de funciones forma espacio equivalente *en esencia* al H. He aquí una de las nociones capitales de la moderna Matemática, que importa definir (cfr. §§ 1-6 y 3-5).

DEF. Dos espacios de elementos cualesquiera se llaman *isomorfos*, y se consideran como uno mismo, cuando hay entre sus puntos o elementos una correspondencia biunívoca que conserva las relaciones que los caracterizan.

En nuestro caso concreto, para obtener un espacio isomorfo con el **H**,

debe buscarse un conjunto de funciones que formen *grupo vectorial normado por un producto escalar* (§ 96-1, G, L, M) y tales que la distancia entre cada dos sea igual a la distancia entre los correspondientes puntos de **H**, propiedad que se llama *isometría*.

En las notas II y III volveremos sobre este problema, cuya solución se alcanza mediante las funciones integrables (L) introduciendo la medida de aditividad infinita. Entonces, y sólo entonces, satisfará el espacio funcional a otras dos condiciones o *postulados de continuidad*, que cumple **H** y a las que debe, por tanto, satisfacer todo espacio isomorfo. Este nuevo grupo de axiomas es el siguiente:

Axiomas de continuidad.

[C_1]. El espacio satisface a la condición de convergencia de CAUCHY. Es decir: si para cada $\varepsilon > 0$ existe un n tal que $\varrho(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) < \varepsilon$ para todo par de índices $> n$, existe un límite $\mathbf{x}_0$ tal que $\varrho(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_0) \to 0$. Esta propiedad se expresa diciendo que el espacio es *completo*.

[C_2]. Existe en el espacio una sucesión de puntos $\{\mathbf{x}_r\}$ *densa* en todo el espacio. Es decir, todo punto de éste es punto de acumulación de $\{\mathbf{x}_r\}$. Se dice que el espacio es *separable*.

Se ve que estas dos propiedades generalizan para la métrica M las dos propiedades del espacio real; la primera se logra completándolo por la introducción de los números irracionales, para que exista límite de toda sucesión que cumpla la condición de BOLZANO-CAUCHY (§ 20-6). El papel de sucesión básica del espacio, que postula C_2, lo desempeña en $\mathbf{E}_n$ la sucesión de los puntos de coordenadas racionales (§ 94-2).

Veremos en notas II y III que **H** satisface a C_2 (sucesión básica formada por los puntos de número finito 1, 2, 3, ... de coordenadas racionales) y también C_1 (teorema de FISCHER). Entonces será fácil probar el isomorfismo con **H** de todo espacio que cumpla las condiciones G, L, M y C; y tendremos caracterizado el espacio abstracto de HILBERT.

5. **El espacio de Hilbert en la mecánica cuántica.** — Nos proponemos señalar (de modo, por fuerza, informal para no alejarnos mucho del tema de esta obra) cómo las necesidades de la Ciencia natural encuentran un marco adecuado en el espacio de HILBERT, y dan motivación concreta al estudio, que luego haremos, de problemas *lineales*, ya sea algebraicos o con operadores diferenciales o integrales (§§ 107 y 108, Cap. XXVII, nota III; Cap. XXVIII, notas V a IX; Apénd. II).

a) *Panorama histórico.* — a_1) La Física matemática del siglo XX interpreta el Universo inorgánico construyendo estructuras abstractas con entes arbitrarios x_i; relacionados entre sí por operaciones convencionales O_j, sin pretensiones ontológicas de realidad ni siquiera de *modelo* intuitivo construído a semejanza con las entidades del mundo externo, cuya naturaleza íntima renunciamos a conocer; basta que haya correspondencia entre ese armazón simbólico, inteligible pero no intuíble, y los entes físicos ξ_i; y que a cada operación Ω_j entre éstos corresponda una operación O_j entre los x_i. Esta coordinación paralela entre simbolismo y fenómenos físicos es un *isomorfismo* (§ 1-6).

Este viraje de la Física en el sentido pragmático y agnóstico ha sido realizado en el presente siglo, por la fuerza de las paradojas irresolubles que plantearon a las viejas teorías algunos experimentos rotundos. La luz, es decir, la radiación, *es emisión* de corpúsculos, decía la desechada teoría newtoniana, pero bastó la flagrante contradicción surgida ante el fenómeno de las interferencias, rebelde a la teoría emisionista, para concluir que la luz *no es* lluvia de corpúsculos; y ante la necesidad de otra hipótesis que llenara el vacío de aquélla, declarada absurda, y con el convencimiento de la unidad funcional del Universo, se recurrió, copiando el modelo de la Acústica, a la *hipótesis* ondulatoria; pero faltando aquí el medio material que vibrase, necesitándose algún sujeto para el verbo vibrar, se inventó el *éter*, un nuevo éter, epígono de la larga dinastía de

éteres ideados desde HERÁCLITO hasta DESCARTES. Poco importaba que el novísimo éter, al igual que sus antepasados, fuese contradictorio consigo mismo; pues con tal artificio se lograba explicar satisfactoriamente las interferencias, y los fenómenos ópticos acontecían *como si* la luz fuese ondulación. Pero los éxitos logrados en la segunda mitad del siglo XIX fueron tantos y tales que los físicos se fueron acostumbrando al éter hasta acabar creyendo en él; y desde su ínfimo papel de mal menor ascendió esta entelequia a la suprema categoría de realidad física. Los físicos finiseculares no sólo hablaban con aplomo del "viento de éter" cuya velocidad intentó medir MICHELSON, sino que creían ciegamente en él como realidad física y descubrimiento definitivo; y afirmaban con rotundidad que la luz en toda su amplísima gama, es decir, la radiación, *es* vibración del éter.

En esa era eufórica y victoriosa de la teoría ondulatoria, ¿quién habría osado pronunciar la nefanda frase "emisión de corpúsculos"?, y sin embargo, algunos experimentos decisivos obligaron a resucitarla, y EINSTEIN rebautizó en 1905 a los corpúsculos newtonianos con el nuevo nombre de "fotones". Durante tres décadas, los textos de Física ofrecían el curioso espectáculo de presentar en algunas páginas la luz como ondulaciones, y en otras como emisiones, renunciando así a la vieja pretensión ontológica de discutir lo que la luz *es*, para conformarse con ver *cómo* se comporta. Pero la hábil escapatoria sólo podía satisfacer a los escépticos, para quienes la ciencia es endeble armazón que en cada siglo se derrumba una o más veces al soplo de un experimento adverso, para volver a empezar un nuevo tinglado, que en nada se parezca al anterior.

a_2) La crisis de la Física ha sido superada ya gracias a la nueva Mecánica esbozada por DE BROGLIE y elaborada con inusitada rapidez en los años 1925 y 1926 por SCHRÖDINGER-HEISENBERG-DIRAC; y la pasmosa coincidencia con que se llega a los mismos resultados por tres vías totalmente diversas, reflejo de las armonías matemáticas descubiertas en el espacio de HILBERT, han conducido a la Física a una nueva era de prosperidad y optimismo, afirmándose más cada día estas convicciones:

1ª) La continuidad aparente del mundo físico, en que se basó la fructífera aplicación del cálculo infinitesimal durante los siglos XVIII y XIX es sólo una resultante de innumerables procesos individuales, imposibles de percibir y analizar por separado. No solamente la materia es corpuscular, como adivinó DEMÓCRITO, sino también la energía, como entrevió NEWTON y sistematizó PLANCK;

2ª) En la nueva Física conserva su eficacia el Cálculo clásico, pero sus funciones continuas representan *densidades* de enjambres corpusculares, o *probabilidades* de distribución en el espacio; las leyes dinámicas newtonianas resultan como promedios, afirmándose tras esta conmoción el valor eterno de la Mecánica de NEWTON, como se fortaleció con el embate de la Relatividad;

3ª) La discontinuidad de los posibles niveles de energía encuentra su expresión en ciertas sucesiones discontinuas de números, surgidas espontáneamente en muchos capítulos de la Matemática; son los *autovalores* (ver *b*), a cada uno de los cuales corresponde una cierta magnitud matemática de carácter vectorial que puede ser: una sucesión de números, una matriz infinita, una función de una o más variables, etc.;

a_3) De esta diversidad de algoritmos surge la variedad de Mecánicas cuánticas; y del *isomorfismo* entre ellos, que expresa su identidad de esencia bajo los ropajes de simbolismos muy distintos, surge la equivalencia entre esas diversas mecánicas. El *quid* común a diversas construcciones organizadas con símbolos, es decir, el substrato formal, puramente algebraico, que la moderna Álgebra abstracta se esfuerza en desentrañar como fundamento común a las más dispares teorías matemáticas, parece ser lo único firme e inconmovible en nuestra representación conceptual del mundo. Eso es todo lo que podemos conocer del Universo, y a eso se reduce, para la Física, la realidad externa.

b) *La esencia de las mecánicas cuánticas.* — Por aventurado que sea el empeño de extraer la esencia común a esas complicadas teorías, antes de su conocimiento detenido, la forzosa vaguedad de estas consideraciones puede servir de incentivo para su estudio en tratados especiales (ver, por ej., VON NEUMANN, citado en nota IV, 8; breve introducción da el Cap. VI de J. REY PASTOR, citado en nota IV, 1). Aquí sólo nos proponemos señalar la naturaleza de los métodos e instrumentos matemáticos requeridos.

b_1) La Física estudia casi exclusivamente procesos *aditivos o lineales homogéneos*, en que vale el *principio de superposición* *, que puede expresarse así:

$$L[u+v] = L[u] + L[v] \quad , \quad L[ku] = kL[u] .$$

Esa linealidad puede expresarse por ecuaciones algebraicas (§ 15), o diferenciales totales o parciales (Cap. XXVI a XXVIII), o bien por ecuaciones integrales (Apéndice II), pero en todas ellas aparece un hecho común: el problema lineal homogéneo es en general *imposible*, es decir, solamente admite la solución trivial idénticamente nula que carece de interés y por ende no se considera como solución (cfr. § 15-6, Cap. XXVII, nota III). Ahora bien, si en el problema figura un parámetro numérico λ, para ciertos valores especiales de éste: λ_1, λ_2, λ_3, ..., llamados *autovalores* o *valores propios*, el problema imposible se hace posible, y cada uno determina una solución llamada *autofunción* o más en general *autovector*, para abarcar así números complejos, sucesiones y funciones (cfr. Cap. XXVII, nota III, *d*).

Ya hemos dicho que la Física cuántica no admite la variación continua de la energía; en el átomo y en cualquier sistema sólo son *posibles* ciertos *niveles de energía* y sólo para ellos puede satisfacerse la ecuación que determina ese *estado estacionario*; pero, ¿cómo expresar mediante una sola función el reparto en el espacio de la energía de un sistema, que puede ser complicado? En la Mecánica ondulatoria creada por SCHRÖDINGER se adopta como expresión de ese estado una función de densidad o probabilidad $\Psi(x, y, z)$** que multiplicada por la energía *total* E expresa la cantidad de energía $E\Psi$ en las diversas regiones del espacio; este producto $E\Psi$ es un miembro de la ecuación. Por otra parte, en cada sistema hay cierta peculiar distribución de energía cinética, caracterizada por un operador diferencial, que sumada a la energía potencial $V(x, y, z)$ conocida, viene expresada por un operador diferencial, el llamado *operador* H *de* HAMILTON, característico de ese sistema. Tenemos así la ecuación de SCHRÖDINGER, que en el caso de *k* parámetros, es:

$$[96\text{-}7] \qquad H\Psi(q_1, \ldots, q_k) = E\Psi(q_1, \ldots, q_k)$$

cuyos autovalores E_1, E_2, ..., son los *niveles posibles* de energía y las correspondientes autofunciones Ψ_1, Ψ_2, ..., definen los *estados estacionarios* del sistema.

Por ejemplo: en el caso más sencillo de un solo corpúsculo de masa

---

* Por él logro GALILEO los primeros éxitos en la Mecánica. Así, por ejemplo, el análisis que le condujo a la trayectoria parabólica del proyectil, contra TARTAGLIA, que la creía formada por una recta ascendente y otra descendente, se redujo, enunciado con lenguaje moderno, a postular: el movimiento dado por la resultante de dos fuerzas es la suma de los movimientos producidos por éstas.

** En verdad es $\Psi(x, y, z, t)$, pero se descompone en una exponencial, función periódica de *t* y una función espacial $\Psi(x, y, z)$ que no es precisamente la probabilidad, pues ésta es $|\Psi|^2$, verificándose por tanto para el espacio total:

$$\int\int\int |\Psi|^2 \, dx \, dy \, dz = 1 \qquad \text{o en general} \quad \int |\Psi|^2 \, dv = 1 \ .$$

m, las coordenadas q_i son x, y, z; y si $V(x, y, z)$ es el potencial (en el caso gravitatorio sería $V = mgz$) el operador H del sistema es

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z) = \frac{1}{2m}\Delta + V.$$

Lo único que por ahora nos interesa es que en todo caso cada autovalor E_n determina una solución $\Psi_n(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ que define el correspondiente estado estacionario y que esas funciones Ψ son vectores de un espacio de HILBERT por ser de cuadrado integrable. (Ver nota ** de página anterior).

b_2) En la Mecánica matricial, el problema lineal es algebraico; la resolución de un sistema de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas:

[96-8] $$\sum_s h_{rs} x_s = E x_r \quad , \quad (r = 1, 2, \ldots) \quad ,$$

del mismo tipo como se presenta en Geometría el cálculo de los ejes de una cuádrica. También aquí son los autovalores E_n los *niveles posibles* de energía, los únicos que hacen compatibles las ecuaciones, y cada uno E_n determina un vector $\{x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, \ldots\}$ que por sí sólo no tiene interés físico, pero alineadas todas estas sucesiones como columnas, componen una matriz X que transforma la $\{h_{rs}\}$ en una matriz diagonal D formada por la sucesión E_1, E_2, E_3, ..., en su diagonal principal, siendo nulos todos los demás elementos.

Hay, como se ve, una profunda diferencia entre ambos problemas lineales; en el planteamiento de la Mecánica ondulatoria la solución dada por E_n, es decir, la autofunción Ψ es ya la metafísica, pues $|\Psi|^2$ es la probabilidad buscada en todo punto del espacio; pero en la Mecánica matricial de HEISENBERG la matriz formada por las infinitas soluciones de [96-8] es nuevo instrumento algebraico para llegar a la matriz diagonal D que simboliza la distribución de energía en el espacio.

b_3) Precisamente esa diversidad de método y significado hace brillar más el éxito de ambas teorías al arribar a resultados concordantes, y el de DIRAC y SCHRÖDINGER al unificarlas en un solo cuerpo de doctrina.

La unificación de DIRAC consiste en pasar del operador *diferencial* H a un operador *integral* y la ecuación diferencial [96-7] se reduce a una ecuación integral

$$\int h\varphi \, dV = E\varphi$$

cuyo paralelismo con [96-7] es evidente; pero ese tránsito lo realiza por la magia de cierta función $\delta(q)$ que no es función, y se somete a operaciones que sólo el éxito ulterior justifica o al menos disculpa*.

Mucho más rigurosa es la identificación hecha por SCHRÖDINGER, al poner de manifiesto el paralelismo entre las sucesiones que componen el espacio E_∞ y las funciones de *cualquier número de variables* cuyo cuadrado es integrable.

Este isomorfismo no se apoya en la integral (L) como el teorema de RIESZ-FISCHER (Nota III), por la sencilla razón de que aquí se consideran solamente funciones *derivables*; y sería pueril enriquecer el espacio (R^2) con funciones tan discontinuas que no son integrables, para formar así el espacio más amplio (L^2) cuando en verdad hay que restringirlo excluyendo de (R^2) no solamente todas las funciones discontinuas, sino también las continuas no derivables; es poda y no injerto lo que aquí necesitamos.

Es, pues, un isomorfismo menos perfecto que el demostrado por RIESZ-

* Más tarde fueron fundamentadas esas operaciones sobre δ con la teoría de las distribuciones, ver Apéndice III-10.

FISCHER, pero en cambio mucho más amplio y profundo cuando se extiende a los *operadores diferenciales* y a las *matrices*, algoritmos tan heterogéneos, que no se habría sospechado tan perfecta correlación, la cual explica la equipotencia de las dos mecánicas ondulatoria y matricial.

EJERCICIOS

1. Véase en detalle que la demostración de la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ dada en Cap. XVII, nota II, *b*, sólo utiliza los axiomas verificados por los espacios funcionales introducidos en § 96-3.

2. Repase el lector este cálculo: $(\mathbf{xy})(\mathbf{xy}) = [(\mathbf{xy})\mathbf{x}]\mathbf{y} = [(\mathbf{yx})\mathbf{x}]\mathbf{y} = (\mathbf{yx}^2)\mathbf{y} = (\mathbf{x}^2\mathbf{y})\mathbf{y} = \mathbf{x}^2\mathbf{y}^2$, luego $|\mathbf{xy}| = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$ en contra de [96-4]. ¿Dónde está el error?

3. Defínase el ángulo de dos vectores (§ 96-2, nota) de los espacios funcionales introducidos en § 96-3 y calcúlese el ángulo de dos funciones tomadas: 1º) Entre las potencias x^m en el intervalo $(0, b)$; 2º) Lo mismo entre las circulares $\cos mx$, $\operatorname{sen} nx$, $(m \neq 0,\ n \neq 0)$ en el intervalo $(0, 2\pi)$ y en el intervalo $(0, \pi)$; 3º) Lo mismo entre x^5 y $\cos 3x$ en el intervalo $(0, 2\pi)$.

4. Demostrar que el espacio de las sucesiones de cuadrado sumable es completo (Axioma $[C_1]$ de § 96-4); (cfr. nota III).

5. Demostrar que el espacio métrico C (Cap. XVIII, nota I, *d*) de todas las funciones reales continuas en $[0, 1]$ con la "distancia" dada por $\varrho(\mathrm{f}, \mathrm{g}) = \operatorname{extr\,sup} |\,\mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x)\,|$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ (*métrica uniforme*) es completo (Axioma $[C_1]$ de § 96-4).

6. Demostrar la separabilidad (Axioma $[C_2]$ de § 96-4) del espacio de las sucesiones de cuadrado sumable utilizando puntos con número finito de componentes racionales. Nótese que los puntos de infinitas componentes racionales no forman conjunto numerable.

7. Demostrar la separabilidad (Axioma $[C_2]$ de § 96-4) del espacio C de todas las funciones reales continuas en $[0, 1]$ con "métrica uniforme" (ejercicio 5).

8. Demostrar que el espacio A de todas las funciones reales acotadas en $[0, 1]$ con "métrica uniforme" (ejercicio 5) es completo, pero no separable (Axiomas $[C_1]$ y $[C_2]$ de § 96-4).

§ 97. FUNCIONES ORTOGONALES Y SERIES DE FOURIER

1. Sistemas ortonormales y coordenadas de funciones. — Desde que FOURIER estudió, en 1807, los desarrollos de funciones en series de senos y cosenos de múltiplos de x, ampliando desmesuradamente el concepto euleriano y bernoulliano de función real, que después fué sustituído por el de DIRICHLET (§ 23-3), fueron apareciendo otras sucesiones de funciones que revelaban sorprendente analogía con las circulares, a pesar de su desemejanza, en cuanto permitían desarrollar en serie clases muy generales de funciones reales, con propiedades idénticas en esencia a las de las series llamadas de FOURIER. La razón íntima de esta unificación de algoritmos tan diversos, co-

mo son los polinomios de LEGENDRE, los de JACOBI o GAUSS, los de CHEBICHEV, HERMITE y LAGUERRE, que expondremos al final de este § 97, reside en tener común una propiedad fecunda: la *ortogonalidad*, que permite deducir un gran cuerpo de doctrina común, en que se desvanece la diversidad debida a la no periodicidad de los polinomios.

NOTA. La fusión es tan íntima, que aún interesándose solamente por las series trigonométricas, se gana en sencillez estudiando la teoría general, y resulta además, como añadidura, otra copiosa cosecha de resultados, de alto valor analítico y físico. Por otra parte, la pauta de la Geometría analítica que guió a HILBERT para la definición del espacio abstracto H, del cual son subgrupos las familias de funciones consideradas en esta teoría (funciones continuas, funciones casi-continuas, funciones R^2, funciones L^2), además de haber enriquecido el Análisis matemático con un nuevo capítulo de desarrollos en serie, satisface con tan inesperadas y sencillas conexiones a los espíritus sensibles a la belleza y armonía de la Matemática.

DEF. 1. *Sistema ortogonal* es toda sucesión de funciones φ_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ *ortogonales* dos a dos (§ 96-3, def.) en un cierto campo A. El sistema se llama *ortonormal* cuando las funciones están *normalizadas*, es decir, tienen módulo 1. Está, pues, definido por las condiciones

$$\varphi_m \cdot \varphi_n = \int_A \varphi_m(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx = 0 \quad \text{si} \quad m \neq n \quad ;$$

$$\varphi_n{}^2 = ||\varphi_n|| = \int_A |\varphi_n{}^2(x)|\,dx = 1.$$

En el caso más sencillo, de una variable real, el sistema ortonormal está caracterizado así:

$$[97\text{-}1] \quad \varphi_m \cdot \varphi_n = \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ 1 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

EJEMPLO. El más inmediato es el de las funciones $1/\sqrt{2}$, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos 2x$, $\operatorname{sen} 2x$, ..., cuya ortogonalidad en cualquier intervalo de amplitud 2π ha sido demostrada en § 53-1, ejemplos. Como su norma, según allí se vió, es π, bastará dividir estas funciones por $\sqrt{\pi}$ para tener un sistema ortonormal.

DEF. 2. *Coordenadas* de la función f respecto del sistema ortonormal $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\} = \{\varphi_r\}$ o *coeficientes de* FOURIER de f (brevemente: c. F. de f) son los productos escalares $c_n = f\varphi_n$; las *proyecciones* o *componentes* de f sobre los ejes son los vectores $c_n\varphi_n$.

Se llama *serie de* FOURIER (brevemente: s. F.) de $f(x)$ respecto del sistema ortonormal $\{\varphi_r\}$ a la serie, unívocamente determinada por la función y el sistema, cuyos coeficientes son los números c_n. Esta *determinación* la expresaremos por el signo $\sim$, escribiendo:

$$[97\text{-}2] \qquad \mathrm{f}(x) \sim c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots \quad ; \quad (c_n = \mathrm{f}\varphi_n).$$

2. **Error cuadrático de las sumas de Fourier.** — *a*) Llamando s_n a las sumas parciales de [97-2]: $s_n = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$, formemos la integral de *error cuadrático* *:

$$[97\text{-}3] \qquad (\mathrm{f} - s_n)^2 = \mathrm{f}^2 - 2\mathrm{f}s_n + s_n^2.$$

El primer término del trinomio es la *norma* de f, o sea $\|\mathrm{f}\| = |\mathrm{f}|^2$; el segundo se descompone mediante:

$$\mathrm{f}s_n = c_0\mathrm{f}\varphi_0 + c_1\mathrm{f}\varphi_1 + \ldots + c_n\mathrm{f}\varphi_n = c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_n^2 \ ;$$

en el tercero, después de desarrollado el cuadrado de s_n, son nulas las integrales de los productos $\varphi_i\varphi_j$ por la supuesta ortogonalidad, y los términos φ_i^2 tienen integral 1, luego la tercera integral vale $c_0^2 + \ldots + c_n^2$. En definitiva, resulta esta fórmula fundamental:

$$[97\text{-}4] \qquad \int_a^b [\mathrm{f}(x) - s_n(x)]^2 \, \mathrm{d}x = \|\mathrm{f}\| - [c_0^2 + \ldots + c_n^2].$$

De donde fluyen resultados importantes:

a_1) Las sumas Σc_i^2 no superan a la norma $\|\mathrm{f}\| = \int_a^b \mathrm{f}^2(x)\,\mathrm{d}x$. Es decir: $c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_n^2 \leqslant \int_a^b \mathrm{f}^2(x)\,\mathrm{d}x$. (*Desigualdad de* BESSEL).

a_2) Sigue de a_1) y § 22-3, *a*: La serie Σc_i^2 es *convergente* (con suma $\leqslant \|\mathrm{f}\|$) y, por tanto $c_i \to 0$.

De otro modo: *los* c. F. *de una función de cuadrado integrable son de cuadrado sumable* (§ 96-2, def.).

a_3) El error cuadrático *decrece* al aumentar n; o, al menos, *no crece*.

Que este error no tiende a cero si no imponemos alguna condición al sistema $\{\varphi_n\}$, se ve claramente en el ejemplo $\varphi_n(x) = \operatorname{sen} nx$; pues siendo *impares* en $(-\pi, +\pi)$, toda $\mathrm{f}(x)$ *par* es ortogonal a ellas; y por ser nulos todos los c_n, el error cuadrático [97-4] vale siempre la norma $\|\mathrm{f}\| > 0$.

b) Generalicemos el problema adoptando, en lugar de los c_i, coeficientes reales cualesquiera $c_i + \delta_i$ $(\delta_i \lesseqgtr 0)$ y llamando $\sigma_n(x)$ a la expresión lineal así formada; la segunda integral de [97-3] es:

$$\mathrm{f}\sigma_n = (c_0 + \delta_0)\mathrm{f}\varphi_0 + \ldots + (c_n + \delta_n)\mathrm{f}\varphi_n = \Sigma c_i^2 + \Sigma c_i\delta_i \quad ,$$

mientras la tercera vale:

* La denominación *error medio* o *error en media*, frecuentemente usada, es inadecuada, pues hay medias de grados 1, 2, ..., n.

$$\int_a^b \sigma_n^2 \, dx = \Sigma(c_i + \delta_i)^2 = \Sigma c_i^2 + 2\Sigma c_i\delta_i + \Sigma\delta_i^2 \quad ,$$

y el error cuadrático tiene esta expresión:

$$[97\text{-}5] \quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b [\mathrm{f}(x) - \sigma_n(x)]^2 \, dx = \|\mathrm{f}\| - \Sigma c_i^2 + \Sigma\delta_i^2 = \\ \displaystyle = \int_a^b [\mathrm{f}(x) - s_n(x)]^2 \, dx + \Sigma\delta_i^2 \end{cases}$$

por [97-4]. De aquí resulta esta consecuencia importante:

Entre todas las expresiones lineales de n términos, la de FOURIER *da error cuadrático mínimo.*

El incremento de error al pasar a otros coeficientes es $\Sigma\delta_i^2 > 0$, y basta modificar un solo coeficiente para que el error cuadrático aumente, justamente, en el cuadrado de ese incremento.

3. **Convergencia cuadrática y sistemas densos.** — Dada la función $\mathrm{f}(x)$, de cuadrado integrable, el error cuadrático [97-3] disminuye al agregar nuevos términos al polinomio s_n, pero ¿tenderá a 0 para $n \to \infty$?

DEF. 1. La sucesión de funciones $\{\psi_n(x)\}$ se llama *densa* en el intervalo I, si toda función *continua* $\mathrm{f}(x)$ se puede aproximar con *error cuadrático* $< \varepsilon$, mediante expresiones lineales de las ψ_n con coeficientes constantes.

NOTA 1. ZYGMUND usa las denominaciones: sistema *cerrado* (§ 97-3, def. 1) y sistema *completo* (§ 97-7, def.). Los tratadistas alemanes suelen usar, respectivamente, los nombres *vollständig* (pleno, íntegro, completo) y *abgeschlossen* (terminado, concluído, completado). Como la correspondencia no es perfecta, convendrá fijarse en las definiciones de cada autor, para evitar confusiones.

Aunque la propiedad de ser denso vale para sistemas no ortogonales (por ejemplo, las potencias, que permiten aproximar toda función continua, como veremos, § 98-5, teor. 3) refiriéndonos a los sistemas ortogonales, la *convergencia cuadrática* hacia una función cualquiera $\mathrm{f}(x)$, en virtud de [97-4], equivale a la *igualdad de* PARSEVAL:

$$[97\text{-}6] \quad c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_n^2 + \ldots = \|\mathrm{f}\| = \int_a^b \mathrm{f}^2(x) \, dx.$$

DEF. 2. Una sucesión de funciones $\mathrm{f}_n(x)$ *converge cuadráticamente hacia* $\mathrm{f}(x)$, si el error cuadrático tiende a 0; es decir:

$$[97\text{-}7] \quad \int_a^b [\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}_n(x)]^2 \, dx \to 0 \quad \text{y escribiremos} \quad \mathrm{f}_n \xrightarrow{2} \mathrm{f}.$$

La convergencia cuadrática hacia $\mathrm{f}(x)$ de las sumas $s_n(x)$ de la serie de FOURIER [97-2], se expresará así:

[97-8] $\quad f(x) \overset{2}{=} c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots,$

pero esto significa que tiende a cero el primer miembro de [97-4] y en consecuencia equivale a la igualdad de PARSEVAL [97-6], que vale entonces para toda $f(x)$ continua, si el sistema es denso (def. 1).

NOTAS: 2. Aún siendo denso el sistema ortogonal, si omitimos el adjetivo *cuadrático* y nos referimos a la convergencia *puntual*, según CAUCHY, no es cierto el desarrollo en serie de toda función continua, pues las hay no desarrollables (cfr. § 98-4, nota), mientras que todas lo son cuadráticamente.

3. *Otra igualdad de* PARVESAL. — Si f y g son funciones continuas y son c_i, d_i, sus coeficientes de FOURIER, aplicando la igualdad de PARSEVAL a las funciones f, g, f + g, resulta

$$\sum c_n^2 = \int_a^b f^2\, dx, \quad \sum d_n^2 = \int_a^b g^2\, dx, \quad \sum (c_n + d_n)^2 = \int_a^b (f+g)^2\, dx,$$

Restando de ésta las dos primeras, sale esta igualdad:

[97-9] $$c_0 d_0 + c_1 d_1 + \ldots + c_n d_n + \ldots = \int_a^b f(x) \, . \, g(x)\, dx \quad ,$$

que comprende a la igualdad de PARSEVAL cuando $f \equiv g$, y, como se ha deducido de ella, ambas son *equivalentes*.

4. **Ortonormalización de funciones.** — La Geometría analítica nos señala el camino para pasar de ejes oblicuos a ortogonales, es decir, para deducir del triedro $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ otro triedro ortogonal que permita engendrar el mismo espacio; proceso que vale para infinitos vectores. Basta, como es sabido, partir de φ_1 o bien de su normalizado φ_1' deducido dividiendo por su módulo, y en el plano $\varphi_1\varphi_2$, es decir, en el sistema $h\varphi_1' + \varphi_2$ elegir el ortogonal a φ_1' mediante la condición $h(\varphi_1'\,\varphi_1') + (\varphi_1'\,\varphi_2) = 0$, es decir:

$$h + (\varphi_1'\,\varphi_2) = 0$$

para determinar el nuevo vector, que una vez normalizado llamaremos φ_2'.

Después se sustituye φ_3 por otro del tipo $h\varphi_1' + k\varphi_2' + \varphi_3$ con la doble condición:

$$\left.\begin{aligned} h(\varphi_1'\,\varphi_1') + k(\varphi_1'\,\varphi_2') + (\varphi_1'\,\varphi_3) &= 0 \\ h(\varphi_1'\,\varphi_2') + k(\varphi_2'\,\varphi_2') + (\varphi_2'\,\varphi_3) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad ;$$

$$\text{es decir:} \quad \left\{\begin{aligned} h + (\varphi_1'\,\varphi_3) &= 0 \\ k + (\varphi_2'\,\varphi_3) &= 0 \end{aligned}\right.$$

y determinados así los coeficientes h, k, se tiene un vector ortogonal a φ_1' y φ_2', que una vez normalizado, lo llamaremos φ_3', etc.

Este proceso de ortonormalización de SCHMIDT (Cap. XVII, nota II, *c*), que en $\mathbf{E}_m$ termina con el cálculo de φ_m', es indefi-

nido en el espacio funcional, donde puede conservarse con ventaja la palabra *vector*, llegando a este importante resultado:

TEOR. *Toda sucesión de vectores linealmente independientes determina unívocamente una sucesión ortonormal del mismo espacio, también de vectores linealmente independientes; y cada vector de un sistema es combinación lineal del homólogo y de sus precedentes.*

NOTA. Si se prescinde de la normalización, la fórmula que liga cada dos funciones homólogas es del tipo: $\varphi'_n = \varphi_n +$ funciones anteriores; por eso hemos asegurado la independencia lineal en el enunciado, que subsiste al normalizar. Hay casos en que la normalización no se hace dividiendo por el módulo, sino prefijando el valor en un punto, como acontece en los polinomios de LEGENDRE.

5. Polinomios de Legendre. — Siendo las potencias 1, x, x^2, x^3, ..., las funciones más sencillas, pero no ortogonales, deduz-

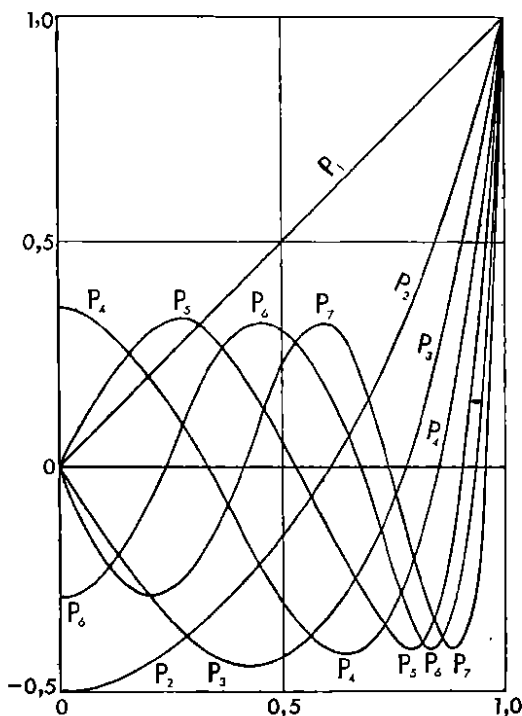


Fig. 329. Polinomios de LEGENDRE.

camos de ellas un sistema ortogonal en (—1, +1), como aplicación del método, y resulta la sucesión de polinomios:

[97-10] $$1,\ x,\ 3x^2 - 1,\ 5x^3 - 3x,\ \ldots$$

que parece coincidir con la de los *polinomios de* LEGENDRE o *funciones esféricas de primera especie,* obtenidos en Cap. XVI, nota III, salvo un coeficiente numérico; y si se elige éste de modo que todos los polinomios tomen valor 1 en el punto $x = 1$, van resultando los mismos allí calculados. La coincidencia es total, como consecuencia de la ortogonalidad de las funciones esféricas en $(-1, +1)$. Ver figura 329.

En efecto, admitido que los polinomios $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ sean ortogonales a todas las potencias x^m de exponente inferior al índice, la relación recurrente vista en Cap. XVI, nota III, *c*, demuestra que también P_n tiene igual propiedad; pues multiplicada por x^m es:

$$n x^m P_n = (2n-1) x^{m+1} P_{n-1} - (n-1) x^m P_{n-2} \quad ,$$

y para $m < n-2$ es nula la integral del primer miembro por serlo las otras dos; para $m = n-2$ éstas no son nulas, pero su cociente (calcúlelo el lector para P_n dado por [XVI-28], integrando por partes $x^n P_n$ con valor $(n!)^2 . 2^{n+1}/(2n+1)!$) vale $(2n-1)/(n-1)$, luego es nula la primera; para $m = n-1$ también es nula, por ser integral de la función *impar* $x^{n-1} P_n$.

Nótese que la normalización no se ha logrado en este caso por la condición de valer 1 la integral (condición que introduciría un coeficiente en todos los polinomios), sino por esta otra: $P_n(1) = 1$, para lograr la coincidencia con las funciones esféricas, definidas por la fórmula [XVI-28].

Es obvio que podría haberse elegido cualquier intervalo finito (a, b) para la formación de los polinomios ortogonales: las diferencias serían meramente formales, sin ventaja, y lo mismo si se adopta otro tipo de normalización.

6. Aproximación uniforme y aproximación cuadrática. — *a*) Hemos destacado en § 97-3 la importancia de los sistemas, llamados *densos,* que dan aproximación cuadrática indefinida, o convergencia cuadrática, en el importante campo de las funciones continuas. Pero aún no hemos probado esta propiedad para ninguno de los sistemas ortonormales que conocemos. En § 98-5, nota 4, demostraremos que *el sistema ortonormal trigonométrico* (§ 97-1, ejemplo) *es denso.*

b) También *es denso el sistema de las potencias* $\{x^0 = 1, x, x^2, \ldots\}$ *y por tanto el de los polinomios de* LEGENDRE obtenidos por ortogonalización en $(-1, +1)$ (§ 97-5). Esto resultará en virtud de *c*, del importante teorema de WEIERSTRASS que demostraremos en § 98-5: *Toda función* $f(x)$ *continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$ *puede aproximarse uniformemente en* $[a, b]$ *mediante polinomios.*

c) Este teorema de WEIERSTRASS asegura la posibilidad del desarrollo cuadrático de toda función continua por polinomios, por el hecho de ser la aproximación uniforme en intervalo finito más exigente que la cuadrática; pues si en todo punto de (a, b) se verifica:

$$| f(x) - g(x) | < \varepsilon \quad \text{es} \quad \int_a^b | f(x) - g(x) |^2 \, dx < \varepsilon^2 (b - a) ;$$

de donde resulta:

c_1) *Si* $f_n \to f$ *uniformemente en* (a, b), *también* $f_n \xrightarrow{2} f$.

c_2) *Si un sistema de funciones* ψ_n *(ortogonal o no), aproxima uniformemente a toda función continua con error arbitrariamente pequeño, es decir, si para cada* f *y cada* $\varepsilon > 0$ *existe una combinación* $\Sigma \gamma_r \psi_r$ *tal que para todo* x *sea:*

$$[97\text{-}11] \quad |f(x) - \Sigma| < \varepsilon, \quad \text{es} \quad \int_a^b [f(x) - \Sigma]^2 \, dx < \varepsilon^2 (b - a).$$

c_3) *En la hipótesis* c_2, *toda función continua* $f(x)$ *admite desarrollo cuadráticamente convergente de tipo* [97-8] *respecto de las* Ψ_n *si son ortogonales; y si no lo son, hay desarrollo en serie de las combinaciones* P_n *de ellas deducidas por ortogonalización* (§ 97-4).

Distingamos dos casos: según sea el sistema de funciones ψ_n:

1º Si es *ortogonal* (por ejemplo, el sistema de funciones sen mx, cos nx) y es

$$\Sigma = \gamma_0 \psi_0 + \gamma_1 \psi_1 + \ldots + \gamma_n \psi_n \quad ,$$

es decir, es una suma σ_n del tipo visto en § 97-2, *b*, que da error uniforme y, por ende, cuadrático $< \varepsilon$, se ha demostrado en § 97-2, *b*, que la correspondiente suma de FOURIER, s_n (es decir, el polimonio de coeficientes c_n) da error menor; luego el sistema ortogonal ψ es *denso*, y toda función continua $f(x)$ admite desarrollo cuadrático [97-8] y satisface a la igualdad de PARSEVAL [97-6].

2º Si el sistema ψ_n *no es ortogonal* (tal, por ejemplo, el de las potencias 1, x, x^2, ...) se forman (§ 97-4) combinaciones lineales P_n que forman sistema ortogonal (en *polinomios de* LEGENDRE, § 97-5) y como las Σ son también combinaciones lineales de los P_n, éstos forman sistema denso.

NOTA. Importa destacar la diferencia esencial entre ambos casos: En las Σ de la hipótesis [97-11] el coeficiente de cada ψ_r depende de r y de ε; y en el caso 1º, al sustituirlo por c_r, sólo depende de r, y el número de términos n está fijado por ε; en el caso 2º no hay cambio de coeficientes, sino de funciones, para lograr la aproximación cuadrática infinitamente decreciente, o sea el desarrollo en serie.

7. **Sistemas ortogonales completos y unicidad del desarrollo.** — He aquí un nuevo concepto íntimamente ligado con el de sistema denso:

DEF. Un sistema ortogonal $\{\varphi_n\}$ se llama *completo* cuando no existe (salvo la función idénticamente nula) ninguna función φ continua que sea ortogonal a todas las φ_n.

No es posible, por tanto, ampliar el sistema, con funciones continuas, conservando la ortogonalidad.

COROLARIOS: *a*) *Todo sistema ortogonal denso es completo.*

Pues si no lo fuera, esto es, si existiese una función continua f no idénticamente nula ortogonal a todas las φ_n, serían nulos todos sus c. F. y, por tanto, imposible la igualdad de PARSEVAL [97-6].

b) *Si una función continua* f *tiene nulos todos sus* c. F. *es idénticamente nula.*

Pues, de lo contrario, esa función no idénticamente nula, sería ortogonal a todas.

c) *Si dos funciones continuas* f_1 *y* f_2 *tienen los mismos coeficientes de* FOURIER, *son idénticamente iguales.* Pues $f_1 - f_2$ tiene nulos sus coeficientes de FOURIER y, por tanto, es idénticamente nula.

Este *teorema de unicidad*, así como la igualdad de PARSEVAL, pueden generalizarse sin dificultad a las funciones casi continuas; es decir, *continuas a trozos*; y la generalización decisiva la dará el teorema de F. RIESZ (nota III) que nos permitirá demostrar la existencia de *desarrollo de toda función* R^2 *y, más general,* L^2.

8. Polinomios ortogonales respecto de un núcleo. — El concepto de ortogonalidad de funciones se generaliza así:

DEF.. Las funciones φ_n se dicen *ortogonales* en el campo A, respecto del *núcleo* $p^2(x)$, si para $m \neq n$ es:

$$\int_A p^2(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0, \qquad \text{o sea:} \qquad (p\varphi_m)\,.\,(p\varphi_n) = 0.$$

El núcleo puede ser cualquier función positiva, y su raíz cuadrada positiva se elige como factor $p(x)$.

Partiendo de la sucesión $p(x)$, $xp(x)$, $x^2p(x)$, ..., se deducen por el proceso de ortogonalización (§ 97-4) polinomios con el factor $p(x)$, o sea, polinomios ortogonales respecto de $p^2(x)$. En particular, cuando el núcleo es 1 y el campo A es el intervalo $(-1, +1)$, tenemos los polinomios ya considerados de LEGENDRE.

En el mismo intervalo $(-1, +1)$, están definidos los *polinomios de* CHEBICHEV, de núcleo $p^2(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ o bien $\sqrt{1-x^2}$; y en el $(0, 1)$ los de JACOBI, que los comprenden a todos ellos como casos muy particulares.

NOTA. En la tabla de § 97-12 figuran estos cuatro tipos más importantes de polinomios ortogonales sobre intervalo finito, y los de intervalo $(0, \infty)$ y $(-\infty, +\infty)$, que son los de LAGUERRE y los de HERMITE. Aparece en éstos la dificultad de ser infinito el intervalo, con el peligro de la falta de convergencia de las integrales; pero, en estos dos casos, está asegurada por ser el núcleo e^{-x}, que, multiplicado por cualquier polinomio, da integral convergente en $(0, \infty)$, obteniéndose así los polinomios de LAGUERRE; o bien e^{-x^2} que asegura la convergencia en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, dando origen a los polinomios de HERMITE, excepcionalmente importantes en Estadística.

Ocuparía excesivo espacio la demostración de las siguientes propiedades, que pueden estudiarse en los tratados especiales de VITALI-SANSONE (citado en Cap. IX, nota VIII-3) y de SZEGÖ (citado en Cap. XVI, nota IV, 4):

a) Todos los sistemas de polinomios son *densos* (§ 97-3, def. 1).

El problema ofrece especial dificultad en los dos casos de intervalo infinito, pues falta el teorema de WEIERSTRASS (§§ 97-6, *b*; 98-5, teor. 3), que sólo vale para intervalo finito.

b) Todos los polinomios tienen sus ceros *reales* y *simples*.

c) Los ceros de dos polinomios sucesivos de la misma familia están *separados*; es decir, entre dos ceros consecutivos de un polinomio P_n hay uno solo de cada otro polinomio P_{n+1} o P_{n-1}.

Estas propiedades fueron demostradas (Cap. XVI, nota III) para los polinomios de LEGENDRE.

9. **Polinomios de Jacobi o de Gauss.** — Proceden de la *serie hipergeométrica* de radio 1, que GAUSS designó

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{ab}{1 . c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 . 2 . c(c+1)} x^2 +$$

$$+ \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 . 2 . 3 . c(c+1)(c+2)} x^3 + \ldots \qquad (R = 1) \quad ,$$

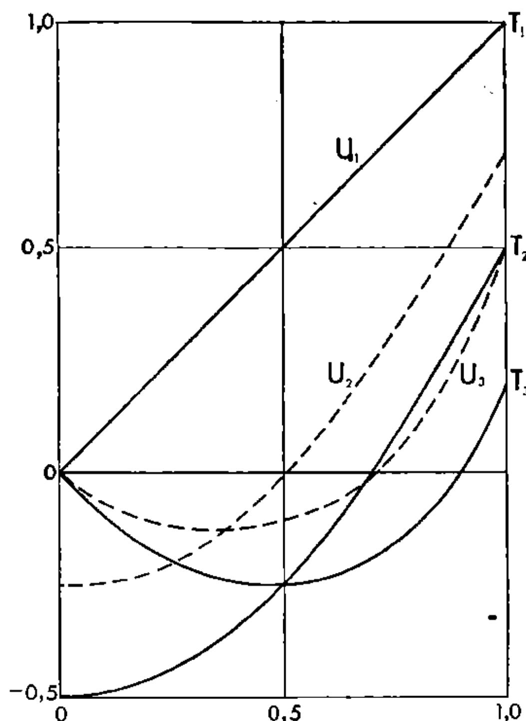


Fig. 330. — Polinomios de CHEBICHEV.

la cual se reduce a función elemental, como se comprueba fácilmente, en casos como éstos:

$$F(-n, b, b, x) = (1-x)^n \quad ; \quad F(1, 1, 2, x) = \frac{\ln(1-x)}{-x} \quad ;$$

$$F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right) = \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad ;$$

$$F\left(n+1, -n, 1, \frac{1-x}{2}\right) = P_n(x) \quad \text{de LEGENDRE.}$$

En nuestro caso, $F(a, b, c, x)$ se reduce a un polinomio, cuando a ó b es un *entero negativo*; por eso, se llaman también *polinomios hipergeo-*

métricos o de GAUSS, y poniendo: $a = -n$, $b = p + n$, $c = q$, resultan los polinomios G_n insertos en la tabla de § 97-12, de núcleo $x^{q-1}(1-x)^{p-q}$.

La ecuación diferencial a que satisface F, como se comprueba con cálculo sencillo, es:

$$[97\text{-}12] \qquad x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0 \quad ,$$

y como caso particular resulta la ecuación que caracteriza cada tipo de polinomios.

Otros autores prefieren poner:

$$a = -n \quad , \quad b = n + \alpha + \beta + n \quad , \quad c = \alpha + 1 \quad ,$$

y el núcleo es, entonces, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$.

Los *polinomios de* JACOBI comprenden a todos los definidos en intervalo finito; para deducir los de base $(-1, +1)$ basta sustituir x por $\frac{1}{2}(1-x)$ a fin de transformar $(0, 1)$ en $(-1, +1)$, y adoptar los parámetros siguientes:

LEGENDRE: $p = 1$, $q = 1$ (o sea: $a = -n$, $b = n + 1$, $c = 1$),

$$P_n(x) = G_n[1, 1, \tfrac{1}{2}(1-x)] = F[-n, n+1, 1, \tfrac{1}{2}(1-x)].$$

CHEBICHEV: $p = 0$, $q = \frac{1}{2}$, ($a = -n$, $b = n$, $c = 1/2$),

(1ª especie, fig. 330)

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} G_n[0, 1/2, \tfrac{1}{2}(1-x)] = \frac{1}{2^{n-1}} F[-n, n, 1/2, \tfrac{1}{2}(1-x)].$$

CHEBICHEV: $p = 2$, $q = 3/2$, ($a = -n$, $b = n + 2$, $c = 3/2$),

(2ª especie, fig. 330)

$$U_n(x) = \frac{n+1}{2^n} G_n[2, 3/2, \tfrac{1}{2}(1-x)] = \frac{n+1}{2^n} F[-n, n+2, 3/2, \tfrac{1}{2}(1-x)].$$

10. Propiedades de mínimo de los polinomios ortogonales. — Todo polinomio $Q_n(x)$ es combinación lineal de polinomios de LEGENDRE *, y suponiendo éstos normalizados por la condición $|P_n| = 1$, si Q_n tiene el mismo primer coeficiente que P_n, *su módulo* o *valor cuadrático*, es:

$$[97\text{-}13] \quad |Q_n|^2 = \int (P_n + a_1 P_{n-1} + \ldots + a_n)^2 dx = 1 + a_1^2 + \ldots + a_n^2.$$

Entre todos los polinomios Q_n *de grado* n *y primer coeficiente prefijado (por ejemplo, 1), es el polinomio de* LEGENDRE *con ese primer coeficiente, el que tiene valor cuadrático mínimo.* Pues el mínimo de la expresión anterior se alcanza para: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Más general: designemos por P_n los polinomios ortonormales respecto del núcleo $p^2(x)$ para todo polinomio Q_n, con el mismo primer coeficiente que P_n, expresado como combinación lineal de los P_n, es:

$$[97\text{-}14] \qquad \int p^2(x)(P_n + a_1 P_{n-1} + \ldots + a_n)^2 dx = 1 + a_1^2 + \ldots + a_n^2.$$

Luego subsiste la conclusión anterior, válida para todos los polinomios estudiados en este § 97: *Entre todos los polinomios* Q_n *que tienen el mismo primer coeficiente, es* P_n *el que tiene mínima norma ponderada.*

En particular, los polinomios de CHEBICHEV, T_n, que ya tienen primer coeficiente 1, tienen esta propiedad de mínimo respecto del núcleo $1/\sqrt{1-x^2}$; pero, además, tienen la notable propiedad de hacer mínima la *distancia uniforme* $d = \text{máx}\,|Q_n(x)|$ entre todos los de igual grado y

* También lo es de cualquier sucesión de polinomios de grados 0, 1, 2, ...; pero no siendo ortogonales, no se verifica la igualdad [97-13].

primer coeficiente. Nótese en la figura 330 que esa propiedad *no la tienen* los U_n; pues, para los de segundo y tercer grado, es $d = \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$, mientras para T_2 y T_3 es $d = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, respectivamente.

11. **Polinomios de Laguerre y Hermite.** — *a*) Aplíquese el método de ortogonalización de las potencias (§ 97-8) al intervalo $(0, \infty)$ con núcleo e^{-x} y resultarán los polimonios de LAGUERRE, tabulados en § 97-12. Procédase igualmente en $(-\infty, +\infty)$ con el núcleo e^{-x^2} y resultan los polinomios de HERMITE, de gran importancia en Estadística. Las definiciones análogas a la [XVI-28] son éstas:

$$[97\text{-}15] \qquad L_n(x) = e^x D^n (x^n e^{-x}) \quad , \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2}.$$

Partiendo de esta definición se demuestra muy fácilmente la ortogonalidad, y así resulta la identidad con los arriba definidos.

b) *Los polinomios de* LAGUERRE *y la transformación de* LAPLACE. — Los polinomios de LAGUERRE han adquirido creciente importancia, por la sencillez de su formación y por su reducción a potencias, mediante la transformación lineal de LAPLACE (Cap. XXIX, nota VIII). En efecto, integrando por partes:

$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-tx} x^n \, dx = \frac{n}{t} \int_0^{\infty} e^{-tx} x^{n-1} \, dx = \frac{n}{t} I_{n-1} \quad ,$$

pues se anula en ambos extremos el término integrado. Así prosiguiendo, se llega a: $I_n = n!/t^{n+1}$ (cfr. [XXIX-84]).

Aplíquese esta transformación al polinomio:

$$\frac{L_n(x)}{n!} = 1 - \binom{n}{1} \frac{x}{1!} + \binom{n}{2} \frac{x^2}{2!} - \ldots \pm \binom{n}{n} \frac{x^n}{n!}$$

y desaparecen los factoriales divisores, apareciendo potencias de $1/t$, luego resulta: *El transformado del polinomio* $L_n(x)/n!$ es $[1 - (1/t)]^n : t$.

Una serie $\sum c_n L_n(x)/n!$ se transforma en

$$\frac{1}{t} \sum c_n \left(1 - \frac{1}{t} \right)^n$$

o bien, llamando $z = 1 - (1/t)$, en: $c_0 + (c_1 - c_0) z + (c_2 - c_1) z^2 + \ldots$

12. **Tabla de polinomios ortogonales.**

LEGENDRE [Intervalo, $(-1, +1)$; núcleo, 1]

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x, \quad P_2 = (3/2)x^2 - (1/2), \quad P_3 = (5/2)x^3 - (3/2)x, \ \ldots,$$

$$P_n = \sum (-1)^{n-r} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 (2r-1)}{(n-r)!\,(2r-n)!} \cdot \frac{x^{2r-n}}{2^{n-r}},$$

$$[n \geqslant r \geqslant \tfrac{1}{2}(n+1)]$$

CHEBICHEV (1ª especie). [Intervalo, $(-1, +1)$; núcleo, $p^2(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$]

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_2 = x^2 - (1/2), \quad T_3 = x^3 - (3/4)x, \ \ldots,$$

$$T_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\alpha, \quad \cos \alpha = x,$$

$$T_n = [(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n] : 2^n.$$

CHEBICHEV (2ª especie). [Intervalo, $(-1, +1)$; núcleo $p^2(x) = \sqrt{1-x^2}$]

$$U_0 = 1, \quad 2U_1 = 2x, \quad 4U_2 = 4x^2 - 1, \quad 8U_3 = 8x^3 - 4x, \ \ldots,$$

$$2^n U_n = \operatorname{sen}(n+1)\alpha/\sqrt{1-x^2}, \quad \cos\alpha = x,$$

$$U_n = \frac{[(x + i\sqrt{1-x^2})^{n+1} - (x - i\sqrt{1-x^2})^{n+1}]}{i 2^{n+1} \sqrt{1-x^2}}.$$

GAUSS-JACOBI [Intervalo, $(0, 1)$; $p^2(x) = x^{q-1}(1-x)^{p-q}$; $q > 0$, $p - q > -1$].

$$G_0 = 1, \quad G_1 = 1 - \frac{p+1}{q}x,$$

$$G_2 = 1 - 2\,\frac{p+2}{q}x + \frac{(p+2)(p+3)}{q(q+1)}x^2,$$

. . . .

$$G_n = 1 + \sum(-1)^r \binom{n}{r} \frac{(p+n)\ldots(p+n+r-1)}{q(q+1)\ldots(q+r-1)}x^r, \quad [1 \leqslant r \leqslant n].$$

LAGUERRE [Intervalo, $(0, \infty)$; $p^2(x) = e^{-x}$]

$$L_0 = 1, \quad L_1 = -x + 1, \quad L_2 = x^2 - 4x + 2,$$

$$L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$$

. . . .

$$L_n = n!\left[1 - \binom{n}{1}\frac{x}{1!} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{2!} - \ldots \pm \frac{x^n}{n!}\right]^*.$$

HERMITE [Intervalo, $(-\infty, +\infty)$; $p^2(x) = e^{-x^2}$]

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_2 = 4x^2 - 2,$$

$$H_3 = 8x^3 - 12x, \quad H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12,$$

. . . .

$$H_n = \sum(-1)^r \frac{n^{(2r}}{r!}(2x)^{n-2r}, \quad (0 \leqslant r \leqslant \tfrac{1}{2}n),$$

donde el factorial generalizado, significa:

$$n^{(2r} = n(n-1)\ldots(n-2r+1).$$

EJERCICIOS

1. Definiendo la "distancia de orden p" mediante

$$\varrho(f, g) = \left\{\int_a^b |f - g|^p\,dx\right\}^{1/p}$$

y la "distancia uniforme" mediante $\varrho(f, g) = \text{extr sup}\,|f - g|$ (§ 96-Ej. 5) en $a \leqslant x \leqslant b$, calcular los valores absolutos de las funciones siguientes en el intervalo $[0, 1]$ con métrica lineal, cuadrática y uniforme: $\cos n\pi x$, $\text{sen}\, n\pi x$, $a\cos n\pi x + b\,\text{sen}\, n\pi x$.

2. Probar que si respecto de un sistema ortonormal $\{\varphi_n\}$ y una función $f(x)$ existen números a_n para los que $\sum a_n\varphi_n(x)$ converge cuadráticamente (§ 97-3, def. 2) a $f(x)$, entonces es $a_n = f.\varphi_n = c_n$ y se cumple [97-6].

3. Probar que el sistema de H. RADEMACHER:

$$\varphi_n(x) = \text{sg sen}(2^n\pi x) \quad , \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad ,$$

es en $0 \leqslant x \leqslant 1$: a) Ortonormal; b) No completo.

---

* Algunos autores designan por $L_n(x)$ el polinomio entre paréntesis, es decir, dividen por $n!$. La ecuación diferencial es la misma, pero la relación de recurrencia es muy distinta.

4. Sea $\{\varphi_n(x)\}$ el sistema de RADEMACHER (ejercicio 3). Pongamos

$$\chi_0(x) \equiv 1 \quad , \quad \chi_n\ (x) = \varphi_{n_1}\ (x)\varphi_{n_2}\ (x) \dots \varphi_{n_k}\ (x)$$

si n se expresa en el sistema binario (Cap. I, nota II) por cifras 1 sólo en los lugares de órdenes $n_1, n_2, \dots, n_k$, es decir, $n = 2^{n_1-1} + 2^{n_2-1} + \dots + 2^{n_k-1}$. Probar que el sistema $\{\chi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$, introducido por J. L. WALSH, es ortonormal y completo en $0 \leqslant x \leqslant 1$.

5. Demostrar que los polinomios ortogonales de LEGENDRE $P_n(x)$ en $[a, b]$ son (salvo un fartor k_n):

$$P_n(x) = k_n \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots & \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} \end{vmatrix},$$

siendo μ_r los momentos

$$\mu_r = \int_a^b x^r\,dx = (b^{r+1} - a^{r+1})/(r+1) \quad , \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

Hallar el factor k_n en función de los momentos μ_r de modo que: 1º) Queden normalizados; 2º) Sea $P_n(1) = 1$.

6. Demostrar que los polinomios ortogonales de LEGENDRE $P_n(x)$ en $[a, b]$ pueden expresarse (salvo un factor c_n) por

$$P_n(x) = c_n D^n \{(x-a)^n (x-b)^n\}.$$

Hallar el factor c_n de modo que: 1º) Queden normalizados; 2º) Sea $P_n(b) = 1$.

7. Obtener la relación recurrente entre cada tres consecutivos de los polinomios definidos en la tabla de § 97-12.

8. Demostrar mediante la relación recurrente de los polinomios de LEGENDRE (ejercicio 7) que a partir de $P_0 = 1$, $P_1 = x$, la expresión general de ellos es

$$P_n(x) = \sum \frac{(-1)^s}{2^n} \frac{(2n-2s)!}{s!\,(n-s)!\,(n-2s)!} x^{n-2s} \quad ,$$

donde $0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}n$, y transformarla en

$$P_n(x) = \sum (-1)^{n-r} \frac{1.3.5\dots(2r-1)}{(n-r)!\,(2r-n)!} \frac{x^{2r-n}}{2^{n-r}} \quad ,$$

donde $n \geqslant r \geqslant \frac{1}{2}(n+1)$.

9. Por el método seguido en § 97-5 con los de LEGENDRE, demuéstrese la ortogonalidad de los demás polinomios de la tabla de § 97-12 utilizando el ejercicio 7.

10. Demostrar la ortogonalidad de los polinomios de LAGUERRE y de HERMITE, partiendo de la generación por derivada D^n (§ 97-11) en la forma

$$\int e^{-x} x^m L_n\,dx = \int x^m D^n (e^{-x} x^n)\,dx \quad ;$$

$$\int e^{-x^2} x^m H_n\,dx = \int x^m D^n (e^{-x^2} x^n)\,dx.$$

11. Hallar las funciones normalizadas de los polinomios de § 97-12.

§ 98. Series trigonométricas

1. **Teorema fundamental de Riemann.** — La teoría general de las funciones ortogonales (§ 97) nos permitirá deducir gran parte de la clásica teoría de FOURIER, como caso especial de los resultados obtenidos, cuando el sistema ortogonal es $\{\cos mx, \operatorname{sen} mx\}$ (§ 97-1, ejemplo). Tendremos (cfr. § 97-2):

$$[98\text{-}1] \quad f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + \ldots + (a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx) + \ldots$$

y los c. F. (coeficientes de FOURIER) se expresan, en virtud de § 97-1, ejemplo, por

$$[98\text{-}2] \quad \begin{cases} a_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \cos mt \, dt \quad , \\[2ex] b_m = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} mt \, dt \quad , \end{cases}$$

siendo, por tanto, c_n un a_m o un b_m, según la paridad de n, y debiendo modificarse, en consecuencia, la escritura de algunos resultados. Así, la desigualdad de BESSEL (§ 97-2, a_1) se escribirá:

$$\tfrac{1}{4}a_0^2 + \sum_1^n (a_m^2 + b_m^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2 \, dx .$$

DEF. *Serie trigonométrica* es toda serie del tipo [98-1] y coeficientes cualesquiera. *Serie de* FOURIER (s. F.) de $f(x)$ es la serie [98-1] de coeficientes [98-2].

NOTA. Según el tipo de integral que se considere (RIEMANN-CAUCHY, LEBESGUE, DENJOY) tendremos una teoría de s. F. distinta. La más satisfactoria por su armonía es la de LEBESGUE, que es común en muchos aspectos con la de RIEMANN-CAUCHY. Los coeficientes a_m y b_m quedan determinados unívocamente por $f(x)$ mediante [98-2], pero distintas funciones pueden dar los mismos coeficientes. Para que esto no suceda cabe restringir adecuadamente la clase de funciones a considerar (como hemos hecho en § 97-7) o ampliar el concepto de funciones aquivalentes a las que difieren sólo en un conjunto de medida nula (como hace LEBESGUE).

EJEMPLOS: 1. Será útil para lo sucesivo la serie trigonométrica:

$$[98\text{-}3] \quad \tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos mx + \ldots$$

no convergente en sentido usual para ningún x; ni tampoco cuadráticamente, pues no es s. F. de ninguna función, por ser divergente la suma de cuadrados de los coeficientes. No obstante, interesa, como veremos, por tener acotadas las sumas sucesivas, excluído un entorno del origen. En efecto, multiplicando sus términos por $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$, se puede escribir:

$$2 \cos mx \,.\, \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}x = \operatorname{sen}(m + \tfrac{1}{2})x - \operatorname{sen}(m - \tfrac{1}{2})x \quad ,$$

luego:

$$[98\text{-}4] \quad \tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})x}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x} .$$

Podría también calcularse mediante la función exponencial formando progresiones geométricas, como en [99-29].

2. Análogamente:

[98-5] $$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \ldots + \operatorname{sen} nx = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x}.$$

3. En cambio, deberá multiplicarse por $2 \operatorname{sen} x$, para este caso:

[98-6] $$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \ldots + \operatorname{sen}(2n-1)x = \frac{1-\cos 2nx}{2 \operatorname{sen} x} = \frac{(\operatorname{sen} nx)^2}{\operatorname{sen} x}.$$

TEOR. (RIEMANN-LEBESGUE). *Si* $f(x)$ *es integrable* (L o R *absolutamente*) *en* (a, b) *se verifica para* $\nu \to \infty$:

[98-7] $$\int_a^b f(x) \cos \nu x \, dx \to 0 \quad , \quad \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \nu x \, dx \to 0.$$

Si es $f(x)$ *de cuadrado integrable*, descomponiendo (a, b) en partes, si abarca más de un período, y ampliando la función con valores nulos para cubrir $(0, 2\pi)$, podemos suponer que es éste el intervalo.

a) Si es $\nu = n$, ya se ha demostrado (§ 97-2, a_2).

b) Si es $\nu = n + \frac{1}{2}$ (caso que interesa especialmente) basta desarrollar el seno y coseno del binomio y aplicar la conclusión anterior a las dos funciones de cuadrado integrable $f(x) \cos \frac{1}{2}x$, $f(x) \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$.

GENERALIZACIÓN. *c*) Si $f(x)$ admite derivada $f'(x)$ acotada e integrable, basta integrar por partes:

$$\int_a^b f(x) \cos \nu x \, dx = \frac{1}{\nu} f(x) \operatorname{sen} \nu x \Big|_a^b - \frac{1}{\nu} \int_a^b f'(x) \operatorname{sen} \nu x \, dx \to 0.$$

d) Si $f(x)$ es continua o de variación acotada es también aplicable la integración por partes (§ 79); y para el caso más general enunciado en el teorema de RIEMANN-LEBESGUE, que no nos interesa, basta aproximar $f(x)$ por una función absolutamente continua.

2. **La integral de Dirichlet y su carácter local.** — Puesto que los c. F. vienen expresados por las integrales [98-2], las sumas s_n de la serie [98-1] se calculan mediante las fórmulas [98-4] y [98-5]; pero se prefiere reducir los binomios que aparecen bajo el signo, en esta forma:

$$\cos mt \cdot \cos mx + \operatorname{sen} mt \cdot \operatorname{sen} mx = \cos m(t-x) \quad ,$$

y poniendo $t - x = u$, resulta según [98-4]:

[98-8]

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\tfrac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \ldots + \cos nu] \, f(x+u) \, du =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}u} f(x+u) \, du \quad ,$$

bien entendido que cada integral debe extenderse sobre cualquier intervalo de amplitud 2π. Esta *integral de* DIRICHLET, en que se funda la teoría rigurosa de las s. F., suele escribirse así, fraccionando en dos el intervalo $(0, 2\pi)$:

$$[98\text{-}9] \quad s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})u}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}[f(x+u)+f(x-u)]\,du.$$

De ella se deducen los criterios de convergencia de DINI, JORDAN y DU BOIS REYMOND, que enunciaremos después; pero, ante todo, interesa una consecuencia inmediata, muy importante, que algunos llaman teorema de RIEMANN: *El carácter en un punto x de la* s. F. *de una función* $f(x)$ *absolutamente integrable, sólo depende de los valores de ésta en un entorno de x, arbitrariamente pequeño.*

Veamos, en efecto, que para otra función $g(x) = f(x)$, en un entorno $(x-\delta, x+\delta)$, con valores arbitrarios (por ejemplo nulos) fuera de él, la suma s_n, tiene el mismo límite que la suma análoga:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})u}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}[g(x+u) + g(x-u]du \quad ,$$

pues la diferencia de integrales se reduce a la integral en (δ, π)

$$s_n(x) - S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi F(u)\operatorname{sen}(n+\tfrac{1}{2})u\,du$$

donde

$$F(u) = [f(x+u) + f(x-u)] : \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}u$$

y como esta función $F(u)$ es integrable absolutamente en ese intervalo (δ, π) es aplicable el teorema fundamental de RIEMANN; luego $s_n(x) - S_n(x) \to 0$ en ese punto x.

NOTA. Es sorprendente este resultado, ya que en el valor de la serie en un punto x, intervienen *todos* los c. F., cada uno de los cuales depende de *todos* los valores de $f(x)$ en $(0,2\pi)$; pero en las expresiones [98-7], la función se diluye en infinitas oscilaciones de signo contrario, que se compensan; y si no sucede igual en la integral [98-8] de DIRICHLET, es por el denominador nulo en el origen, siendo éste y su entorno lo que influye solamente en el límite.

3. Criterios de convergencia de la serie de Fourier. — El tránsito de la convergencia cuadrática a la ordinaria plantea delicados problemas: 1º) ¿En qué puntos x converge la s. F. de $f(x)$ y hacia qué límite? 2º) ¿En qué intervalos es uniforme la convergencia? Solamente tendrá cabida en este Curso elemental el criterio que interesa para justificar los desarrollos más frecuentes; pero, ante todo, planteemos la condición de convergencia hacia un límite prefijado s, en un punto x.

La igualdad [98-9] de DIRICHLET para la función constante $f(x) = 1$ (cuyos c. F. son: $a_0 = 2$, $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = \ldots = 0$) se reduce a ésta:

$$[98\text{-}10] \qquad 1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})u}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}\,2\,du \quad .$$

luego restándola de [98-9] después de multiplicada por el número s, resulta la fórmula fundamental:

$$[98\text{-}11]\quad s_n(x) - s = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})u}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u}[f(x+u)+f(x-u)-2s]du,$$

cuya convergencia hacia 0 es la *condición necesaria y suficiente para que la* s. F. *tenga la suma s para un cierto x.*

El teorema fundamental de RIEMANN permite reducir el intervalo a $(0, \delta)$, pues la integral en (δ, π) tiende a 0 para $n \to \infty$. En segundo lugar, simplifiquemos el denominador, poniendo $\frac{1}{2}u$ en vez de $\operatorname{sen}\frac{1}{2}u$, y resulta una condición equivalente, ya que la diferencia entre ambas integrales es:

$$\int_0^\delta \operatorname{sen}(n+\tfrac{1}{2})u\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u} - \frac{2}{u}\right][f(x+u)+f(x-u)-2s]du,$$

donde los factores que acompañan al seno son finitos en el origen; y por el teorema de RIEMANN tiende a 0 la integral, para $n \to \infty$. El criterio de convergencia hacia s se reduce, por tanto, a esta condición, *necesaria y suficiente*:

$$[98\text{-}12]\quad \int_0^\delta \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})u}{u}[f(x+u)+f(x-u)-2s]du \to 0$$

para $n \to \infty$, la cual se verifica, por el mismo teorema de RIEMANN, si es integrable absolutamente el coeficiente del seno. Resulta así el sencillo, pero eficaz, criterio siguiente:

CRITERIO DE DINI: *Condición suficiente para que la* s. F. *de* $f(x)$ *tenga suma* $f(x)$ *en el punto x es la convergencia de la integral*:

$$[98\text{-}13]\quad \int_0^\delta \frac{|f(x+u)+f(x-u)-2f(x)|}{u}du \quad , \quad \text{o:}$$

$$\int_{-\delta}^\delta \frac{|f(x+t)-f(x)|}{t}dt \quad ,$$

siendo uniforme la convergencia si δ es independiente de x.

Casos particulares importantes son:

Condición de LIPSCHITZ: Para la convergencia de la s. F. es *suficiente* que el incremento $f(x+t)-f(x)$ sea infinitésimo de orden positivo, respecto de $t \to 0$.

En particular: *La función* $f(x)$ *es desarrollable en* s. F. *en todo punto donde admite derivada finita; y en todo punto de discontinuidad de primera especie, si las dos ramas admiten tangente; pero en este caso la serie converge hacia el límite* $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

La convergencia es *uniforme* en $[a_1, b_1]$ si *además* es $f(x)$ continua en (a, b) con $a < a_1 < b_1 < b$.

EJEMPLOS. Como aplicación de este criterio simplicísimo, y para ejercicio del principiante, daremos en el párrafo siguiente varios desarrollos convergentes para todo x; bien entendido que en los puntos de discontinuidad se asigna a la función el valor promedio de los límites a ambos lados.

OTROS CRITERIOS DE CONVERGENCIA. — En vez de referirse a cada punto x, como el criterio de DINI, se refieren a un intervalo los siguientes:

CRITERIO DE JORDAN. — *La* s. F. *de una función absolutamente integrable, converge en todo intervalo donde tenga variación acotada* (§ 55-9). *La convergencia es uniforme hacia* $f(x)$ *en un intervalo interior a cada intervalo de continuidad, y en los puntos de discontinuidad de 1ª especie converge hacia el promedio* $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

Podemos suponer

$$[98\text{-}14] \qquad \varphi(u;x) = \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - s \quad ,$$

con $s=\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$, diferencia de dos funciones monótonas crecientes (§ 55-9, *d*), y razonar como si $\varphi(u;x)>0$ fuese creciente, tendiendo a cero con u [*uniformemente* en x si $f(x)$ fuese *continua*]. Para $\nu=n+\frac{1}{2}$, aplicando a [98-12] el segundo teorema de valor medio (§ 79-2) sale:

$$2\int_0^\delta \varphi(u;x)\frac{\operatorname{sen}\nu u}{u}\,du = 2\varphi(\delta;x)\int_\varepsilon^\delta \frac{\operatorname{sen}\nu u}{u}\,du =$$

$$= 2\varphi(\delta;x)\int_{\nu\varepsilon}^{\nu\delta}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt <$$

$$< 2\varphi(\delta;x)\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = 2\,.\,1{,}851\,937\ldots\varphi(\delta;x)\to 0 \quad \text{con} \quad \delta\to 0 \quad ,$$

pues es

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt < \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt > \int_{\nu\varepsilon}^{\nu\delta},$$

independientemente del valor de ν. Así para $\delta=\delta_1$ suficientemente pequeño, podemos hacer primero $\varphi(\delta_1;x)<\mu$ arbitrariamente pequeño, y habiendo fijado así δ_1, por el teorema de RIEMANN es

$$\lim_{n\to\infty} 2\int_\delta^{\delta_1}\varphi(u;x)\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})u}{u}\,du = 0.$$

Los ejemplos siguientes muestran que los criterios de DINI y de JORDAN no se incluyen uno al otro.

EJEMPLOS: 1. Para $f(x)=1/\ln(1/x)$ en $0<x<\pi$; $f(x)=0$ en $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$, se cumple el criterio de JORDAN con s. F. convergente, pero no se cumple la condición de DINI, pues

$$\int_0^\delta \frac{dt}{t\ln(1/t)} = \Big[-\ln\Big(\ln\frac{1}{t}\Big)\Big]_0^\delta = +\infty.$$

2. En cambio $f(x)=x^\sigma\operatorname{sen}(1/x)$ en $0<x<\pi$; $f(x)=0$ en $\pi\leqslant\leqslant x\leqslant 2\pi$, con $0<\sigma<1$ cumple el criterio de DINI en $x=0$ con s. F. convergente, pero no cumple el criterio de JORDAN, por no ser de variación acotada.

Veamos un criterio que comprende a los dos anteriores:

CRITERIO DE VALLÉE-POUSSIN. *Si la función*

$$\Psi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(u;x)\,du \quad ,$$

es de variación acotada en un semi-intervalo a la derecha de $t=0$, *con* $\varphi(u;x)$ *dada por* [98-14], *entonces la* s. F. *es convergente. Si se elige* s *de manera que* $\Psi(t)\to 0$ *para* $t\to 0$, *la suma de la serie es* s.

Pues $\varphi(t;x)=\mathrm{d}/\mathrm{d}t\{t\Psi(t)\}=\Psi(t)+t\,\Psi'(t)$ y como $\Psi(t)$ es de variación acotada y tiende a cero, la parte de integral [98-12] que le corresponde tiende a cero por el criterio de JORDAN, mientras que por ser $\Psi'(t)$ integrable (L) (§ 95), la parte correspondiente a $t\Psi'(t)$ tiende a cero por el criterio de DINI.

4. **Ejemplos de desarrollos convergentes.** — Es útil tener en cuenta que si $\mathrm{f}(x)$ es periódica con período 2π e integrable, es:

[98-15] $$\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x \quad ;$$

[98-16] $$\int_a^{a+2\pi} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Casos particulares interesantes son:

Función impar: $\mathrm{f}(-x)=-\mathrm{f}(x)$. Transformando [98-2] de acuerdo con [98-16], último miembro, resulta:

$$a_m=0 \quad ; \quad b_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{f}(x)\,\mathrm{sen}\,mx\,\mathrm{d}x \quad ; \quad (m=0,1,2,\dots) \quad ;$$

$$\mathrm{f}(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\,nx \quad ,$$

serie de senos, análoga a potencias impares.

Función par: $\mathrm{f}(-x)=\mathrm{f}(x)$. Se obtiene análogamente:

$$a_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{f}(x)\cos mx\,\mathrm{d}x \quad ; \quad b_m=0 \quad ; \quad (m=0,1,2,\dots) \quad ;$$

$$\mathrm{f}(x)\sim\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx \quad ,$$

serie de cosenos, análoga a potencias pares.

Dada una función integrable *arbitraria* en $(0,\,l)$ se la puede suponer completada en $(-l,\,0)$ ya como función par o impar, para obtener su desarrollo ya en serie de cosenos, ya de senos.

Función alternada: $\mathrm{f}(x+\pi)=-\mathrm{f}(x)$. De $\cos 2n(x+\pi)=\cos 2nx$; $\mathrm{sen}\,2n(x+\pi)=\mathrm{sen}\,2nx$, resulta, descomponiendo las integrales [98-2] en suma de integrales en los intervalos $(0,\pi)$ y $(\pi,2\pi)$:

$$\tfrac{1}{2}a_0=a_2=a_4=a_6=\dots=0 \quad ; \quad b_2=b_4=b_6=\dots=0.$$

Calcúlense los c. F. de las funciones representadas en las gráficas siguientes y demuéstrese, mediante el criterio de DINI, la validez de los correspondientes desarrollos convergentes para todo x:

FUNCIONES IMPARES (series de senos):

EJEMPLO 1. $f_1(x) = +\pi/4$ en $0 < x < \pi$ (fig. 331).

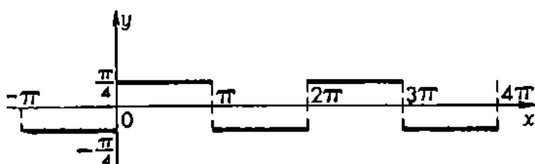


Fig. 331.

$$f_1(x) \sim \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \dots$$

Para $x = \frac{1}{2}\pi$ se obtiene la suma de la serie numérica (cfr. § 45-6, nota):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

EJEMPLO 2. $f_2(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ en $0 < x \leqslant \pi$. (fig. 332).

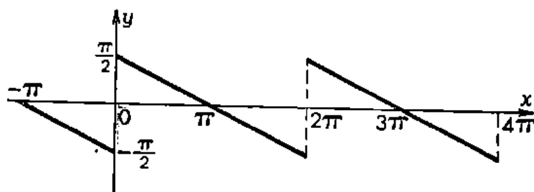


Fig. 332.

$$f_2(x) \sim \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \dots$$

EJEMPLO 3. (Fig. 333):

$$f_3(x) = \begin{cases} x & \text{en} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi \\ \pi - x & \text{en} \quad \frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

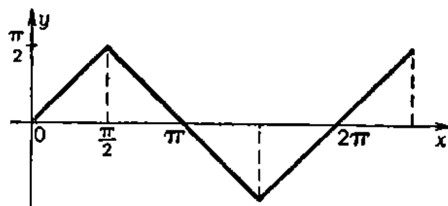


Fig. 333.

$$f_3(x) \sim \frac{4}{\pi}\left[\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^2} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^2} - \dots \right].$$

Para $x = \frac{1}{2}\pi$ se obtiene la suma de la serie numérica:

$$\pi^2/8 = 1 + (1/3^2) + (1/5^2) + \dots$$

FUNCIONES PARES (series de cosenos):

EJEMPLO 4. (Fig. 334):

$$f_4(x) = \begin{cases} +\pi/4 & \text{en} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi \\ -\pi/4 & \text{en} \quad \frac{1}{2}\pi < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

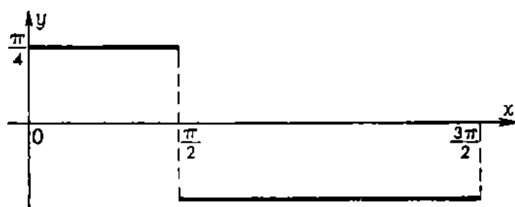


Fig. 334.

$$f_4(x) \sim \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots$$

También se obtiene de ejemplo 1 observando que $f_4(x) = f_1(x + \frac{1}{2}\pi)$.

EJEMPLO 5. $f_5(x) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x$ en $0 \leqslant x \leqslant \pi$. (fig. 335).

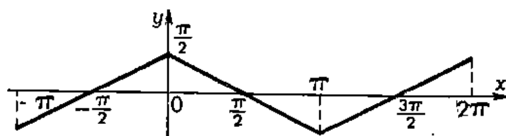


Fig. 335.

$$f_5(x) \sim \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$$

También se obtiene de ejemplo 3 observando que $f_5(x) = f_3(x + \frac{1}{2}\pi)$.

EJEMPLO 6. $f_6(x) = x^2$ en $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ (fig. 336).

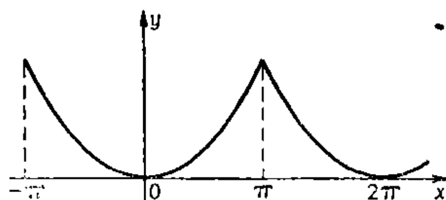


Fig. 336.

$$f_6(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$$

Para $x = 0$ se obtiene:

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

Restando de la serie numérica del ejemplo 3 resulta:

$$\frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$$

Para $x = \pi$ se obtiene:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

NOTA. DU BOIS REYMOND dió el primer ejemplo de una función continua con s. F. *no convergente*. Uno de **FEJÉR**, relativamente sencillo, es el siguiente: Si ponemos

$$f_n(x) = 2 \operatorname{sen} nx \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}$$

y construimos la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_{2^{n^3}}(x) \quad ,$$

ésta resulta continua con s. F. divergente en $x = 0$.

5. La suma (C) de las series de Fourier y las integrales singulares. — Habrá observado el lector que la convergencia de la s. F. de $f(x)$ en el punto x hacia el valor $f(x)$, aun siendo esta función continua en él, exige condiciones complementarias. Hay, en efecto, funciones continuas sin excepción, cuya s. F. no converge en algún punto (§ 98-4, nota); la feliz idea de FEJÉR (1902) de aplicar a la serie el método de promedios de CESÀRO (Cap. V, nota I, *g*) transforma la integral de DIRICHLET en la integral de FEJÉR, más sencilla y eficaz. En efecto, al sumar las expresiones [98-8] haciendo $n = 0, 1, 2, \dots$, para formar el promedio $\sigma_n = (1/n)(s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1})$ aparece en el integrando la suma de senos de múltiplos impares de $\frac{1}{2}u$, que ya se ha calculado en [98-6] (basta poner $x = \frac{1}{2}u$) y resulta la *integral de* FÉJER:

[98-17] $$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} \frac{(\operatorname{sen} \frac{1}{2}nu)^2}{(\operatorname{sen} \frac{1}{2}u)^2}[f(x+u) + f(x-u)]du = \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\operatorname{sen} \frac{1}{2}nu)^2}{(\operatorname{sen} \frac{1}{2}u)^2} f(x+u)\,du.$$

En particular, aplicada a la función constante $f(x) = 1$, ya se ha visto en [98-10] que vale $s_n(x) = 1$, luego su promedio es también 1; por tanto, la fórmula paralela a la [98-10] es:

[98-18] $$1 = \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\operatorname{sen} \frac{1}{2}nu)^2}{(\operatorname{sen} \frac{1}{2}u)^2}\,du.$$

La integral de FEJÉR queda clasificada en una familia muy amplia que tiene frecuentes aplicaciones:

DEF. Se llama *integral singular* en el punto x a la integral paramétrica que tiene la forma

$$F_n(x) = \int_{-a}^{a} \lambda_n(u) f(x+u)\,du \quad ,$$

de *núcleo* $\lambda_n(u) \geqslant 0$ en un entorno del origen, y cumple estas condiciones:

I) $$\int_{-a}^{a} \lambda_n(u)\,du \to 1 \quad \text{para} \quad n \to \infty.$$

II) $$\int_{p}^{q} \lambda_n(u)\,du \to 0, \quad \text{si } p \text{ y } q \text{ están a un lado de } 0.$$

En virtud de II, la convergencia de la integral I hacia 1 se verifica

en todo entorno de 0, puesto que en todo intervalo fuera del entorno tiende a 0, al crecer n. Resulta, pues, que el valor de la integral, o sea del área, sensiblemente 1 desde un n en adelante, se concentra en el entorno del origen; por tanto, la curva que representa la función $\lambda_n(u)$ se va elevando en éste, como se observa en los ejemplos; y en los casos más sencillos tiene forma de campana que se estrecha y eleva indefinidamente al crecer n.

EJEMPLOS. Compruébese que satisfacen a I y II los núcleos siguientes en $(-\infty, +\infty)$ (indicando con exp t la función e^t):

$$\lambda_n(u) = \frac{n}{1+n^2u^2} \quad , \quad \lambda_n(u) = n \,.\, \exp(-n^2u^2).$$

Con ellos las integrales análogas a [98-18] no valen 1, sino π y $\sqrt{\pi}$, respectivamente. Ese número se llama *coeficiente de convergencia*; y es obvio que se puede reducir a 1, dividiendo el núcleo por él.

Nótese que las curvas campaniformes son, en estos casos, la *versiera* (§ 33-10, ejemplo) y la curva de GAUSS e^{-x^2}.

El teorema siguiente debe ser considerado como uno de los más importantes del Análisis, porque sistematiza multitud de razonamientos de esencia común y aspecto distinto, ahorrando muchas repeticiones.

TEOR. 1. *Si la función acotada* $f(x)$ tiene $\lim f(x) = l$ para $x \to x_0$, *también la transformada* $F_n(x_0) \to l$ para $n \to \infty$. Por definición de límite, fijado $\varepsilon > 0$, existe un entorno $(-c, c)$ de x_0, en el cual es $f(x) = l + \delta(x)$, $|\delta(x)| < \varepsilon$. Descompongamos:

$$F_n(x) = \int_{-a}^{-c} + \int_{-c}^{c} + \int_{c}^{a}$$

y para $n \to \infty$ tienden a 0 la 1ª y 3ª integrales, en virtud de la hipótesis II, pues en valor absoluto no superan a las respectivas $M \int \lambda_n(u)du \to 0$. La segunda integral vale:

$$\int_{-c}^{c} \lambda_n(u)[l + \delta(u)]du = l \int_{-c}^{c} \lambda_n(u)du + \int_{-c}^{c} \lambda_n(u)\delta(u)du \quad ,$$

cuyo sumando 2º es en valor absoluto menor que

$$\varepsilon \int_{-c}^{c} \lambda_n(u)du < 2\varepsilon \quad ,$$

mientras el primero tiende a l, por la hipótesis I. En definitiva: $\lim F_n(x) = l$ para $n \to \infty$.

Si $f(x)$ es continua en un punto x_0, es decir: $l = f(x_0)$, este valor viene dado como límite de la integral singular; y si $f(x)$ es continua en un intervalo, viene expresada en la forma $f(x) = \lim F_n(x)$ para $n \to \infty$.

NOTAS: 1. *La convergencia es uniforme en todo intervalo cerrado interior a otro de continuidad de* $f(x)$, porque entonces, en la demostración anterior puede elegirse c independiente de x en dicho intervalo.

2. Si en (I) el límite no es 1, sino $\lambda \neq 0$ (coeficiente de convergencia), es claro que $F_n(x) \to \lambda l$. Si el punto singular es extremo del intervalo, la demostración subsiste para el límite lateral. Finalmente, si el punto singular es interior, pero son distintos los límites laterales l^- y l^+ y los coeficientes de convergencia son λ^-, λ^+, el resultado es: $\lambda^-l^- + \lambda^+l^+$.

TEOR. 2. (FEJÉR). *La serie de* FOURIER *de toda función continua* $f(x)$ *es sumable* (C) *y su suma viene expresada por la integral de* FEJÉR:

[98-19] $$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\operatorname{sen} \frac{1}{2}nu)^2}{(\operatorname{sen} \frac{1}{2}u)^2} f(x+u)du \quad ;$$

y subsiste la igualdad para las discontinuidades de 1ª especie en que $f(x)$ *toma el valor promedio* $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

El núcleo de la integral cumple la condición I, pues según [98-18] es constantemente 1. Separado un entorno $(-c, +c)$ de 0, el denominador se conserva superior a $(\operatorname{sen} \frac{1}{2}c)^2$ y el numerador no supera a 1, ni la función a una cota M; luego, sacando estos factores constantes, queda la integral de du, que vale 2π, y con el coeficiente exterior queda $1/n \to 0$, luego se verifica II. Aplicando el teor. 1, resulta [98-19].

NOTA. 3. El promedio $\sigma_n(x)$ *tiende uniformemente a* $f(x)$ *en todo intervalo cerrado interior a otro de continuidad de* $f(x)$, como consecuencia de nota 1.

TEOR. 3. (WEIERSTRASS). *Toda función continua puede aproximarse uniformemente mediante polinomios,* es decir, *si* $f(x)$ *es continua en* $[a, b]$, *dado* $\varepsilon > 0$ *arbitrario, a él corresponde un polinomio* $p(x)$ *tal que*

$$[98\text{-}20] \qquad |f(x)-p(x)| < \varepsilon \quad \text{en} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

En efecto, si $\alpha < a < b < \beta$, mediante $t = 2\pi(x-\alpha)/(\beta-\alpha)$ podemos transformar $[a, b]$ en un intervalo interior a $[0, 2\pi]$ donde $f(x)$ puede prolongarse de infinitas maneras por continuidad, y por el teorema 2, nota 3, existe entonces un *polinomio trigonométrico* $\sigma_n(x)$ tal que $|f(x)-\sigma_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ en el intervalo $[a, b]$. Basta entonces reemplazar los senos y cosenos de $\sigma_n(x)$ por sumas parciales de su desarrollo de TAYLOR (§§ 45-2, *a*, y 43-4, *a*) suficientemente largas para que el polinomio $p(x)$ obtenido cumpla $|\sigma_n(x)-p(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$, y entonces quedará demostrado que

$$|f(x)-p(x)| < |f(x)-\sigma_n(x)| + |\sigma_n(x)-p(x)| < \varepsilon.$$

NOTAS: 4. Del teorema 3 resulta la aproximación cuadrática por polinomios, es decir que es denso el sistema $\{1, x, x^2, \ldots\}$ de las potencias de x (§ 97-6, *b* y *c*).

También resulta de teor. 2, nota 3, la aproximación cuadrática indefinida de toda función $f(x)$ continua en $[-\pi, \pi]$ por polinomios trigonométricos, es decir la densidad del sistema trigonométrico, ya señalada en § 97-6, *a*. En efecto; 1º: Si $f(-\pi) = f(\pi)$, prolongada $f(x)$ por periodicidad resulta $[-\pi, \pi]$ interior a un intervalo de continuidad y es aplicable nota 3. 2º: Si $f(-\pi) \neq f(\pi)$ para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $g(x)$, continua en $[-\pi, \pi]$, con $g(-\pi) = g(\pi)$ tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-g(x)]^2\, dx < \tfrac{1}{4}\varepsilon \quad ;$$

como por 1º existe un polinomio trigonométrico $\sigma_n(x)$ tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} [g(x)-\sigma_n(x)]^2\, dx < \tfrac{1}{4}\varepsilon \quad ,$$

resulta de la desigualdad triangular para las distancias (§ 96-2, nota)

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-\sigma_n(x)]^2\, dx < (\tfrac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon.$$

5. Se conocen varias demostraciones directas del importante teorema 3. Una muy breve es la siguiente: Dada $f(x)$ continua en $[a, b]$ y por tanto uniformemente continua (§ 26-6), se vió en § 26, ejercicio 6, que existe una poligonal $\varphi(x)$ tal que $|f(x)-\varphi(x)| < \varepsilon$ para todo x de $[a, b]$. Según ejercicio 7 del § 26, toda poligonal puede expresarse mediante la función $|x| = +\sqrt{x^2} = +\sqrt{1-(1-x^2)}$, expresable también como límite de polinomios ordenados según las potencias de $1-x^2$ (§ 45-5). Luego, tomando suficientes términos de los desarrollos en serie, la poligonal $\varphi(x)$ se puede aproximar por un polinomio $p(x)$ con error $< \varepsilon$, y el mismo polinomio aproxima $f(x)$ con error $< 2\varepsilon$.

TEOR. 4. (FEJÉR-LEBESGUE). *La s. F. de* f(x) *es sumable* (C) *hacia* f(x) *para todo* x *del llamado conjunto de* LEBESGUE, *donde se cumple*

[98-21] $$\int_0^h |f(x+t)-f(x)|\,dt = o(h) \quad ,$$

lo que ocurre en casi todo $[0, 2\pi]$ (§ 95, Ejerc. 16).

Así en la teoría de LEBESGUE, la s. F. representa *unívocamente* la función a menos de un conjunto de medida nula, es decir, *dos funciones con la misma* s. F. *son equivalentes.* En la teoría de CAUCHY-RIEMANN para obtener dicha unicidad se ha de restringir severamente la familia de funciones f(x) (§ 97-7).

Sea x un punto que cumpla [98-21] y tomemos $s = f(x)$ en [98-14] para la [98-19]. Resulta:

$$2\int_0^t |\varphi(u;x)|\,du = \int_0^t |f(x+2u)+f(x-2u)-2f(x)|\,du \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t |f(x+2u)-f(x)|\,du + \int_0^t |f(x-2u)-f(x)|\,du = o(t) \quad ,$$

por lo que

$$\Phi(t) = \int_0^t |\varphi(u;x)|\,du \leqslant \mu\,.\,t \quad ,$$

con $\mu > 0$ arbitrario, para $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$. Poniendo $n > 1/\varepsilon$ quedará:

[98-22] $$\int_0^\delta \varphi(t;x)\,\frac{\operatorname{sen}^2 nt}{t^2}\,dt = \int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\delta} = J_1 + J_2 + J_3.$$

Como $\operatorname{sen}^2\theta \leqslant \theta^2$, es (integrando por partes en J_2):

$$|J_1| = \left|\int_0^{1/n}\right| < n^2\int_0^{1/n}|\varphi(t;x)|\,dt < \mu\,.\,n \quad ;$$

$$|J_2| = \left|\int_{1/n}^{\varepsilon}\right| \leqslant \int_{1/n}^{\varepsilon}\frac{|\varphi(t;x)|}{t^2}\,dt = \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon^2} - n^2\Phi\left(\frac{1}{n}\right) +$$

$$+\,2\int_{1/n}^{\varepsilon}\frac{\Phi(t)}{t^3}\,dt < \frac{\mu}{\varepsilon} + 2\mu\int_{1/n}^{\varepsilon}\frac{dt}{t^2} < \frac{\mu}{\varepsilon} + 2\mu n < 3\mu n \quad ;$$

$$|J_3| = \left|\int_{\varepsilon}^{\delta}\right| < \frac{A}{\varepsilon^2}\,.$$

Teniendo en cuenta [98-22], queda

$$\left|\frac{2}{n\pi}\int_0^\delta \varphi(t;x)\,\frac{\operatorname{sen}^2 nt}{t^2}\,dt\right| < \frac{2\mu}{\pi} + \frac{6\mu}{\pi} + \frac{2A}{\pi\,.\,n\varepsilon^2} \quad ,$$

verificándose la análoga de [98-12] para [98-19] si se elige μ primero, dando ε y luego n suficientemente grande.

6. Integración de series de Fourier. — TEOR. *Toda serie de* FOURIER, *aun no siendo convergente (y por tanto, sin que la convergencia en su caso necesite ser uniforme o acotada) es integrable término a término en el sentido de que la serie que resulte, converge como serie de* FOURIER *hacia la integral de la función dada.*

Si $f(x)$ tiene a_m, b_m como coeficientes de su s. F. [98-1], la

$$F(x) = \int_0^x \{f(t) - \tfrac{1}{2}a_0\}\, dt$$

es periódica, $F(2\pi) = F(0) = 0$, continua y de variación acotada (§ 55-9 y § 95-5, *b*), por lo que es desarrollable en s. F. convergente para todo x (§ 98-3):

$$F(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx).$$

Aquí es, análogamente a [98-1], e integrando por partes:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\cos nt\, dt = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} \{f(t) - \tfrac{1}{2}a_0\} \operatorname{sen} nt\, dt =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\, dt = -\frac{b_n}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad ;$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\operatorname{sen} nt\, dt = \frac{1}{\pi}\left[-F(t)\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{2\pi} +$$

$$+ \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} \{f(t) - \tfrac{1}{2}a_0\} \cos nt\, dt =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt = \frac{a_n}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad ;$$

donde la parte integrada se anula por ser $F(2\pi) = F(0) = 0$.

Queda así:

$$F(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \operatorname{sen} nx - b_n \cos nx}{n},$$

y para $x = 0$, resulta

[98-23] $$\tfrac{1}{2}A_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n},$$

donde por tanto, el segundo miembro representa una serie convergente, si b_n son c. F. de una cierta función; restando estas dos queda

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \operatorname{sen} nx + b_n(1 - \cos nx)}{n},$$

donde el segundo miembro está formado por las integrales término a término de la serie [98-1], como queríamos demostrar.

La convergencia de la serie [98-23], siempre asegurada si los b_n son *coeficientes de una serie de* FOURIER, prueba que el ejemplo de FATOU $\sum_2 \operatorname{sen} nx/(\ln n)$, convergente para todo x (§ 22-4, *c*), no es una serie de FOURIER, por ser divergente (§ 80-6, ejemplo) la serie $\sum_2 1/(n \ln n)$. En efecto, podría comprobarse que la serie trigonométrica de FATOU *no es integrable* (L), y es fácil probar que la suma de la serie integrada $\sum_2 \cos nx/(n \ln n)$ tiende a infinito para $x \to 0$.

7. Fenómeno de Gibbs-Wilbraham. — Fué observado *empíricamente* por GIBBS, al trazar gráficas aproximantes mediante los analizadores armónicos (§ 99-7), aunque ya fué descubierto anteriormente a GIBBS (1898), por H. WILBRAHAM (ver Cambridge & Dublin Math. J., *3*, p. 198-201; 1848).

Se explica por no ser uniforme la convergencia de la serie de FOURIER en el entorno de una discontinuidad de primera especie de $f(x)$, aun cuando en ésta la s. F. sea convergente. Las sumas parciales de la serie [98-1] se acercan mediante ondas a la curva dada tanto como se quiera en cada punto, pero en el punto de discontinuidad x de primera especie dan una altura de onda que *excede* en cerca de un 18 % el valor de $f(x^+)$. Es fácil referir, por diferencia, el caso general al caso particular (figura 337):

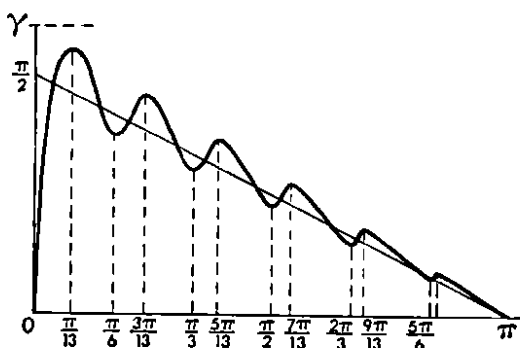


Fig. 337.

[98-24] $$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \quad \text{en} \quad 0 < x < 2\pi \quad ,$$

en cuyo desarrollo de FOURIER del segundo miembro, por ser función impar, resulta $a_n = 0$, mientras que

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{n} .$$

Repitiendo el cálculo de § 98-3, resulta al integrar

$$\int_0^x (\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt)\, dt = \tfrac{1}{2}x + s_n(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t} dt \quad ,$$

y por tanto, la suma parcial $s_n(x)$ de [98-11] viene dada por:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} kx}{k} = -\tfrac{1}{2}x + \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t} dt \quad ,$$

con resto respecto de [98-24]:

[98-25] $$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k} = \tfrac{1}{2}\pi - \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t} dt =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi - \int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt + \varrho_n(x) \quad ,$$

siendo

$$\varrho_n(x) = \int_0^x \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t - t}{2t \operatorname{sen} \frac{1}{2}t} \operatorname{sen}(n+\tfrac{1}{2})t \, dt \to 0 \quad ,$$

con $n \to \infty$ ó $x \to 0$, por ser continuo el quebrado del integrando en $t = 0$ (§ 98-1).

Para hallar la aproximación más desfavorable, obtengamos en $x \neq \neq 2k\pi$, la derivada de [98-25]:

$$r_n'(x) = -\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x} = 0$$

en $x_k = 2k\pi/(2n+1)$ para $k = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n$.

En cada x_k (variable con n) resulta de [98-25]:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x_k) = \tfrac{1}{2}\pi - \int_0^{k\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx + \lim_{n\to\infty} \varrho_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$

y para $k = 1$ queda

$$\lim_{n\to\infty} r_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) = \tfrac{1}{2}\pi - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi - 1{,}851\,937\ldots = -0{,}281\,14\ldots$$

Así es $\gamma = \frac{1}{2}\pi . 1{,}178\,979\ldots$ que excede al semisalto $\frac{1}{2}\pi$ en cerca de un 18 %.

Observemos expresamente que si aproximamos $f(x)$ mediante las medias aritméticas $\sigma_n(x)$ de FEJÉR (§ 98-5), el fenómeno de GIBBS no subsiste.

EJERCICIOS

1. Hallar los desarrollos de FOURIER de:

   a) $f(x) = x/(2\pi)$ para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$;

   b) $f(x) = x/(2\pi)$ para $0 \leqslant x < \pi$,
   $f(x) = (x/(2\pi)) - 1$ para $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$;

   c) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$;

   d) $f(x) = |\cos x|$ para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$;

   e) $f(x) = \frac{1}{2}$ para $a \leqslant x < \frac{1}{2}(a+b)$,
   $f(x) = -\frac{1}{2}$ para $\frac{1}{2}(a+b) \leqslant x < b$, $(a < b)$.

2. Hallar para qué valores de x son válidos los desarrollos:

   $\ln|2\cos\frac{1}{2}x| = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \ldots$,

   $\ln|2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x| = -\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\cos 3x - \ldots$.

3. Si a_n, b_n son los c. F. de $f(x)$, demostrar que para $|r| < 1$ es:

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \textstyle\sum_n (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) r^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2} f(t)\,dt.$$

4. Demostrar que

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2} f(t)\,dt = \tfrac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)] ,$$

en todo x para el que existe el segundo miembro.

5. Una serie de FOURIER puede multiplicarse por cualquier función $g(x)$ de variación acotada e integrarse término a término entre límites finitos.

6. Para k_n números naturales cualesquiera, estudiar si $\sum_n (\cos k_n x)/n^2$ representa la serie de FOURIER de su suma, y el orden de decrecimiento de los c. F. $a_{k_n} = 1/n^2$.

7. Demostrar que si $f(x)$ satisface la condición de LIPSCHITZ de orden p:

$$f(x+h) - f(x) = O(|h|^p) \quad , \quad (0 < p \leqslant 1) \quad \text{para} \quad h \to 0 \quad ,$$

uniformemente respecto de x, entonces es $a_n = O(n^{-p})$, $b_n = O(n^{-p})$.

8. Demostrar que si $f(x)$ es de variación acotada, entonces es $a_n = O(1/n)$, $b_n = O(1/n)$.

9. Si $f(x)$ es absolutamente continua de período 2π, entonces es $a_n = o(1/n)$, $b_n = o(1/n)$.

§ 99. INTEGRAL DE FOURIER. INTERPOLACIÓN TRIGONOMÉTRICA

1. **Serie de Fourier en intervalo cualquiera.** — Una serie de la forma

$$[99\text{-}1] \quad f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{nx}{\lambda} + b_n \operatorname{sen}\frac{nx}{\lambda}\right)$$

representa una función periódica con período $2\pi\lambda$. Los coeficientes, en lugar de [98-2], vendrán dados por

$$[99\text{-}2] \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi\lambda}\displaystyle\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\cos\frac{nt}{\lambda}\,dt \quad , \\ b_n = \dfrac{1}{\pi\lambda}\displaystyle\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\operatorname{sen}\frac{nt}{\lambda}\,dt \quad , \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Para verlo basta normalizar las funciones del sistema $\{\cos nx/\lambda, \operatorname{sen} nx/\lambda\}$ que es ortogonal en cualquier intervalo de longitud $2\pi\lambda$, o bien más brevemente observar que el cambio de variable $x/\lambda = x'$ transforma $f(x)$ en una función $f(\lambda x') = F(x')$ de período 2π, y escribir para ella [98-1] y [98-2] (con integrales entre $-\pi$ y π, cfr. [98-16]).

EJEMPLO. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \tfrac{1}{2} & \text{para} \quad a < x < \tfrac{1}{2}(a+b) \\ -\tfrac{1}{2} & \text{para} \quad \tfrac{1}{2}(a+b) < x < b \quad , \quad \text{con período } b - a. \end{cases}$$

Es $\lambda = (b-a)/2\pi$, dando función impar en $x - a$, respecto de la cual es $a_n = 0$,

$$b_n = \frac{4}{b-a}\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\,dx = \begin{cases} 2/(\pi n) & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

También se reduce el ejemplo 1 de § 98-4 mediante

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\, f_1\left(2\pi\frac{x-a}{b-a}\right)$$

y resulta

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left[(4k-2)\pi\dfrac{x-a}{b-a}\right]}{2k-1}.$$

2. **Integral de Fourier.** — Teniendo en cuenta [99-2] podemos escribir el desarrollo [99-1] así:

$$[99\text{-}3]\quad f(x) \sim \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\cos\frac{n(x-t)}{\lambda}\,dt.$$

Si para $\lambda \to \infty$ ponemos $n/\lambda = u_n$, la serie de [99-3] toma la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(u_n)\,(u_{n+1} - u_n)\quad ,$$

donde

$$\Phi(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\cos u(x-t)\,dt\quad ,$$

parecida a suma de RIEMANN, con $\Delta u = 1/\lambda$.

Si prescindimos de las dificultades de que las sumas de RIEMANN se refieren a una serie infinita y de que $\Phi(u)$ depende de λ, al hacer $\lambda \to \infty$, la [99-3] se convierte, al pasar al límite, en:

$$[99\text{-}4]\qquad f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt\quad ,$$

llamada *integral de* FOURIER y que representa (con las restricciones que veremos) la función *arbitraria* $f(x)$ sobre $(-\infty, \infty)$ en la misma forma que una serie de FOURIER representa la función con período finito. Obsérvese que en la integral reiterada [99-4] *no* puede invertirse el orden de integración, pues

$$\int_{0}^{\infty} \cos u(x-t)\,du$$

es oscilante.

Desarrollando el

$$\cos u(x-t) = \cos ux \cos ut + \operatorname{sen} ux \operatorname{sen} ut\quad ,$$

la [99-4] puede tomar forma análoga a [98-2] con

$$[99\text{-}5]\qquad f(x) \sim \int_{0}^{\infty} \{a(u)\cos ux + b(u)\operatorname{sen} ux\}\,du$$

siendo análogamente a [98-1]:

$$[99\text{-}6]\qquad \begin{cases} a(u) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt \quad ; \\[2ex] b(u) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen} ut\,dt. \end{cases}$$

Ahora, en lugar de pulsaciones *discretas* n, tenemos pulsaciones *continuas* u con amplitudes $a(u)$, $b(u)$.

La línea intuitiva de pensamiento seguida sería difícil de

justificar lógicamente y es más fácil dar la siguiente demostración directa de representación y convergencia de la integral de FOURIER, en condiciones suficientes que estudios más detenidos pueden mejorar considerablemente.

TEOR. *Si suponemos* f(x) *absolutamente integrable en* $(-\infty, \infty)$, *en todo punto* x *donde se cumplan condiciones suficientes de convergencia a* S *para la* s. F. *de* f(x), *tiene sentido escribir*:

[99-7] $$S = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt.$$

En efecto, por [98-12] será entonces

[99-8] $$\pi S = \lim_{n\to\infty} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+2t)\,\frac{\operatorname{sen}(2n+1)t}{t}\,dt \quad ,$$

teniendo en cuenta [98-10] y que

$$\int_{-\delta}^{\delta} = \int_{-\delta}^{0} + \int_{0}^{\delta},$$

donde aquí δ es un número positivo cualquiera, como se ve recordando el teorema de RIEMANN (§ 98-1) para $f(x+2t)/t$, en todo intervalo que tenga $t=0$ como punto exterior.

La [99-8] puede transformarse así, con inversión admisible del orden de integración (§ 86-4):

[99-9] $$\pi S = \lim_{n\to\infty} \int_{-2\delta}^{2\delta} f(x+\tau)\,d\tau \int_0^{n+\frac{1}{2}} \cos u\tau\,du =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{n+\frac{1}{2}} du \int_{-2\delta}^{2\delta} f(x+\tau)\cos u\tau\,d\tau =$$
$$= \int_0^{\infty} du \int_{-2\delta}^{2\delta} f(x+\tau)\cos u\tau\,d\tau.$$

Justifiquemos que en la integral interior, el intervalo de integración puede extenderse de $-\infty$ a $+\infty$, con lo que estará demostrado [99-7].

Si es $A > 2\delta$, $-A_1 < -2\delta$ será:

$$D = \int_0^{m}\int_{-A_1}^{A} - \int_0^{m}\int_{-2\delta}^{2\delta} = \int_0^{m}\int_{-A_1}^{-2\delta} + \int_0^{m}\int_{2\delta}^{A} =$$
$$= \int_{-A_1}^{-2\delta}\int_0^{m} + \int_{2\delta}^{A}\int_0^{m},$$

y como por hipótesis, existe

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = C \quad ,$$

quedará:

$$|D| \leqslant \left|\int_{-A_1}^{-2\delta} f(x+\tau)\,\frac{\operatorname{sen} m\tau}{\tau}\,d\tau\right| + \left|\int_{2\delta}^{A} f(x+\tau)\,\frac{\operatorname{sen} m\tau}{\tau}\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\delta}\left(\int_{-A_1}^{-2\delta}|f(x+\tau)|\,d\tau + \int_{2\delta}^{A}|f(x+\tau)|\,d\tau\right) \leqslant \frac{C}{2\delta}.$$

Por ser C y δ independientes de A y A_1, si con m fijo hacemos $A \to +\infty$, $-A_1 \to -\infty$, resultará

$$\left|\int_0^m \int_{-\infty}^{\infty} - \int_0^m \int_{-2\delta}^{2\delta}\right| \leqslant \frac{C}{2\delta} ,$$

que para $m \to +\infty$, según [99-9], da

[99-10] $$\left|\lim_{m\to\infty} \int_0^m \int_{-\infty}^{\infty} - \pi S\right| \leqslant \frac{C}{2\delta} .$$

Como δ es un número positivo arbitrario, el último miembro puede hacerse tan pequeño como se quiera, lo que demuestra [99-7].

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt$$

converge uniformemente respecto de u en todo intervalo *finito*, podemos en [99-10] invertir el orden de integración (§ 86-4, teor. 2) y obtener la *integral simple de* FOURIER:

[99-11] $$S = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\operatorname{sen} m(x-t)}{x-t}\,dt ,$$

en donde *no* podemos pasar al límite bajo el signo integral.

3. **Transformadas de Fourier.** — Si $f(x)$ es una función *par*, en [99-6] es $b(u)=0$, quedando, para $S=f(x)$, la *fórmula del coseno de la integral de* FOURIER:

[99-12] $$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos ux\,du \int_0^{\infty} f(t)\cos ut\,dt.$$

Si se escribe

[99-13] $$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos ut\,dt ,$$

la [99-12] se convierte en

[99-14] $$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} g(u)\cos xu\,du.$$

Por tanto, existe una relación recíproca entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$ y se dice que son *transformadas de* FOURIER *por el coseno* una de otra. Así, por ejemplo, si $f(x)\varepsilon(L)$ en $(0, \infty)$ y es de variación acotada en todo intervalo finito, entonces [99-13] es absolutamente convergente y [99-14] subsiste en el sentido que la integral converge (no es necesario que absolutamente) hacia $S = \frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

Análogamente, si $f(x)$ es función *impar*, en [99-6] es $a(u)=0$, dando la *fórmula del seno de la integral de* FOURIER:

[99-15] $$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen} ux\, du \int_0^\infty f(t) \operatorname{sen} ut\, dt \quad ,$$

que origina las fórmulas recíprocas:

[99-16] $$h(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t) \operatorname{sen} ut\, dt \quad ,$$

[99-17] $$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty h(u) \operatorname{sen} xu\, du \quad ,$$

siendo $f(x)$, $h(x)$ *transformadas de* FOURIER *por el seno.* En las modernas aplicaciones al cálculo simbólico (Ap. III), esta reciprocidad ha tomado importancia extraordinaria.

4. **Forma compleja.** — La expresión exponencial

$$e^{imx} = \cos mx + i \operatorname{sen} mx$$

permite expresar más sintéticamente el desarrollo y la integral de FOURIER.

Si en [98-2] se pone

[99-18] $$a_m = \alpha_m + \alpha_{-m} \quad ; \quad b_m = i(\alpha_m - \alpha_{-m}) \quad ,$$
$$\tfrac{1}{2}a_0 = \alpha_0 \quad ; \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

equivalente a:

[99-19] $$2\alpha_m = a_m - ib_m \quad ; \quad 2\alpha_{-m} = a_m + ib_m \quad ;$$
$$2\alpha_0 = a_0 \quad ; \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \quad ;$$

en lugar de [98-1], será:

[99-20] $$f(x) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{imx} \quad ,$$

donde los coeficientes de FOURIER α_m, en lugar de [98-2], vienen dados por:

[99-21] $$\alpha_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-imt}\, dt \quad , \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Para la integral de FOURIER [99-4], como

$$\int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(t - x)\, dt \quad ,$$

es función par de u, se puede poner

[99-22] $$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(x - t)\, dt.$$

Por otra parte, por ser

$$\int_{-\infty}^\infty f(t) \operatorname{sen} u(x - t)\, dt$$

función impar de u, *en el caso de que las integrales converjan* * (por ejemplo para $f(t)$ absolutamente integrable en $(-\infty, +\infty)$ y los valores de x donde $f(x)$ es continua, pero no así si es discontinua):

$$[99\text{-}23] \qquad 0 = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} u(x-t)\, dt \quad ,$$

que con [99-22] dan la *integral de* FOURIER *en forma compleja*:

$$[99\text{-}24] \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iu(t-x)}\, dt.$$

Las fórmulas de reciprocidad, no completamente simétricas, son aquí:

$$[99\text{-}25] \qquad g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iut}\, dt \quad ,$$

$$[99\text{-}26] \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{ixu}\, du.$$

5. **Aplicaciones.** — *a*) *Factor discontinuo de* DIRICHLET. — Para $f(x)$ par tal que

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{en} \quad 0 \leqslant x < \varepsilon \quad , \\ 0 & \text{en} \quad x > \varepsilon \quad , \end{cases} \quad \text{(fig. 338)}$$

la [99-12] da

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos ux\, du \int_0^{\varepsilon} A \cos ut\, dt =$$

$$= \frac{2A}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} u\varepsilon \cos ux}{u}\, du \quad ,$$

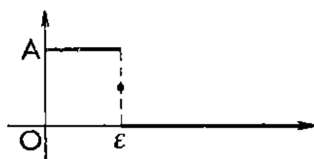


Fig. 338.

que para ε pequeño, da la expresión de un impulso A y es utilísimo en las aplicaciones. Tomando $x = 0$ se obtiene [86-16].

b) *Espectro.* — La serie o la integral de FOURIER dan la interpretación matemática de fenómenos representados por la superposición de procesos periódicos, la primera en forma discreta, la segunda en forma continua y la descomposición [en armónicos, § 99-6] que las expresiones dan, efectúa la llamada *descomposición espectral* del fenómeno en cuestión. Si es $f(x)$ la función dada en el intervalo $-\delta < x < \delta$ y

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{i\pi n x/\delta}$$

* Ver P. PI CALLEJA: *Über die Konvergenzbedingungen der komplexen Form des Fourierschen Integrals.* (Math. Zeitschrift, *40*, pa. 349-374, Berlin, 1935).

es su s. F., se dice que la función se descompone en armónicos de "períodos discretos" $2\delta/n$ o "pulsaciones discretas" $n\pi/\delta$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ con "amplitudes"

$$|\, a_n \,| = \left| \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{f}(t)\, e^{-i\pi n t/\delta}\, dt \right| .$$

Si en cambio se considera el intervalo infinito $-\infty < x <$ $< \infty$, se habla de la descomposición de $\mathrm{f}(x)$ en un *espectro continuo* que para la pulsación u, hace corresponder una intensidad dada por la *densidad espectral*:

$$\mathrm{g}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(t)\, e^{-iut}\, dt.$$

Una aplicación interesante en Óptica resulta al considerar un tren de ondas sinusoidales de longitud 2δ y pulsación ω de manera que sea

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} e^{i\omega x} & \text{si} \quad |\,x\,| < \delta \quad , \\ 0 & \text{si} \quad |\,x\,| > \delta \quad , \end{cases}$$

conteniendo entonces $n = \delta\omega/\pi$ ondas. Su densidad espectral viene dada por

$$\mathrm{g}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{i(\omega - u)t}\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; \frac{\operatorname{sen}(\omega - u)\,\delta}{\omega - u} .$$

Ésta, como función de u tiene un máximo en $u = 0$ y disminuye rápidamente con $1/u$ dando no una raya, sino una franja de ancho finito, pero tanto más intensa y estrecha cuanto mayor sea la longitud 2δ del tren de ondas. Si el número n de ondas es muy grande se obtendrá una franja brillante y estrechísima en torno de ω, pues es

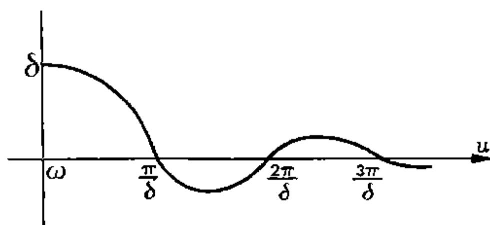


Fig. 339.

$$\frac{\operatorname{sen}(\omega - u)\,\delta}{\omega - u} = \frac{\delta \operatorname{sen} t}{t} \text{si} \quad t = (\omega - u)\,\delta. \quad \text{(fig. 339)}.$$

6. **Interpolación trigonométrica.** — Es análoga a la algebraica (Cap. XII). Dada una función periódica $\mathrm{f}(x)$ de período 2π, definida en $-\pi < x < \pi$, se trata de aproximarla mediante un polinomio trigonométrico, análogo a la suma parcial de la serie [99-20] o su equivalente [98-1], con coeficientes tales que la función formada coincida con $\mathrm{f}(x)$ en puntos equidistantes. Es el método más apropiado para el cálculo numérico, sobre todo si $\mathrm{f}(x)$ se da tabulada o mediante una gráfica. Tanto en este caso como en el exacto de desarrollo infinito [99-20] ó [98-1], por analogía con la Acústica, se dice des-

componer la onda periódica de $f(x)$ para $(-\pi, \pi)$ en ondas armónicas o en armónicos sucesivos (cfr. § 99-5, *b*), y la determinación de los respectivos c. F. recibe el nombre de *Análisis armónico.*

Si damos $2n+1$ puntos equidistantes en $(-\pi, \pi)$ mediante $k\delta$ con $\delta = 2\pi/(2n+1)$, $k = -n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n$, llamaremos $f_{-n}, \ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots, f_n$ a los valores dados de la función en dichos puntos (fig. 340), es decir, $f(k\delta) = f_k$.

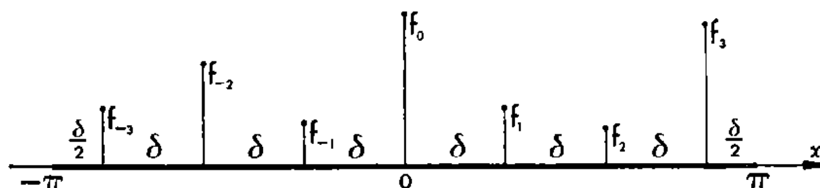


Fig. 340.

El modo más sencillo de determinar un polinomio trigonométrico interpolante es escogerlo de $2n+1$ coeficientes a determinar por la condición de que su gráfica pase por los $2n+1$ puntos dados de la gráfica de $f(x)$.

Así debe cumplirse

$$[99\text{-}27] \qquad \sum_{r=-n}^{n} \alpha_r \, e^{irk\delta} = f_k \quad ; \quad (k = -n, \ldots, 0, \ldots, n).$$

Multipliquemos ambos miembros por $e^{-isk\delta}$ respectivamente $(k = -n, \ldots, 0, \ldots, n)$ con s entero $(|s| \leqslant n)$ y sumemos por columnas, tendremos

$$[99\text{-}28] \qquad \sum_{k=-n}^{n} \sum_{r=-n}^{n} \alpha_r \, e^{ik\delta(r-s)} = \sum_{k=-n}^{n} f_k \, e^{-isk\delta}.$$

Como $(n+\frac{1}{2})\delta = \pi$, resulta (cfr. [98-4]), si $r \neq s$ (§ 22-1, *b*):

$$[99\text{-}29] \qquad \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\delta(r-s)} = e^{-in\delta(r-s)} \frac{1 - e^{i(2n+1)\delta(r-s)}}{1 - e^{i\delta(r-s)}} =$$

$$= \frac{e^{-i\frac{1}{2}(2n+1)\delta(r-s)} - e^{i\frac{1}{2}(2n+1)\delta(r-s)}}{e^{-i\frac{1}{2}\delta(r-s)} - e^{i\frac{1}{2}\delta(r-s)}} = \frac{\operatorname{sen}[(n+\frac{1}{2})\delta(r-s)]}{\operatorname{sen}[\frac{1}{2}\delta(r-s)]} = 0,$$

mientras que dicha suma vale $2n+1$ si $r = s$.

Por lo tanto el primer miembro reordenado de [99-28] vale

$$\sum_{r=-n}^{n} \alpha_r \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\delta(r-s)} = (2n+1)\alpha_s \quad ;$$

es decir

$$[99\text{-}30] \qquad \alpha_s = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} f_k \, e^{-isk\delta} \quad ,$$

$$(s = -n, \ldots, 0, \ldots, n).$$

Para desarrollos del tipo [98·1], teniendo en cuenta [99-18], se deduce de [99-30]

[99-31]
$$\begin{cases} a_s = \dfrac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{f}_k \cos sk\delta \quad , \\ b_s = \dfrac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{f}_k \operatorname{sen} sk\delta \quad , \quad s = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Poniendo $\alpha_r = c_r/\sqrt{2n+1}$ en [99-27] y [99-30] resultan las fórmulas simétricas

[99-32]
$$\begin{cases} \mathrm{f}_k = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \sum_{r=-n}^{n} c_r\, e^{irk\delta} \quad , \\ c_r = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{f}_k\, e^{-irk\delta}. \end{cases}$$

Si el número $2n+1$ de puntos intercalados va creciendo, y se pone $\delta = 2\pi/(2n+1) = dt$, $x_k = k\delta$, en el límite para $n \to \infty$, [99-30] se convierte formalmente en [99-21], y las [99-31] en [98-2] al tender las sumas a las respectivas integrales. Las [99-32] corresponden a las [99-26] y [99-25].

NOTAS: 1. Si se toma un polinomio trigonométrico de menos términos ($2m+1$ coeficientes) que puntos intercalados $2n+1$ haya, no será posible en general hacerlo pasar por todos los puntos, pero haciendo mínimo el error cuadrático $(2n+1)^{-1} \sum [\mathrm{f}_k - \mathrm{s}_m(k\delta)]^2$, por razonamiento análogo al de § 97-2, se obtienen para α_s, $(s = -m, \ldots, 0_r, \ldots, m)$, o para a_s y b_s, $(s = 0, 1, \ldots, m)$, las mismas fórmulas [99-30] y [99-31].

2. En la aplicación numérica, en lugar de $2n+1$ puntos intermedios a la distancia $\delta = 2\pi/(2n+1)$, conviene dividir $(-\pi, \pi)$ ó $(0, 2\pi)$ en $2n$ subintervalos de longitud $\delta = \pi/n$, de modo que n sea par (es decir, el número de subintervalos sea múltiplo de 4, tomándose en la mayoría de los casos prácticos 12 ó 24), pues así se reduce mucho el número de valores diferentes de $\cos sk\delta$ y $\operatorname{sen} sk\delta$. Entonces, se toman sólo en cuenta los valores a partir de $k = -n - 1$ para que en [99-29] resulte $1 - e^{i2n\delta(r-s)} = 0$ con $n\delta = \pi$. Análogamente se trata el caso [99-31], donde faltará por completo b_n (obsérvese además la expresión de a_n), siendo en $(0, 2\pi)$ las fórmulas:

[99-33]
$$\begin{cases} a_s = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \mathrm{f}_k \cos sk\delta \quad , \quad b_s = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \mathrm{f}_k \operatorname{sen} sk\delta \quad , \\ \qquad (s = 1, \ldots, n-1) \quad ; \\ \tfrac{1}{2}a_0 = \dfrac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \mathrm{f}_k \quad , \quad a_n = \dfrac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \mathrm{f}_k \cos k\pi. \end{cases}$$

Los manuales de cálculo numérico dan esquemas diversos para facilitar el análisis armónico.

EJEMPLO. Demos el esquema de cálculo para la subdivisión de $(0, 2\pi)$ en 12 subintervalos. Las fórmulas que dan los coeficientes $\frac{1}{2}a_0$, a_1, ..., a_6, b_1, b_2, ..., b_5 son las [99-33] para $n = 12$, y puede observarse que sólo cuatro valores trigonométricos entran en ellas, a saber: $\operatorname{sen} 0 =$

$= \cos \frac{1}{2}\pi = 0$, $\quad \operatorname{sen} \pi/6 = \cos \pi/3 = \frac{1}{2}$, $\quad \operatorname{sen} \pi/3 = \cos \pi/6 = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866$, $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = \cos 0 = 1$. Es fácil probar que su cálculo puede efectuarse así:

1º) Escríbanse los valores $f(k\pi/n) = f_k$ según el siguiente esquema, calculando sumas y diferencias:

		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
	f_{12}	f_{11}	f_{10}	f_9	f_8	f_7	
Sumas	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
Diferencias		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	

2º) Escríbanse los valores de las sumas y diferencias antes obtenidas según el siguiente esquema, volviendo a calcular sumas y diferencias:

	s_0	s_1	s_2	s_3	d_1	d_2	d_3
	s_6	s_5	s_4		d_5	d_4	
Sumas	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_1'	σ_2'	σ_3'
Diferencias	δ_0	δ_1	δ_2		δ_1'	δ_2'	

3º) Los valores de σ_0, σ_1, σ_2, σ_3, δ_0, δ_1, δ_2 sirven para calcular los coeficientes de los valores de los cosenos en [99-33], mientras que los σ_0', σ_1', σ_2', δ_1', δ_2' dan los de los senos, según el siguiente esquema:

Multiplicar por	*Cosenos*							
0,500			δ_2		$-\sigma_2$	σ_1		
0,866				δ_1				
1,000	$\sigma_0 + \sigma_2$	$\sigma_1 + \sigma_3$	δ_0		σ_0	$-\sigma_3$	δ_0	δ_2
Suma	I	II	I	II	I	II	I	II
I + II	$12 \cdot \frac{1}{2}a_0$		$6a_1$		$6a_2$			
I — II	$12 \cdot a_6$		$6a_5$		$6a_4$		$6a_3$	

Multiplicar por	*Senos*					
0,500	σ_1'					
0,866		σ_2'	δ_1'	δ_2'		
1,000	σ_3'				σ_1'	σ_3'
Suma	I	II	I	II	I	II
I + II	$6b_1$		$6b_2$			
I — II	$6b_5$		$6b_4$		$6b_3$	

7. Analizadores armónicos. — Son aparatos que determinan automáticamente los primeros coeficientes del desarrollo en serie de cualquier función continua, con un número finito de máximos y mínimos en el intervalo $(0, 2\pi)$. Para poder realizar simultáneamente la multiplicación de $f(x)$ por el coseno o seno de nx y la integración entre 0 y 2π, transformaremos por partes las integrales que expresan los coeficientes, en esta forma:

$$n \int y \,.\cos nx \,.\, dx = \int y \,.\, d(\operatorname{sen} nx) = y \,.\, \operatorname{sen} nx - \int \operatorname{sen} nx \,.\, dy,$$

$$n \int y \,.\operatorname{sen} nx \,.\, dx = - \int y \,.\, d(\cos nx) = - y \,.\, \cos nx + \int \cos nx \,.\, dy,$$

luego integrando entre 0 y 2π y diviendo por π resulta:

$$n\pi a_n = - \int_{x=0}^{x=2\pi} \operatorname{sen} nx \,.\, dy \quad ; \quad n\pi b_n = \int_{x=0}^{x=2\pi} \cos nx \,.\, dy,$$

debiendo extenderse ambas desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$.

El cálculo de estas integrales se efectúa mediante una esfera que gira alrededor de un diámetro horizontal paralelo al eje x.

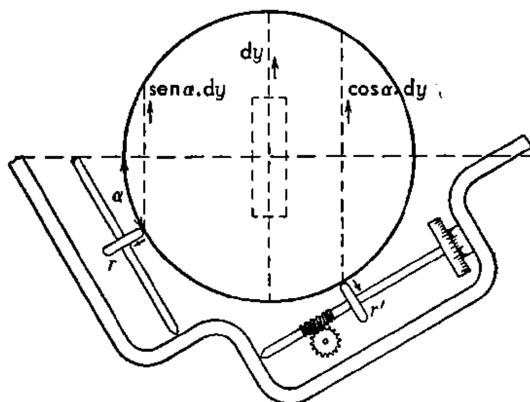


Fig. 341.

En un bastidor horizontal hay dos ejes perpendiculares entre sí, que llevan sendas ruedecillas r y r', las cuales tocan a la esfera en puntos del círculo máximo horizontal. La sección por este plano horizontal está representada por la fig. 341, y la sección vertical en la fig. 342. Debajo de la esfera y tangente a ella hay un disco de ancha llanta; si éste gira un arco Δy, también la circunferencia meridiana de la esfera gira en sentido contrario, y los puntos de contacto de las ruedecillas rr' describen sobre la esfera circunferencias menores paralelas a dicho meridiano; las longitudes de estos arcos de circunferencia son proporcionales a los radios respectivos, luego al girar Δy, la esfera, *la ruedecilla r gira* $\operatorname{sen}\alpha \,.\, \Delta y$, *y la ruedecilla r' gira* $\cos\alpha \,.\, \Delta y$. Bastará, pues, un mecanismo que obligue al bastidor a girar en su plano horizontal de modo que en todo momento sea: $\alpha = nx$; y como la variable independiente es y, siendo por tanto $\Delta y = dy$, el arco total girado por r será la integral definida que figura en a_n, así como la ruedecilla r marcará como arco total girado la integral que figura en b_n.

Estos números leídos directamente en las graduaciones que acompañan a r y r', bastará dividirlos por $n\pi$, para tener los coeficientes a_n y b_n.

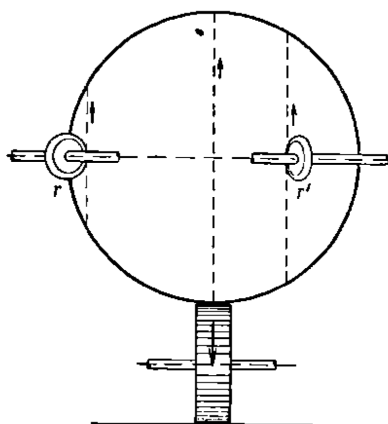


Fig. 342.

El aparato determinará tantos pares de coeficientes como esferas tenga (en la figura 343 se han representado tres esferas solamente). El término constante $\frac{1}{2}a_0$ del desarrollo se determina por un

planímetro o intégrafo, puesto que su significado es el área limitada por la onda con el eje x, dividida por 2π.

Descripción del modelo HENRICI-CORADI. — Consta de un gran bastidor provisto de tres ruedas R_1, R_2, R_3, de modo que se mueve solamente en dirección perpendicular al eje x; sobre uno de los lados de este bastidor se mueve en un intervalo 2π un carrito, el cual lleva unido un estilete P que permite recorrer la curva dada. Al pasar desde el punto P al P', el carrito se ha movido Δx sobre el gran carro y éste a su vez se ha movido Δy en la dirección del eje y; los discos situados debajo de las esferas, las cuales van invariablemente unidas al eje e de las ruedas R_1, R_2, giran como éstas Δy* y esta rotación es transmitida a las esferas, y de éstas a las respectivas ruedecillas r, r'.

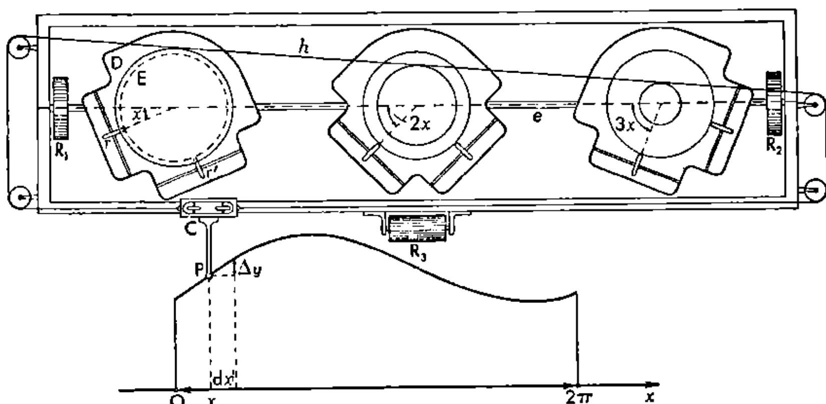


Fig. 343.

Al comenzar a recorrer la onda, desde la posición extrema P_0 del carrito, todos los bastidores están dispuestos de modo que la ruedecilla r de cada uno toca en el diámetro de giro de las esferas, es decir, de modo que el ángulo α de la figura 343 es nulo. Bastará, pues, que al avanzar x el valor de α en cada bastidor sea respectivamente x, $2x$, $3x$, $4x$, ... y esto se consigue fácilmente, porque el carrito lleva atado en sus extremos un hilo de plata que hace girar los bastidores mediante poleas situadas horizontalmente en la parte superior del aparato, formando cuerpo con dichos bastidores y cuyos radios son, respectivamente, 1, 2, 3, ..., de modo que la primera polea da justamente una vuelta, al avanzar 2π el hilo; y cuando éste avanza x, la polea, y con ella el bastidor que soporta las ruedecillas rr', gira un ángulo $\alpha = x$; el bastidor de la segunda esfera gira un ángulo $2x$; el tercero gira $3x$; etc.

En resumen, los coeficientes a_1, b_1; a_2, b_2; ... se obtienen dividiendo las lecturas en las ruedecillas del primero, segundo, ... bastidor por 1, 2, 3, ...

* Si, como suele suceder, estos discos de eje e tienen menor radio que las ruedas R_1, R_2, el arco girado no será Δy sino $h\Delta y$ siendo h la razón de los radios y en vez de multiplicar por $1/\pi$ las lecturas en r y r', la constante será distinta; para cada aparato la graduación de las ruedas r, r' está hecha teniendo en cuenta esta constante, de modo que basta una simple lectura.

EJERCICIOS

1. Si $f(x)$ es absolutamente integrable en $(-\infty, \infty)$ y es

$$\lim \tfrac{1}{2}[f(x+u) + f(x-u)] = s \quad \text{para} \quad u \to 0 \quad ,$$

demostrar que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\delta u}\,du \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(x-t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\,dt \int_0^\infty e^{-\delta u}\cos u(x-t)\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\,\frac{\delta}{\delta^2+(x-t)^2}\,dt \to s \quad \text{para} \quad \delta \to 0.$$

(*Sumabilidad de* [99-7] *por el factor de convergencia de* CAUCHY).

2. Si $f(x)$ es absolutamente integrable en $(-\infty, \infty)$ y es

$$\lim \tfrac{1}{2}[f(x+u) + f(x-u)] = s \quad \text{para} \quad u \to 0 \quad ,$$

demostrar que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\delta^2 u^2}\,du \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(x-t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\delta\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(t)\,e^{-\frac{1}{4}(x-t)^2/\delta^2}\,dt \to s \quad \text{para} \quad \delta \to 0.$$

(*Sumabilidad de* [99-7] *por el factor de convergencia de* WEIERSTRASS).

NOTA: Bastaría suponer que existe un $c > 0$ para el que $e^{-cx^2}f(x)$ es integrable en $(-\infty, \infty)$.

3. Si

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt}F(t)\,dt \quad \text{con} \quad p = \sigma + iu \quad , \quad \sigma > 0$$

(integral de LAPLACE, Cap. XXIX, nota VIII), deducir la fórmula recíproca (MELLIN):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(p)\,e^{px}\,dp = \begin{cases} F(x) & \text{si} \quad x > 0 \quad , \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \quad , \end{cases}$$

por sustitución formal en [99-25] y [99-26].

4. En la *transformación de* MELLIN:

$$\varphi(s) = \int_0^\infty \Phi(y)\,y^{s-1}\,dy \quad ,$$

deducir la fórmula recíproca

$$\Phi(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(s)\,y^{-s}\,ds \quad ,$$

por sustitución formal en [99-26] y en [99-25]. Aplicarla a

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y}\,y^{s-1}\,dy$$

(§ 86, ejercicio 10, ó § 53, ejercicio 8, y Cap. XXIX, nota VII) para obtener

$$e^{-y} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) y^{-s}\, ds \quad , \quad (c > 0).$$

5. Efectuar la interpolación trigonométrica de 12 intervalos equidistantes con las siguientes ordenadas:

$f_1 = 3{,}042$; $f_2 = 2{,}134$; $f_3 = 1{,}273$; $f_4 = 0{,}788$;
$f_5 = 0{,}495$; $f_6 = 0{,}370$; $f_7 = 0{,}540$; $f_8 = 0{,}191$;
$f_9 = -0{,}357$; $f_{10} = -0{,}437$; $f_{11} = 0{,}767$; $f_{12} = 2{,}714$.

6. Lo mismo para las ordenadas:

$f_1 = 0{,}262$; $f_2 = 0{,}524$; $f_3 = 0{,}786$;
$f_4 = 1{,}047$; $f_5 = 1{,}309$; $f_6 = 0$;
$f_7 = -1{,}309$; $f_8 = -1{,}047$; $f_9 = -0{,}786$;
$f_{10} = -0{,}524$; $f_{11} = -0{,}262$; $f_{12} = 0$.

NOTAS AL CAPÍTULO XXV

I. Desigualdades de Hölder y de Minkowski. — La fecundidad del espacio **H** indujo a generalizarlo, considerando potencias de exponente $p > 1$, en vez de cuadrados. La norma de $\mathrm{f}(t)$ se define así:

[XXV-1] $$\|\mathrm{f}\|_p^p = \int |\mathrm{f}(t)|^p\, dt \quad , \quad (p > 1) \quad ,$$

donde designamos por $\|\mathrm{f}\|_p$ al segundo miembro elevado al exponente $1/p$ y suponemos existente la integral en el campo A que se considere. Por ejemplo, en la teoría (L), se dice en tal caso que $\mathrm{f}\varepsilon(L^p)$ o que $\mathrm{f}(t)$ *es de clase* (L^p).

Para funciones $\mathrm{x}(t)\varepsilon(L^p)$, $\mathrm{y}(t)\varepsilon(L^q)$, con $(1/p)+(1/q)=1$, la generalización de la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ (§ 96-2), llamada de HÖLDER por haberla dado éste para las sumas, es la siguiente:

[XXV-2] $$|\mathrm{xy}| \leqslant \|\mathrm{x}\|_p . \|\mathrm{y}\|_q \quad , \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) \quad , \quad (\text{HÖLDER}),$$

donde el primer miembro es el valor absoluto ordinario del producto escalar funcional (§ 96-3). En efecto, los conjuntos donde

$$|\mathrm{y}| \leqslant |\mathrm{x}|^{p-1} \quad , \quad |\mathrm{x}| < |\mathrm{y}|^{1/(p-1)} = |\mathrm{y}|^{q-1}$$

son complementarios en A, y así, en uno y otro caso, se cumple

$$|\mathrm{x}(t)\mathrm{y}(t)| \leqslant |\mathrm{x}|^p \quad , \quad |\mathrm{x}(t)\mathrm{y}(t)| \leqslant |\mathrm{y}|^q \quad ,$$

figurando en los dos primeros miembros el producto ordinario; por tanto, es $\mathrm{x}(t)\mathrm{y}(t)\varepsilon(L)$, (§ 95-2, teor. 4). La recta tangente a la gráfica de la función potencial $y = x^m$ en $x = 1$ es $y = 1 + m(x-1)$, y como para $0 < m < 1$ la curva queda por debajo de la tangente (§ 33-9), para $x > 0$ es $x^m - 1 \leqslant m(x-1)$ y sólo igual si $x = 1$. Poniendo $0 < m = 1/p < 1$, $1 - m = 1/q$, $x = a/b$, la desigualdad anterior se convierte en:

[XXV-3] $$a^{1/p}\, b^{1/q} \leqslant (a/p) + (b/q) \quad ,$$

válida para a, b reales positivos cualesquiera, $p > 1$, $1/q = 1-(1/p)$, valiendo la igualdad sólo para $a = b$. Si tomamos

$$a = |\mathrm{x}|^p : \int |\mathrm{x}|^p\, dt \quad , \quad b = |\mathrm{y}|^q : \int |\mathrm{y}|^q\, dt \quad ,$$

sustituimos en [XXV-3] e integramos en el campo A, resultará

$$\int |x(t)y(t)|\,dt \,.\, \{\int |x|^p\,dt\}^{-1/p} \,.\, \{\int |y|^q\,dt\}^{-1/q} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad ,$$

de donde, por [95-11], se deduce [XXV-2].

La generalización de la propiedad triangular [96-5] se llama *desigualdad de* MINKOWSKI:

[XXV-4] $$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

(exponente $p > 1$), con el significado para $\|f\|_p$ dado en [XXV-1].

La desigualdad anterior se deduce mediante el artificio de descomponer

$$|x(t) + y(t)|^p = |x(t) + y(t)|^{p-1}\,|x(t)| + |x(t) + y(t)|^{p-1}\,|y(t)| \quad ,$$

y la integral del primer miembro se desdobla en dos. Aplicando la desigualdad de HÖLDER a cada producto (factor primero con exponente q y segundo con p) aparece en el segundo miembro el factor común

$$\{\int |x(t) + y(t)|^p\,dt\}^{1/q} \quad ;$$

y dividiendo por él ambos miembros, aparece en el primero el exponente $1 - (1/q) = 1/p$ en la integral, es decir, resulta [XXV-4].

Nótese la simetría entre los exponentes *conjugados* p y q que en el caso más sencillo, valen $\frac{1}{2}$ (espacio **H**).

II. **Relación entre los espacios funcionales y el espacio H.** — Ya se ha dicho que la teoría desarrollada en este Cap. XXV sigue la pauta de la Geometría analítica; y la correlación es clarísima en el problema del desarrollo en serie de funciones ortogonales [97-8], cuyo significado geométrico es paralelo al de la Geometría de E_n: descomponer un vector en suma de componentes según los ejes; esas componentes son precisamente las *proyecciones*, cuyas medidas respecto de los n vectores, elegidos como unitarios, son las *coordenadas* del vector.

En los espacios funcionales de HILBERT es preciso elegir infinitos vectores unitarios, o sea, una sucesión ortonormal; y cada vector, es decir, cada función de (R^2) o (L^2), según la teoría de integración que se aplique, tiene infinitas coordenadas c_0, c_1, c_2, ... Pero aquí se plantean dos problemas: la *suficiencia del sistema de referencia* para representar cualquier vector del espacio (R^2) o (L^2) y la *suficiencia de uno u otro de dichos espacios de vectores*, para lograr el isomorfismo con el espacio **H** de todas las coordenadas reales. Analicémoslos separadamente:

Suficiencia del sistema (φ_r). — Basta este sencillo ejemplo: adoptado el sistema sen nx, que es ortogonal en el intervalo $(0, 2\pi)$ (se normaliza dividiendo por $\sqrt{\pi}$) los c. F. de la función $\cos x$, como los de cualquier función *par*, tal como x^2, son todos nulos; luego la s. F. con ellos formada es idénticamente nula. Tales funciones y muchas otras no pares, no admiten, pues, desarrollo respecto de este sistema ortonormal, es decir, no son sumas de sus componentes, aun con el significado dado en [97-8], ni vale el teorema de PITÁGORAS, que ahora es la igualdad de PARSEVAL.

Pero estas novedades no son tales, pues es patente la insuficiencia del sistema de senos para expresar funciones pares, de igual modo que no bastan *dos* vectores para expresar cualquiera de E_3. Con ellos podremos componer todo un plano, pero no los vectores exteriores a él; de igual modo, con el sistema sen nx podemos componer todas las funciones impares, que forman un subespacio de todas las (R^2) o (L^2). Este problema ha sido suficientemente analizado, dada la elementalidad de nuestros recursos, y ya hemos visto cómo basta la *densidad* del sistema (φ_n) que se demuestra en los casos más importantes, como, por ejemplo, en el caso de los polinomios de LEGENDRE, mediante el teorema de aproximación de WEIERSTRASS (§ 97-6, *b*; § 98-5, teor. 3).

Suficiencia del espacio vectorial. — Si se comete el lapsus de adoptar un sistema insuficiente (φ_n) la sucesión de coordenadas $(0, 0, \ldots)$ corresponde a infinitas funciones, como se ha visto en un sencillo ejemplo, y sucederá siempre que exista un vector ortogonal a todos los φ_n (sistema no completo). Por tanto, la correspondencia entre el espacio (R^2) y el H no es biunívoca; pero salvando el lapsus, completando el sistema con nuevas funciones ortogonales para hacerlo denso, cada sucesión (a_r) de H no puede corresponder a *más* de una función f, ¿pero corresponderá a *alguna*? El espacio (R^2) es coordinable con una parte del H, pero ¿lo será con todo el H? La contestación es negativa para el espacio (R^2) y ello justifica se considere la integral (L), (nota III).

Con ella se desarrolla toda la teoría como para la integral (R); pero mientras ésta se detiene ante la imposibilidad de demostrar la correspondencia recíproca (toda sucesión de cuadrado sumable es sucesión de c. F. de una cierta función de cuadrado integrable), en cambio ello se logra gracias a ese enriquecimiento del campo de las funciones y se construye *la función*, la única función, que tiene los números a_n como c. F. Con esto nos basta para contestar a la pregunta planteada; pues apenas construyamos una sola función que sea integrable (L) lo mismo que su cuadrado, y no lo sea (R), tarea que será muy fácil en nota III, bastará adoptar la sucesión de sus c. F. (aunque no se calculen efectivamente) y por el teorema de unicidad puede asegurarse la inexistencia de ninguna función (R) que corresponda a aquellos c. F. Pero el valor del descubrimiento de FEDERICO RIESZ (1907) reside en su parte positiva: en el campo de las funciones L^2 hay *correspondencia biunívoca* entre el espacio (L^2) y el H. En cuanto al isomorfismo, salta a la vista en el cuadro axiomático de § 96-1 completado con la igualdad de PARSEVAL [97-6], que expresa la igualdad de distancia al origen en ambos espacios y, por tanto, la conservación de distancia entre dos puntos, es decir, la *isometría* de los dos espacios.

III. Convergencia funcional y teorema de Riesz-Fischer. — *a*) El teorema citado de F. RIESZ (nota II) es consecuencia de la forma adoptada por E. FISCHER (1907):

TEOR. 1. *Si una sucesión de funciones* $\{f_n\}$ *de clase* (L^p) **(nota I)** *cumple en el campo de integración* A *la condición*

$$[\text{XXV-5}] \qquad \lim (L) \int_A |f_n - f_m|^p \, dt = 0 \quad para \quad n, m \to \infty \quad ,$$

entonces existe una función f *de clase* (L^p), $(p \geqslant 1)$, *unívocamente determinada a menos de un conjunto de medida nula, a la que la sucesión* $\{f_n\}$ *converge en media de orden* p:

$$[\text{XXV-6}] \qquad \lim (L) \int_A |f - f_n|^p \, dt = 0 \quad para \quad n \to \infty .$$

La condición [XXV-5] es análoga al criterio general de convergencia de BOLZANO-CAUCHY (§ 20-6); todo espacio abstracto en que este criterio subsiste, se llama *completo* (FRÉCHET), y el teorema de FISCHER asegura que *el espacio de funciones* (L^p) *es completo* (cfr. § 96-4, axioma $[C_1]$). En cambio no lo es el espacio de funciones continuas, ni casi continuas o seccionalmente continuas, debiendo en la teoría (R) considerarse sucesiones más restringidas de funciones "convergentes", tales como las equicontinuas (§ 86-1, def. 2) y conjuntamente acotadas respecto de n como hace el libro de COURANT-HILBERT (nota IV, 1), para que se conserve el principio general de convergencia.

La demostración del teorema de FISCHER es la siguiente: A cada número natural r corresponde un mínimo número natural n_r tal que

$$\int_A |f_n - f_m|^p \, dt < 4^{-r} \quad , \quad (m \geqslant n_r;\ n \geqslant n_r).$$

En particular

$$\int_A |f_{n_{r+1}} - f_{n_r}|^p \, dt < 4^{-r} \quad , \quad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Si el conjunto A_r contenido en el A es aquel donde

$$|f_{n_{r+1}} - f_{n_r}| > 2^{-r/p} \quad ,$$

su medida será $|A_r| \leqslant 2^{-r}$ (§ 95-2, teor. 5). Por tanto, tomando como mayorante $\sum_r 2^{-r/p}$ (§ 22-2, b), la serie

$$\sum_r |f_{n_{r+1}}(t) - f_{n_r}(t)|$$

es convergente si para algún valor de N la variable t no pertenece al conjunto unión $A_N \cup A_{N+1} \cup A_{N+2} \cup \ldots$. Como la medida ($< 2.2^{-N}$) de este conjunto tiende a cero con 1/N, la serie anterior es convergente en casi todo A. Entonces también converge

$$\sum_r \{f_{n_{r+1}} - f_{n_r}\} \quad ,$$

que en c.t. A define la suma $f(t)$ tal que

[XXV-7] $$\lim f_{n_r}(t) = f(t) \quad \text{para} \quad r \to \infty .$$

Por el teorema de FATOU (§ 95-4, teor. 3) es

$$\liminf_r \int_A |f_{n_s} - f_{n_r}|^p dt \geqslant \int_A |f_{n_s} - f|^p dt \quad ,$$

de donde, por la hipótesis [XXV-5], existe una sucesión parcial f_{n_s} que converge en media de orden p a $f(t)$.

Si se aplica la desigualdad de MINKOWSKI (nota I)

$$\{\int_A |f - f_n|^p dt\}^{1/p} \leqslant \{\int_A |f - f_{n_s}|^p dt\}^{1/p} + \{\int_A |f_{n_s} - f_n|^p dt\}^{1/p} \quad ,$$

resulta por lo probado para $\{f_{n_s}\}$ y por la hipótesis [XXV-5] que el segundo miembro anterior tiende a cero para $n \to \infty$, $n_s \to \infty$; por tanto, toda la sucesión $\{f_n\}$ converge en media de orden p a f.

Finalmente, si la sucesión $\{f_n\}$ converge en media de orden p a f y también a g, será entonces (nota I)

$$\{\int_A |f - g|^p dt\}^{1/p} \leqslant \{\int_A |f - f_n|^p dt\}^{1/p} + \{\int_A |g - f_n|^p dt\}^{1/p}$$

que tiende a cero, por lo que el primer miembro (independiente de n) es nulo, y por § 95-2, teor. 9, es $f(t) = g(t)$ en c.t. A.

b) De la forma de FISCHER se deduce muy fácilmente el teorema de F. RIESZ:

TEOR. 2. *Si los números reales a_n son de cuadrado sumable* (§ 96-2), *entonces existe una función* $f(t)$ *de clase* (L^2) (nota I), *tal que respecto de un sistema arbitrario ortonormal* $\{\varphi_n(t)\}$ *de referencia* (§ 97-1) *de clase* (L^2), *las a_n son los coeficientes de* FOURIER *de su desarrollo*:

$$f(t) \sim a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + \ldots \quad ,$$

cuyas sumas parciales convergen cuadráticamente (§ 97-3) *hacia* $f(t)$, *cumpliéndose además la igualdad de* PARSEVAL [97-6].

En efecto, la suma parcial

[XXV-8] $$f_n(t) = a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + \ldots + a_n\varphi_n(t)$$

cumple

$$\int_A \{f_{n+q} - f_n\}^2 dt = \int_A \left\{ \sum_{r=n+1}^{n+q} a_r\varphi_r \right\}^2 dt = \sum_{r=n+1}^{n+q} a_r^2 \quad ,$$

cuyo último miembro tiende a cero para $n \to \infty$ y cualquier q, y al cumplirse [XXV-5] para $p = 2$, existe por el teorema 1 una función $f(t)$ de la clase (L^2) a la que converge cuadráticamente la suma parcial [XXV-8].

Aplicando la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ (§ 96, ejercicio 1 ó nota I)

$$| \int_A (f_n - f)\varphi_r \, dt |^2 \leqslant \int_A (f_n - f)^2 \, dt \, . \int_A \varphi_r^2 \, dt \quad ,$$

resulta también

$$\int_A f_n(t)\varphi_r(t) dt \rightarrow \int_A f(t)\varphi_r(t) dt \quad \text{para} \quad n \rightarrow \infty \quad ,$$

y como el primer miembro vale a_r para $n > r$, será también

[XXV-9] $$a_r = \int_A f(t)\varphi_r(t) dt.$$

Así los números a_r son los c. F. de f respecto del sistema $\{\varphi_n\}$ y podrá aplicarse [97-4], de donde se obtiene la igualdad de PARSEVAL [97-6].

c) En la teoría (L^2), diremos que el sistema $\{\varphi_n(t)\}$ de clase (L^2) es *denso* o *cerrado* en A, si toda la función $f(t)$ de clase (L^2) se puede aproximar con error cuadrático $< \varepsilon$ mediante expresiones lineales de las φ_n con coeficientes constantes (cfr. § 97-3, def. 1). Si el sistema $\{\varphi_n(t)\}$ es ortonormal, la definición anterior equivale a decir que para toda $f(t)$ de clase (L^2) se cumple la igualdad de PARSEVAL [97-6].

Ahora diremos que el sistema ortonormal $\{\varphi_n(t)\}$ de clase (L^2) es *completo* en A, si toda función $\varphi(t)$ de clase (L^2) ortogonal a cada una de las $\varphi_n(t)$ es equivalente (§ 95-2, nota 2) a cero en A.

Pues bien, el teorema de RIESZ-FISCHER permite demostrar:

TEOR. 3. *Todo sistema ortonormal* $\{\varphi_n(t)\}$ *de clase* (L^2) *cuando es denso o cerrado es completo y recíprocamente.*

Para el teorema directo, la demostración es la misma que en § 97-7. Para el recíproco (demostrando el contrario), si existe una función $f(t)$ de clase (L^2) tal que no cumpla [97-6], es decir $\int f^2 dt > \sum a_r^2$ para a_r dado por [XXV-9], las funciones $f_n = f - \sum_0^n a_r\varphi_r$ verifican [XXV-5] y por el teorema 1, convergen cuadráticamente a una función $g(t)$ no equivalente a cero, pues en otro caso sería $\int f_n^2 dt \rightarrow \rightarrow \int f^2 dt - \sum a_r^2 = 0$ en contra de la hipótesis. Entonces el sistema $\{\varphi_n\}$ no es completo, pues $g(t)$ resulta ortogonal a todas las φ_n, ya que razonando como para [XXV-9], es $\int f_n\varphi_r dt \rightarrow \int g\varphi_r dt$ para $n \rightarrow \infty$, de donde al ser nula la primera integral para $n > r$, también lo es la segunda, como queríamos demostrar.

El espacio funcional (L^2) queda así representado biunívocamente por el espacio real de HILBERT (§ 96-2 y nota II) y representa otra interpretación concreta del espacio abstracto de HILBERT (§ 96-4).

IV. Bibliografía. — 1. Los cursos y tratados generales de Análisis matemático suelen dedicar varios capítulos a las series de FOURIER. Recordemos en particular los textos citados en Cap. XVIII, nota IV, 1, y entre ellos el de VALLÉE POUSSIN que utiliza sólo la integral de RIEMANN y el enciclopédico de HOBSON conteniendo la teoría de LEBESGUE. Como aplicación de ésta, dedica también a las series de FOURIER un excelente capítulo la obra de TITCHMARSH (citada en Cap. XI, nota IV, 3), Sintéticas y didácticas introducciones, con sólo la integral de RIEMANN, contienen las obras de KNOPP (citada en Cap. V, nota IV, 1) y de COURANT (citada en Cap. VI, nota VI, 2).

Con sólo indicaciones de la teoría de LEBESGUE, pero haciendo resaltar sobre todo la interpretación funcional hilbertiana de los desarrollos en series de funciones ortogonales, dedica un magnífico capítulo II la famosa obra de COURANT-HILBERT (citada en Cap. XVI, nota IV, 4). Inspirados en las mismas ideas, nosotros hemos seguido la exposición de la obra de J. REY PASTOR (citada en Cap. XVIII, nota IV, 1), que también reproduce en forma más cuidadosa

J. REY PASTOR: *Los problemas lineales de la Física* (Inst. Nac. Técn. Aeron. EST. TERRADAS, Madrid, 1955).

2. Introducción didáctica con tratamiento moderno y haciendo hincapié en los polinomios ortogonales clásicos, es

F. TRICOMI: *Serie Ortogonali di Funzioni* (S. I. E., Inst. Ed. Gheroni, Turín, 1948); trad. alem. refundida: *Vorlesungen über Orthogonal Reihen* (Springer, Berlín, 1955).

De alcance más elevado y exposición clara y rigurosa, original en muchos puntos, está el segundo volumen (*Sviluppi in Serie di Funzioni Ortogonali*) de la obra de VITALI y SANSONE (citada en Cap. IX, nota VIII, 3).

Dedicada más que a los desarrollos mismos, al estudio de las diversas funciones especiales que entran en ellos, está el libro claro y riguroso:

J. LENSE: *Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik* (W. de Gruyter, Berlín; 2ª ed., 1947).

Sobre varios tipos de aproximación trata la obra traducida del ruso, que estudia diversos sistemas de funciones ortogonales:

I. P. NATANSON: *Konstruktive Funktionentheorie* (Akademie-Verlag, Berlín, 1955).

Valiosa obra sobre aproximación de funciones en el campo real, comenzando con un capítulo sobre problemas de aproximación en espacios lineales normados, es la traducida del ruso:

N. I. ACHIESER: *Vorlesungen über Approximationstheorie* (Akademie-Verlag, Berlín, 1953).

Sin embargo, la obra más completa y fundamental de carácter superior y desarrollada en espacios abstractos es

S. KACZMARZ y H. STEINHAUS: *Theorie der Orthogonalreihen* (ZSFKN, Varsovia, 1935; 2ª ed., Chelsea, Nueva York, 1951).

Obra más especial es la de G. SZEGÖ (citada en Cap. XVI, nota IV, 4) y de carácter bibliográfico

J. A. SHOHAT, E. HILLE y J. L. WALSH: *Bibliography on orthogonal Polynomials* (Washington, 1940).

3. Sobre series trigonométricas, están las introducciones

S. RÍOS: *Introducción a la teoría de las series trigonométricas* (C. Bermejo, Madrid, 1949);

W. ROGOSINSKI: FOURIER*sche Reihen* (W. de Gruyter, Berlín, 1930; trad. inglesa: FOURIER *Series*, Chelsea, Nueva York, 1950).

Enfoque muy adecuado siguiendo lineamientos clásicos, con numerosos ejemplos y ejercicios, da la obra de CARSLAW (citada en Cap. XXII, nota I), con dos apéndices sobre análisis armónico y periodogramas, y sobre integral de LEBESGUE.

Tratamiento más moderno, con inclusión de la teoría de LEBESGUE incluye

G. H. HARDY y W. W. ROGOSINSKI: FOURIER *Series* (Cambridge Tracts nº 38, 1944).

Esta obrita puede servir de introducción a la completa, profunda y excelente

A. ZYGMUND: *Trigonometrical Series* (ZSFKN, Varsovia, 1935).

Más antigua, pero también profunda y completa, con tratamiento de las series dobles, es

L. TONELLI: *Serie trigonometriche* (Zanichelli, Bolonia, 1928).

Obra siempre sugestiva, por la autoridad de su autor y por su trascendencia posterior, es

H. LEBESGUE: *Leçons sur les séries trigonométriques* (Gauthier-Villars, Paris, 1906).

4. Dando mucha importancia a las aplicaciones físicas, dedicada a estudiantes avanzados, está:

D. JACKSON: FOURIER *Series and Orthogonal Polynomials* (Carus Monog., nº 6, Math. Ass. Am.; Oberlin, Ohio; 1941).

Para estudiantes menos maduros, a quienes interese el uso y aplica-

ción a la Física de las series de FOURIER y de la transformación de LAPLACE, omitiendo demostraciones y aspectos teóricos, está:

PH. FRANKLIN: FOURIER *Methods* (McGraw-Hill, Nueva York, 1949).

Un tratado moderno, conteniendo también integrales de FOURIER, es

R. V. CHURCHILL: FOURIER *Series and Boundary Value Problems* (McGraw-Hill, Nueva York, 1941).

5. Excelentes obras especiales sobre integrales de FOURIER en distintos aspectos, son las tres siguientes: Conteniendo una rigurosa fundamentación de las integrales trigonométricas, sus fórmulas de representación y su generalización, el teorema (§ 99-2) de la integral de FOURIER y sus aplicaciones en una y varias variables, así como la integral de STIELTJES-FOURIER, está la obra de S. BOCHNER (citada en Cap. XXI, nota II, 1); Centrada en los teoremas tauberianos y su generalización original está

N. WIENER: *The* FOURIER *integral and certain of its Applications* (Cambridge Univ. Press, 1933);

Dejando aparte temas tratados en las dos obras anteriores efectúa un desarrollo más sistemático insistiendo en las transformaciones de funciones con numerosos ejemplos y aplicaciones

E. C. TITCHMARSH: *Introduction to the Theory of the* FOURIER *Integrals* (Clarendon Press, Oxford, 1937).

Obra monográfica sobre un curso dado por su autor es

T. CARLEMAN: *L'Intégrale de* FOURIER *et Questions que s'y rattachent* (Publs. Sci. de l'Inst. MITTAG-LEFFLER, 1, Uppsala, 1944).

A pesar de sus deficiencias teóricas, es estimulante para la investigación original en las aplicaciones físicas el libro

P. M. DUFFIEUX: *L'Intégrale de* FOURIER *et ses applications a l'Optique* (Faculté des Sciences, Besançon, 1948).

Lo mismo puede decirse de

J. KAMPÉ DE FÉRIET: *Mathematical methods used in the statistical theory of turbulence: Harmonic Analysis* (Inst. Fluid Dynam.; Univ. Maryland, College Park, 1951).

Obra breve y correcta para utilizarla en las aplicaciones, con ejemplos para servir de guía en la selección de transformadas apropiadas, es

C. J. TRANTER: *Integral Transforms in Mathematical Physics* (Methuen, Londres, 1951).

Cubre un material inmenso la obra citada en la segunda edición de nuestro volumen I (Cap. XV, nota III, 3), basada en parte en notas dejadas por H. BATEMAN y compiladas por el "*Staff of the Bateman manuscript project*"

A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER y F. G. TRICOMI: *Higher trascendental functions* (vol. I y II, 1953; vol. III, 1955); *Tables of integral transforms* (2 vols.; 1954); (McGraw-Hill, Nueva York).

De carácter teórico, tratando las transformadas de FOURIER en los espacios (L) y (L^2) para funciones de una y de varias variables, está

S. BOCHNER y K. CHANDRASEKHARAN: FOURIER *Transforms* (Annals of Math. Studies, 19; Princeton Univ. Press, 1949).

6. Las transformadas de FOURIER y aparentadas han tomado un inmenso desarrollo en la matemática aplicada, y mediante la transformación de LAPLACE el cálculo operacional debidamente fundamentado (cfr. Apéndice III) ha llegado a ser un instrumento matemático de gran utilidad.

Por su amplio alcance que rebasa el de otros textos sobre métodos operacionales, su lúcida y esmerada exposición de carácter superior, con problemas de Física e Ingeniería resueltos numéricamente e ilustrados con diagramas, tratando de las transformadas de FOURIER, MELLIN, LAPLACE y HANKEL, citamos primeramente

J. N. SNEDDON: FOURIER *Transforms* (McGraw-Hill, Nueva York, 1951).

La obra que ha marcado una época de fecundas realizaciones, fundamental tanto en el aspecto teórico como en el de las aplicaciones, es

G. DOETSCH: *Theorie und Anwendung der* LAPLACE *Transformation* (Springer, Berlín, 1937; Dover, Nueva York, 1943),

y sus complementarias, dirigidas especialmente a las aplicaciones

G. DOETSCH: *Tabellen zur* LAPLACE-*Transformation und Anleitung zum Gebrauch* (Springer, Berlín, 1947);

D. VOELKER y G. DOETSCH: *Die zweidimensionale* LAPLACE-*Transformation. Eine Einführung in ihre Anwendung zur Lösung von Randwertproblemen nebst Tabellen von Korrespondenzen* (Birkhäuser, Basilea, 1950).

Una exposición muy clara y detallada, con numerosos ejemplos, de la teoría de la transformación de LAPLACE tanto unilateral como bilateral, es:

G. DOETSCH: *Handbuch der* LAPLACE-*Transformation.* Band I. *Theorie der* LAPLACE-*Transformation.* Band. II. *Anwendungen der* LAPLACE-*Transformation.* 1. *Abteilung.* Band III. *Anwendungen der* LAPLACE-*Transformation.* 2. *Abteilung.* (Birkhäuser, Basilea, 1950, 1955, 1956).

Conteniendo, con resultados originales del autor y de BOAS, casi todos los aspectos teóricos de la transformación de LAPLACE y algunas de sus aplicaciones funcionales, está la obra claramente escrita de WIDDER (citada en Cap. XXI, nota II, 1).

En el aspecto teórico contiene una discusión de la clase de todas las transformadas de LAPLACE-STIELTJES tomada como un espacio métrico completo, el folleto:

S. RÍOS: *La prolongación analítica de la integral de* DIRICHLET-STIELTJES (Cons. Sup. Inv. Cient., Madrid, 1944).

Refiriendo las demostraciones a las obras de DOETSCH y WIDDER citadas anteriormente, pero introduciendo los conceptos cuidadosamente explicados con ejemplos ilustrativos del significado de las condiciones impuestas en los teoremas, su influencia relativa y enseñando la utilización práctica de los teoremas enunciados, está el tratado sobre aplicación del cálculo operacional dirigido a matemáticos, físicos e ingenieros

B. VAN DER POL y H. BREMMER: *Operational Calculus, based on the Two-Sided* LAPLACE *Integral* (Cambridge Univ. Press, 1950).

Son excelentes y utilísimos formularios los folletos

N. W. MCLACHLAN y P. HUMBERT: *Formulaire pour le calcul symbolique* (2ª ed., Mémor. Sci. Math. 100, Gauthier-Villars, Paris, 1950; contiene unas 700 fórmulas),

N. W. MCLACHLAN, P. HUMBERT y L. POLI: *Supplément au formulaire pour le calcul symbolique* (Mémor. Sci. Math. 113, Gauthier-Villars, Paris, 1950; contiene unas 400 fórmulas).

Dirigidos a ingenieros y técnicos están:

R. V. CHURCHILL: *Modern operational mathematics in engineering* (McGraw-Hill, Nueva York, 1944),

J. C. JAEGER: *An introduction to the* LAPLACE *transformation with engineering applications* (Methuen, Londres, 1949),

N. W. MCLACHLAN: *Modern Operational Calculus with Applications in Technical Mathematics* (Macmillan, Londres, 2ª ed., 1953).

N. W. MCLACHLAN: *Complex variable theory and transform calculus with technical applications* (2ª ed.; Cambridge Univ. Press, 1953), siendo más teórico

H. S. CARSLAW y J. C. JAEGER: *Operational Methods in Applied Mathematics* (Oxford Univ. Press, 1941).

Omitiendo la teoría matemática, pero con adecuadas referencias, es claro, conciso y manejable el epítome:

P. FUNK, H. SAGAN y F. SELIG: *Die* LAPLACE-*Transformation und ihre Anwendung* (F. Deuticke, Viena, 1953).

En italiano es recomendable la obra

A. GHIZZETTI: *Calcolo simbolico. La Trasformazione di* LAPLACE *e*

il calcolo simbolico degli Elettrotecnici (Consiglio delle Ricerche; Zanichelli, Bolonia, 1943).

Dejando aparte el rigor matemático, son útiles como introducción para uso de físicos y técnicos los folletos franceses

P. HUMBERT y S. COLOMBO: *Le calcul symbolique et ses applications à la physique mathématique* (Mémor. Sci. Math. 105, Gauthier-Villars, Paris, 1947);

M. PARODI: *Applications physiques de la Transformation de* LAPLACE (C. N. R. S., Gauthier-Villars, Paris, 1948;

M. PARODI: *Équations intégrales et Transformation de* LAPLACE (Publ. Sci. et Techn. Min. de l'Air, Paris, 1950).

Sobre cálculo operacional en dos variables con integrales dobles de LAPLACE trata:

L. POLI y P. DELERUE: *Le calcul symbolique à deux variables et ses applications* (Mém. Sc. Math. nº 127, Gauthier-Villars, Paris, 1954).

7. Un excelente capítulo sobre análisis armónico, con esquemas desplegables para los cálculos, trae la obra de WHITTAKER y ROBINSON (citada en Cap. X, nota V, 4). Tratan también el tema WILLERS (citado en Cap. XII, nota III, 1) y las obras de RUNGE y KÖNIG y de SCARBOROUGH (citadas en Cap. V, nota IV, 3).

Modernos analizadores armónicos más prácticos que el clásico de HENRICI-CORADI visto en el texto (§ 99-7) incluye la moderna obra de WILLERS (1951, citada en Cap. XVI-IV 3).

Tablas y esquemas para la práctica del análisis y de la síntesis armónicos dan:

L. ZIPPERER: *Tafeln zur harmonischen Analyse periodischer Funktionen* (Springer, Berlín, 1922);

L. W. POLLAK y C. HEILFRON: *Harmonic analysis and synthesis schedules for three to one hundred equidistant values of empiric functions* (Stationery Office, Dublín, 1947).

Esta obra se continúa en:

L. W. POLLAK y U. N. EGAN: *All term guide for harmonic analysis and synthesis using, 3 to 24*; 26, 28, 30, 34, 36, 38, 42, 44, 46, 52, 60, 68, 76, 84 *and* 92 *equidistant values* (Stationery Office, Dublín, 1949).

Con resultados nuevos y tratando la interpolación trigonométrica en forma análoga a la de las series de FOURIER está el folleto

A. ZYGMUND: *Trigonometric Interpolation* (Univ. Chicago, 1950).

Así como la integral (D) (Cap. XXIV, nota II) resuelve el problema de que toda función derivable en todo punto sea la integral de su derivada, se plantea el problema, mucho más difícil, de obtener una definición conveniente de integral (*trigonométrica* T) para que cualquier serie trigonométrica convergente sea siempre la serie de FOURIER de su suma (§ 98-1, nota). Esta cuestión queda resuelta en el profundo libro que contiene también otros temas de la teoría de funciones de variable real

A. DENJOY: *Leçons sur le Calcul des Coefficients d'une Série Trigonométrique. I. La Différentiation Seconde Mixte et son Application aux Séries Trigonométriques* (1941); II. *Métrique et Topologie d'Ensembles Parfaits et de Fonctions* (1941); III. *Détermination d'une Fonction Continue par ses Nombres Dérivés Seconds Généralisés Extrêmes Finis* (1941); IV. *Les Totalisations. Solution du Problème de* FOURIER. *Appendices et Tables Générales* (1949); (Gauthier-Villars, Paris).

Llevado del afán constructivo en sus definiciones, el autor completa la obra anterior en la magistral y extensa

A. DENJOY: *L'énumération transfinie*; I. *La notion de rang* (1946); II. *L'arithmétisation du transfini*: 1º) *Les permutations*; 2º) *Les suites canoniques* (1952); III. *Études complémentaires sur l'ordination* (1954); IV. *Notes sur les sujets controversés* (1954); (Gauthier-Villars, Paris).

8. Pequeño libro, claramente escrito con empleo de medios analíticos y geométricos, es el primer volumen de una proyectada serie sobre el espacio de HILBERT:

N. ARONSZAJN: *Introduction to the Theory of* HILBERT *Spaces*. Vol. I (Math. Monographs, Oklahoma College, Stillwater, 1950).

Sobre espacio de HILBERT son clásicas las importantes obras siguientes:

G. VITALI: *Geometria nello spazio Hilbertiano* (Bolonia, 1929), la muy profunda y rica en variadas aplicaciones de:

M. H. STONE: *Linear transformations in* HILBERT *space and their applications to analysis* (American Math. Soc., Nueva York, 1932; reimpr. 1948), y la notable exposición geométrica que da el capítulo II de:

J. VON NEUMANN: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Springer, Berlín, 1932), traducción española: *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica* (Publ. del Instituto de Matemáticas "Jorge Juan", Madrid, 1949).

Muy adecuados son la concisa exposición de

F. J. MURRAY: *Linear transformations in* HILBERT *space* (Princeton Univ. Press, 1941),

y el estudio de la geometría del espacio de HILBERT que da el capítulo I de la excelente obra de orientación moderna:

P. R. HALMOS: *Introduction to* HILBERT *space and the theory of spectral multiplicity* (Chelsea, Nueva York, 1951).

De enfoque clásico y con material reciente hasta la época de su publicación original (1950), está la excelente obra traducida del ruso:

V. Z. ACHIESER e I. M. GLASMAN: *Theorie des linearen Operatoren im Hilbert-Raum.* (Akademie-Verlag, Berlín, 1954).

Para estudio previo sirven las obras de LICHNEROWICZ, HALMOS y HAMBURGER-GRINSHAW (citadas en Cap. XVII, nota V, 3).

Además de la fundamental obra de RIESZ y SZ-NAGY (citada en Cap. XXIV, nota IV, 4), contiene rico y nuevo material de análisis funcional, con numerosos ejemplos, el texto de carácter superior, claro y asequiblemente escrito, tratando principalmente sobre ecuaciones integrales

A. C. ZAANEN: *Linear analysis. Measure and integral,* BANACH *and* HILBERT *space, linear integral equations* (Interscience Publ., Nueva York, 1953).

Generalización muy amplia se obtiene en la notable obra muy especializada

E. HILLE: *Functional Analysis and Semi-Groups* (Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 31, Nueva York, 1948).

Pretendiendo mejorar la técnica empleada con el espacio hilbertiano, introduce la idea simplificadora de "distribución" (cfr. Apénd., III), cuya transformación de FOURIER tiene también propiedades sencillas implicando los resultados clásicos, la obra sistematizadora de muchos conceptos y resultados dispersos, de gran resonancia actual

L. SCHWARTZ: *Théorie des distributions* (Tome I, 1950; Tome II, 1951; Act. Sci. Ind. 1091 y 1122; Hermann, Paris).

Siguiendo las huellas de VOLTERRA, señala una síntesis de principios, métodos y problemas en el campo del análisis funcional la teoría de los funcionales analíticos de su discípulo L. FANTAPPIÉ, con interesantes aplicaciones a la integración de las ecuaciones en derivadas parciales. Un buen resumen de las memorias originales que desarrollan dicha teoría es:

L. FANTAPPIÉ: *Teoría de los funcionales analíticos y sus aplicaciones* (Cons. Sup. Inv. Cient. Sem. Mat. Barcelona, 1943).

CAPÍTULO XXVI

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

§ 100. SIGNIFICADO GEOMÉTRICO

1. **Conceptos fundamentales.** — *a*) El problema de la función primitiva de una función dada $f(x)$ consiste en hallar otra función $y = F(x)$ tal que

[100-1] $$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

o bien

[100-2] $$dy = f(x)dx.$$

La solución

[100-3] $$y = \int f(x)dx$$

contiene una constante aditiva arbitraria, y entonces está dada por infinitas funciones, y gráficamente por infinitas curvas.

Como en las ecuaciones [100-1] y [100-2] figuran ya sea la derivada, ya sea la diferencial de la función incógnita y, se las llama *ecuaciones diferenciales*. En general, una ecuación

[100-4] $$\varphi(x, y, y') = 0$$

que liga la variable x, la función incógnita y, y la derivada primera y', se llama ecuación diferencial *ordinaria de primer orden* para distinguirla de las que contienen las derivadas superiores y'', y''', etc., y de las que se refieren a funciones incógnitas de varias variables independientes (ver *d*). El *orden* de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden de la función incógnita.

Diremos que la ecuación [100-4] está en forma *implícita*; si es posible despejar y' se obtiene la forma *explícita* o *normal*:

[100-5] $$y' = f(x, y)\quad ,$$

de la que es caso particular [100-1].

b) *Resolver* una ecuación diferencial significa hallar todas las funciones explícitas $y = F(x)$ o implícitas $\Phi(x, y) = 0$, que la satisfacen, llamadas *soluciones*, o también *integrales*. Cuan-

do éstas se obtienen, como en [100-1], mediante primitivas, o también por el cálculo de integrales definidas, diremos que la ecuación se resuelve o integra *por cuadraturas*, pero éste no es siempre el caso, como veremos. Las gráficas de las soluciones se llaman *curvas integrales* de la ecuación diferencial.

EJEMPLOS: 1. El problema de hallar las curvas tales que en cada punto (x, y) la pendiente de la tangente sea igual a la abscisa x, conduce a la ecuación diferencial

[100-6] $$y' = x \quad \text{ó} \quad \mathrm{d}y = x\mathrm{d}x \quad ,$$

que tiene por solución

[100-7] $$y = \tfrac{1}{2}x^2 + \mathrm{C} \quad ,$$

siendo C una constante arbitraria. Las curvas integrales son infinitas parábolas de eje vertical; por cada punto del plano pasa una de estas curvas, y sólo una. ¿Cómo depende la solución de la escala (m ó cm, etc.) adoptada para las abscisas?

2. En la ecuación diferencial

[100-8] $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} \quad ,$$

donde el segundo miembro depende también de y, las variables x é y pueden separarse como antes por el signo $=$ así: $\mathrm{d}y/y = \mathrm{d}x/x$, y la integral se obtiene por cuadraturas $\int \mathrm{d}y/y = \int \mathrm{d}x/x$:

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln k = \ln k|x| \quad , \quad (\mathrm{C} = \ln k, \;\; k > 0) \quad ,$$

o bien $y = \pm kx$. Como también la recta $y = 0$ verifica la ecuación [100-8], tendremos:

[100-9] $$y = mx \quad , \quad (m > 0, \; = 0 \;\text{ó}\; < 0).$$

Las curvas integrales son todas las infinitas rectas no verticales que pasan por el origen de coordenadas. Por cada punto del plano fuera del eje y (es decir, para el cual no se anule el denominador del segundo miembro de [100-8]), pasa una, y sólo una de estas rectas.

NOTAS: 1. Obsérvese la forma $\mathrm{C} = \ln k$ dada a la constante de integración, para llegar a una expresión sencilla de la solución.

2. La solución $y = 0$ de [100-8] no aparece al integrar $\mathrm{d}y/y = \mathrm{d}x/x$, pues anula allí un denominador. Se había perdido al dividir por y.

3. Para los puntos $\mathrm{P}(0, y)$, $y \neq 0$, ambos miembros de [100-8] son infinitos (§§ 30-5; 15-1, *b*; 25-3), por lo que convendremos en que también el eje $y\,(x = 0)$ es una curva integral, correspondiente a "$m = \infty$" en [100-9]. Al mismo resultado se llega considerando y como variable independiente y x como función incógnita; la [100-8] se convierte entonces en

[100-8′] $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y}$$

con solución

[100-9′] $$x = ny$$

coincidente con la [100-9] para $n = 1/m$. Basta entonces tomar $n = 0$. Los valores así admitidos $k = 0$, "$k = +\infty$", corresponden a "$\mathrm{C} = -\infty$", "$\mathrm{C} = +\infty$" para la constante aditiva $\mathrm{C} = \ln k$. Ambas soluciones aparecen más naturalmente al poner la ecuación [100-8] en la forma $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$.

EJEMPLO 3. También la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad [100\text{-}10]$$

se puede resolver por separación de variables:

$$y\,dy = -x\,dx \quad \therefore \quad \tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}C \quad \therefore$$

$$x^2 + y^2 = C. \qquad [100\text{-}11]$$

Si se quiere permanecer en el campo real debe tomarse $C \geqslant 0$. Las curvas integrales son las infinitas circunferencias con centro en el origen; por cada punto del plano pasa una de ellas y sólo una.

NOTA 4. Los puntos de intersección de cada circunferencia [100-11] con el eje x, hacen infinitos ambos miembros de [100-10] (cfr. nota 3). Aquí las circunferencias se obtuvieron completas, al pasar a la forma $y\,dy = -x\,dx$ (cfr. nota 2).

En cada uno de los ejemplos anteriores la solución contiene una constante arbitraria y por eso consta de las infinitas curvas de un haz $\Phi(x, y, C) = 0$. Se la llama *solución general.*

Veremos (§ 104-4) que en condiciones muy generales verificadas por la función $f(x, y)$, en un recinto R del plano, por cada punto $P(x, y)$ de R pasa una curva integral de [100-5] y sólo una, y entonces fijado $x = x_0$, para cada y_0 tal que $(x_0, y_0) \varepsilon R$ habrá una curva integral $\Phi(x, y, C_0) = 0$. Cada solución $\Phi(x, y, C_0) = 0$ obtenida de la solución general $\Phi(x, y, C) = 0$ asignando un valor particular C_0 a la constante, se llama *solución particular*. En general la constante se determina por la condición de que la curva integral pase por un punto dado $P_0(x_0, y_0)$.

EJEMPLO 4. Si entre las curvas de pendiente igual a la abscisa se quiere hallar la que pasa por $P(2; 4)$, la constante C de [100-7] se determina reemplazando allí las coordenadas de P: $4 = \frac{1}{2}2^2 + C \therefore C = 2$, que reemplazada a su vez en [100-7] da la solución particular $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$.

En una ecuación $\varphi(x, y, y') = 0$ pueden existir soluciones llamadas *singulares*, que pueden estar o no comprendidas en la solución general.

Por cada punto de una curva integral singular pasa otra curva integral en el sentido que se verá en la Nota I de este capítulo, donde haremos un estudio sistemático de la cuestión. También daremos ejemplos en §§ 100-4 y 102-3, *c*.

Análogas consideraciones valen para una ecuación

$$\varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

de orden n, donde la solución general contiene n constantes arbitrarias (§ 105-1).

c) Es de gran interés teórico y práctico el estudio de los *sistemas de ecuaciones diferenciales*. Un sistema de dos ecua-

ciones de primer orden con dos funciones incógnitas $y = \mathrm{y}(x)$, $z = \mathrm{z}(x)$ es de la forma

$$[100\text{-}12] \quad \varphi_1(x, y, y', z, z') = 0 \quad ; \quad \varphi_2(x, y, y', z, z') = 0.$$

Una *solución* del sistema es un par de funciones $[\mathrm{y}(x),\ \mathrm{z}(x)]$, que satisfaga simultáneamente a las ecuaciones [100-12].

d) Las ecuaciones diferenciales y sistemas hasta ahora considerados se llaman *ordinarios* porque sus incógnitas son funciones *de una variable* y entonces sus derivadas son ordinarias. Si en una ecuación diferencial, la incógnita es una función de *varias variables*, las derivadas son parciales y la ecuación se llama *ecuación diferencial en derivadas parciales*. Por ejemplo:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = xz \quad ; \quad \text{función incógnita: } z = \mathrm{z}(x, y).$$

2. **Campo de direcciones de** $y' = \mathrm{f}(x, y)$. — Veamos cómo pueden estudiarse las curvas integrales de la ecuación [100-5] sin resolverla. Si $\mathrm{f}(x, y)$ es una función uniforme definida en todo el plano (x, y) o en un recinto R, parte de él, la ecuación

$$[100\text{-}5] \qquad y' = \mathrm{f}(x, y) \quad ,$$

asocia a cada punto $P_0(x_0, y_0) \varepsilon R$, una dirección de coeficiente angular $m_0 = \mathrm{f}(x_0, y_0)$, que llamaremos *dirección en* P_0. El conjunto de los puntos de R con la dirección en cada uno se llama *campo de direcciones en* R.

Toda curva integral de [100-5] que pase por P_0 tiene allí tangente con pendiente $\mathrm{f}(x_0, y_0)$ en virtud de la misma [100-5]. Entonces: *La ecuación de primer orden* [100-5], *con segundo miembro función uniforme definida en todo el plano o en un recinto* R *parte de él, representa allí un campo de direcciones. Toda curva integral tiene tangente en cada punto, en la dirección del campo en dicho punto.*

El conjunto formado por un punto P y su dirección en él se llama *elemento lineal* en P ó de sostén P; se lo puede representar por un pequeño segmento de punto medio P, con la dirección asignada en P. Se tendrá una imagen del campo de direcciones representando los elementos lineales en varios puntos convenientemente distribuídos. Para facilitar esta construcción conviene trazar previamente varias curvas $\mathrm{f}(x, y) = $ constante, llamadas *curvas isoclinas* de la ecuación diferencial, pues a todos los puntos de cada una corresponde la misma dirección.

EJEMPLO 1. Las figuras 344, 345 y 346 representan los campos de direcciones de las ecuaciones de los ejemplos 1, 2 y 3 de § 100-1, donde se han trazado algunas isoclinas y algunas curvas integrales.

En el primer caso las isoclinas $x = c$, son rectas paralelas al eje y, y las curvas integrales resultan de una de ellas por traslación en la dirección de dicho eje. En los otros dos casos las isoclinas son las mismas,

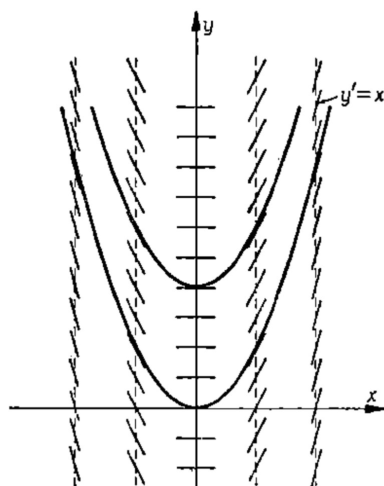


Fig. 344. — Campo de direcciones, isoclinas y curvas integrales de $y' = x$.

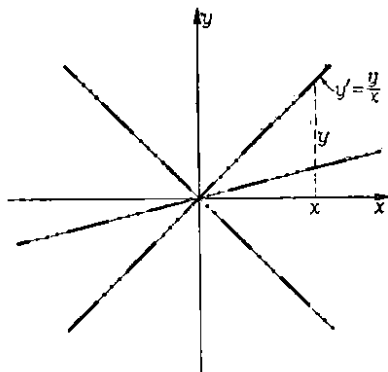


Fig. 345. — Campo de direcciones, isoclinas y curvas integrales de $y' = y/x$.

pero mientras en el segundo las curvas integrales coinciden con aquéllas, no ocurre otro tanto en el tercero; las direcciones m_1 y m_2 asociadas a un mismo punto en ambos campos son ortogonales, pues

$$m_2 = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{y/x} = -\frac{1}{m_1}.$$

NOTA. Así como la representación del campo de direcciones da una idea del comportamiento de las curvas integrales, también pueden estudiarse analíticamente propiedades de estas curvas sin resolver la ecuación. A veces, estudiando el campo de direcciones puede llegarse a construir la solución general de la ecuación.

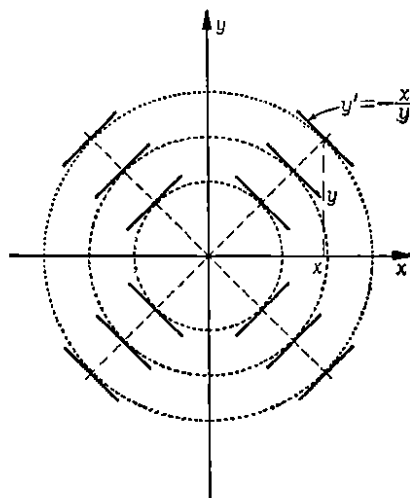


Fig. 346. — Campo de direcciones, isoclinas y curvas integrales de $y' = -x/y$.

EJEMPLOS: 2. De $y' = -x/y$ resulta

$$y'' = -\frac{y - xy'}{y^2} = \frac{y - x(-x/y)}{y^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^3},$$

y con y' é y'' pueden estudiarse máximos, mínimos, inflexiones, curvatura, etc. Por ejemplo, en

todo punto $P(0, y)$, $y \neq 0$, hay extremo de la curva integral por él, máximo si $y > 0$, mínimo si $y < 0$, pues $y' = 0$, $y'' = -1/y$. El radio de curvatura es $R = +\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. En la ecuación $y = y'x - (1/4)y'^2$ la isoclina correspondiente a $y' = m$ es $y = mx - (1/4)m^2$, y por ser una recta de pendiente m tiene la dirección del campo en cada punto y es entonces una curva integral. El haz de estas rectas (tangentes a la parábola $y = x^2$, ver § 100-4, ej. 4, § 102-3, *c*) da la solución general.

3. **Método de aproximación de Euler.** — Para construir la curva integral de [100-5] que pasa por $P_0(x_0, y_0)$ podemos desplazarnos a partir de P_0 en la dirección de la tangente a dicha curva, que es la dirección del campo en P_0, hasta un punto P_1 de coordenadas

$$x_1 = x_0 + \Delta x \quad ; \quad y_1 = y_0 + \Delta y = y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x \quad ;$$

luego a partir de P_1, en la dirección en P_1, hasta un punto P_2 de coordenadas:

$$x_2 = x_1 + \Delta x \quad ; \quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\Delta x \quad ;$$

etc. Se tiene así una quebrada que se aproxima a la curva integral.

Este método clásico de EULER * no es admisible sino como aproximación grosera, pues la quebrada se va separando más y más de la curva integral buscada. En el § 104 veremos métodos más precisos de resolución aproximada.

EJEMPLO. La determinación de la quebrada correspondiente a la curva integral de [100-10], $y' = -x/y$, a partir de $P_0(0; 1)$ hasta $x = 1$ siendo $\Delta x = 0,1$, se indica en la tabla siguiente, donde las dos últimas líneas se han agregado para comparar con la solución exacta y apreciar la señalada imprecisión del método:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1,00	1,00	0,99	0,97	0,94	0,90	0,84	0,77	0,68	0,56	0,40
y'	0	-0,1	—0,20	—0,31	—0,43	—0,56	—0.71	—0,91	—1,18	—1,60	—2,50
$\sqrt{1-x^2}$	1,00	1,00	0,98	0,95	0,92	0,87	0,80	0,71	0,60	0,43	0,00
error	—	--	0,01	0,02	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,13	0,40

4. **Ecuación diferencial de un haz de curvas. Envolventes.** — *a*) Como la solución general de la ecuación [100-5] está dada por un haz de curvas, cabe preguntar si recíprocamente, dado un haz

$$[100\text{-}13] \qquad \Phi(x, y, C) = 0 \quad ,$$

habrá una ecuación diferencial de primer orden que lo tenga

* También llamado *método de diferencias de* CAUCHY. Ver nota al pie de página de § 104-4, nota 2.

por solución general. La respuesta es afirmativa; en efecto, para la curva correspondiente a un valor dado de C se verifica [100-13] y también

[100-14] $$\frac{d\Phi(x,y,C)}{dx} = \frac{\partial\Phi(x,y,C)}{\partial x} + \frac{\partial\Phi(x,y,C)}{\partial y}\cdot y' = 0,$$

y por consiguiente la ecuación que resulta de eliminar C entre ambas:

[100-15] $$\varphi(x,y,y') = 0.$$

Pero como esta última no contiene C, se verifica para *todas* las curvas del haz [100-13] y es la ecuación diferencial buscada, llamada *ecuación diferencial del haz.* Expresa una propiedad geométrica de todas sus curvas: la relación entre las coordenadas de un punto y la pendiente de la tangente en él.

EJEMPLOS: 1. La ecuación diferencial del haz $y = mx$ resulta derivando: $y' = m$, y eliminando m: $y' = y/x$. Cfr. § 100-1, ejemplo 2. (Es esencial eliminar el parámetro; obsérvese que $y' = m$ no representa el haz dado, pues para cada m su solución general es $y = mx + C$).

2. En el haz $x^2 + y^2 = C$ resulta derivando: $x + yy' = 0$, que es ya la ecuación diferencial del haz (ver § 100-1, ej. 3), pues el parámetro C quedó automáticamente eliminado al derivar.

3. En el haz de circunferencias de radio 1 con centro en el eje x: $(x - C)^2 + y^2 = 1$, por cada punto del recinto plano R: $-1 < y < 1$ pasan *dos* curvas. Derivando resulta: $x - C = -yy'$, y eliminando C se obtiene la ecuación diferencial del haz:

[100-16] $$y^2(1 + y'^2) = 1 \quad ,$$

mediante la cual a cada punto de R se asocian *dos* direcciones de coeficientes angulares $y' = \pm\sqrt{1 - y^2}/y$.

La ecuación diferencial [100-16] indica la propiedad característica de las curvas del haz: el segmento normal $n = |y\sqrt{1 + y'^2}|$ (§ 31-3), es constantemente 1.

Las curvas (rectas) $y = \pm 1$ son curvas integrales de [100-16], soluciones (singulares, ver nota I), que no figuraban en el haz dado.

NOTAS: 1. El ejemplo anterior lleva a estudiar las ecuaciones

[100-17] $$y' = +\sqrt{1 - y^2}/y \quad ; \quad y' = -\sqrt{1 - y^2}/y.$$

Las soluciones generales son haces de circunferencias

[100-18] $$(x - C)^2 + y^2 = 1 \quad \text{con} \quad x \leqslant C, \quad (\text{respectivamente } x \geqslant C).$$

En ambas, $y = \pm 1$ son soluciones singulares (nota I).

2. También son soluciones de [100-17] las curvas formadas por semicircunferencias [100-18] y semirrectas $y = \pm 1$ con $x \geqslant C$ (respectivamente $x \leqslant C$).

3. Las curvas cerradas convexas formadas por dos semicircunferencias [100-18] y segmentos rectilíneos que unen sus extremos, no son curvas integrales para ninguna de las [100-17] pero sí de [100-16]. Sin embargo, en un entorno suficientemente pequeño de x_0, con $|y_0| < 1$, pasan sólo dos curvas integrales.

b) En el ejemplo 3 las soluciones singulares (nota I) $y = \pm 1$ son las envolventes (§ 74-1, *b*) del haz de curvas. En general:

Toda envolvente de un haz de curvas es una curva integral de la ecuación diferencial del haz. En efecto, dicha envolvente es en cada uno de sus puntos tangente a una curva del haz, y entonces los valores x, y, y' coinciden con los de esa curva, verificando en consecuencia la ecuación diferencial.

NOTAS: 4. En la nota I de este capítulo, veremos que toda envolvente es solución de las que llamaremos *singulares* de la ecuación diferencial del haz, y que ésta puede tener también soluciones singulares que no sean envolventes.

5. Es fácil construir ejemplos considerando el haz de las tangentes a una curva dada, que resulta así envolvente de aquéllas (cfr. § 102-3, *c*; nota 5).

EJEMPLO 4. Hallar la ecuación diferencial del haz de tangentes a la parábola $y = x^2$, y verificar que también la parábola es una curva integral.

La ecuación (finita) del haz es $y - C^2 = 2C(x - C)$; eliminando C entre ésta é $y' = 2C$ resulta (cfr. § 100-2, ej. 3):

$$y = xy' - y'^2/4 \quad , \qquad [100\text{-}19]$$

ecuación que se satisface para $y = x^2$ y es del tipo de CLAIRAUT, que veremos en § 102-3, *c*.

EJERCICIOS

1. Dada la ecuación diferencial $4y'^2 = 9x$: *a*) Verificar que $(y + C)^2 = x^3$ es solución y representar para $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$; *b*) Hallar dos curvas integrales que pasen por el punto (3; 1).

2. Resolver $y' = (1 + x)/(1 - y)$.

3. Resolver:

a) $x^3y^2\,dx - dy = 0$;

b) $y' = 2xy$;

c) $xy^2 + yy' = x$.

4. Probar que si las isoclinas son rectas paralelas, la ecuación diferencial se integra con una cuadratura.

5. Estudiar la solución general de $y' = y(1 - x)$ sin resolver la ecuación, probando que: *a*) El haz es simétrico respecto del eje x; *b*) Ninguna solución cambia de signo ni se anula, salvo la $y = 0$; *c*) Toda solución positiva (negativa) tiene un máximo (mínimo) en $x = 1$, concavidad hacia abajo (arriba) en $0 < x < 2$ y en sentido contrario en $x < 0$ y $x > 2$, y entonces puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = 2$; *d*) Para $x \to \infty$ es $y = o(1/x)$.

6. Mediante el método de las isoclinas, dibujar las curvas integrales de $y' = x^2 + y^2$ que pasan por los puntos (0; 0) y (1; 1), (cfr. § 104-3, ejemplos 1 y 2).

7. Hallar el haz de las curvas para las cuales la distancia al origen de un punto cualquiera es igual al segmento tangente (§ 31-3).

8. Dada la ecuación diferencial $y = xy' + (1/y')$: *a*) Verificar que $y = Cx + (1/C)$ es solución; *b*) Verificar que $y^2 = 4x$ es solución (solución singular, nota I), y que esta curva es envolvente del haz *a* (§ 102-3, *c*).

§ 101. TIPOS ELEMENTALES DE ECUACIONES EXPLÍCITAS

1. **Ecuaciones con variables separables.** — No siempre una ecuación de primer orden [100-5] se puede resolver por el *método de separación de las variables* que ya hemos empleado en los ejemplos 1, 2 y 3 de § 100-1.

Esta separación es imposible, por ejemplo en las ecuaciones

$$[101\text{-}1] \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(xy) \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + xy^2}{x^2y - y^3} .$$

Pero cuando el segundo miembro de [100-5] se puede expresar como producto de dos funciones, una de x y otra de y:

$$[101\text{-}2] \qquad \frac{dy}{dx} = g(x) \,.\, h(y) \quad ,$$

es posible separar las variables:

$$[101\text{-}3] \qquad \frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx \quad ,$$

y mediante cuadraturas

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx \quad ,$$

se obtiene la solución general en la forma: $\Phi(y) = \psi(x) + C$.

En [101-2] están incluídos los casos en que el segundo miembro no contenga ya sea x, ya sea y.

EJEMPLOS: 1. Curvas que tienen la subtangente constante k. Es decir (§ 31-3): $S_t = y/y' = k$, de donde: $dx = k \,.\, dy/y$, é integrando ambos miembros resulta:

$$x = k \,.\, \ln y + c \qquad \text{ó sea:} \qquad y = e^{(x-c)/k}$$

que es la ecuación de la familia de curvas buscadas (fig. 347).

Obsérvese que cada curva se deduce de otra, bien por *traslación* (incremento de x) o por *afinidad* (multiplicación de y).

2. Hallar las curvas que tienen la subnormal constante. Es decir (§ 31-3):

$$S_n = y \,.\, y' = k$$
$$y \,.\, dy = k \,.\, dx \quad \therefore \quad \tfrac{1}{2} y^2 = kx + c .$$

La integral general es, por consiguiente:

$$y^2 = 2kx + 2c \quad ;$$

luego las curvas que tienen la propiedad dada son las parábolas de eje x y parámetro k.

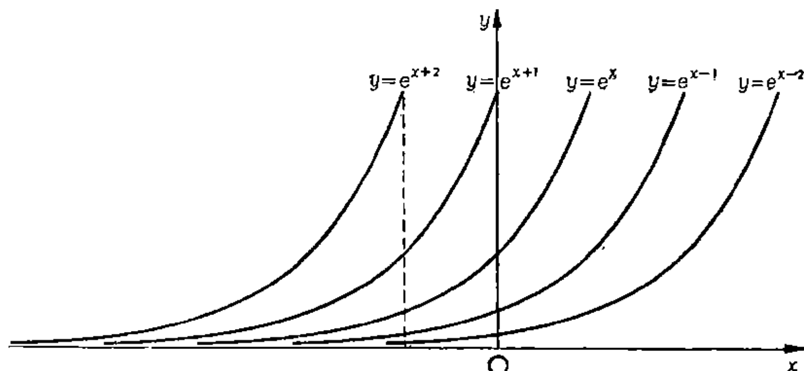


Fig. 347.

3. Hallar las curvas que forman un ángulo constante μ con el radio vector que une cada punto con el origen.

Si $\varrho = f(\omega)$ es la ecuación de la curva en coordenadas polares, se tiene (§ 34-7):

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \operatorname{cotg} \mu = \alpha \quad \therefore \quad \frac{d\varrho}{\varrho} = \alpha d\omega \quad ,$$

que da $\varrho = Ce^{\alpha\omega}$, espirales logarítmicas (cfr. § 34, ejercicio 7). Para $\alpha = 0$ resultan circunferencias de centro en el origen. También son soluciones *del problema* las rectas $\omega =$ const., que se pierden al escribir $\varrho = f(\omega)$.

NOTA. Si $h(y_0) = 0$, hay dificultades en [101-3], pero en la primera forma [101-2] de la ecuación, se ve que $y = y_0$ es una solución.

De la ecuación en forma simétrica $X_1(x)Y_1(y)dx + X_2(x)Y_2(y)dy = 0$, resulta separando variables: $(Y_2/Y_1)dy = -(X_1/X_2)dx$, pero a la solución obtenida por cuadraturas hay que agregar las eventuales curvas (conjuntos de rectas paralelas a los ejes) $Y_1(y) = 0$, $X_2(x) = 0$, que resultan de anular los factores suprimidos.

EJEMPLO 4. La ecuación $xyy' = kx$ tiene, además de las soluciones del ejemplo 2, la solución $x = 0$.

2. **Ecuaciones homogéneas en** x, y. — Hay otros tipos de ecuaciones de primer orden que se pueden transformar en ecuaciones con variables separables mediante un oportuno cambio de variables. Tal ocurre, como veremos con la segunda ecuación [101-1], por ser el segundo miembro una *función homogénea de grado cero en x é y* (§ 67-3), ó sea una *función del cociente* y/x:

$$\frac{x^3 + xy^2}{x^2y - y^3} = \frac{1 + (y/x)^2}{(y/x) - (y/x)^3} \quad ,$$

y con toda ecuación de la forma:

[101-4] $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Las variables se separan con la sustitución

[101-5] $$\frac{y}{x} = z \quad ,$$

de donde

$$y = xz \quad ; \quad dy/dx = 1 \,.\, z + x(dz/dx) = f(z) \quad ;$$
$$x(dz/dx) = f(z) - z \quad ; \quad dz/[f(z) - z] = dx/x \quad ,$$

y la ecuación se resuelve por cuadraturas.

La integral del primer miembro será una función de z que indicaremos $H(z)$. Resulta entonces, dando forma conveniente $(-\ln C)$ a la constante de integración:

[101-6] $$H(z) = \ln x - \ln C = \ln \frac{x}{C} \quad \therefore$$
$$x = Ce^{H(z)} = Ce^{H(y/x)} \quad ,$$

de donde a veces se podrá despejar y como función de x, o bien x como función de y.

Ejemplo 1. La ecuación homogénea $y' = (x^2 + y^2)/(2xy)$ se lleva mediante [101-5] a la forma $2z dz/(1 - z^2) = dx/x$, con lo que se llega a la solución general $x^2 - y^2 = 2Cx$, o bien

[101-7] $$(x - C)^2 - y^2 = C^2 \quad ,$$

que representa un haz de hipérbolas.

Notas: 1. Sólo es necesario recordar la sustitución [101-5] y no las fórmulas que siguen, pues en cada caso se repite el procedimiento indicado. Esa sustitución viene sugerida por la forma de la ecuación y también observando que ésta es invariante respecto de toda homotecia de centro en el origen:

$$x = kX \quad , \quad y = kY \quad , \quad (k = \text{const.}) \quad ,$$

que entonces transforma unas en otras las curvas integrales, dejando invariado el haz.

2. Si $f(z_0) - z_0 = 0$ es $z = z_0$ una integral, pues anula ambos miembros de $x dz/dx = f(z) - z$. Entonces si la ecuación $f(z) - z = 0$ tiene las raíces $z_0, z_1, z_2, \ldots$, se tienen las curvas integrales $y = z_0 x$, $y = z_1 x$, $y = z_2 x$, ..., que son rectas por el origen. Si una de estas rectas es tangente a una curva del haz [101-6] en un punto *distinto del origen y de infinito*, en virtud de la nota anterior resulta envolvente del haz y es solución singular (nota I). Éste no es siempre el caso como muestra el ejemplo 1, donde las soluciones $y = \pm x$ no son envolventes, sino curvas del haz [101-7] para $C = 0$.

3. También se puede transformar la ecuación [101-4] en otra de variables separables con sólo pasar a coordenadas polares, pues $x = \rho \cos \omega$, $y = \rho \operatorname{sen} \omega$, dan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\omega\, d\varrho + \varrho\cos\omega\, d\omega}{\cos\omega\, d\varrho - \varrho\operatorname{sen}\omega\, d\omega} = f(\operatorname{tg}\omega)$$

$$\therefore \quad \frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{1 + \operatorname{tg}\omega \,.\, f(\operatorname{tg}\omega)}{f(\operatorname{tg}\omega) - \operatorname{tg}\omega}\, d\omega .$$

En ocasiones, es muy apropiado este procedimiento, como indica el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2. La ecuación homogénea

$$y^2(x + yy')^2 - (x^2 + y^2)(xy' - y)^2 = 0$$

se transforma en coordenadas polares en

$$\varrho^4 (d\varrho/d\omega)^2 \operatorname{sen}^2\omega - \varrho^6 = 0 \quad \therefore \quad d\varrho/\varrho = \pm\, d\omega/\operatorname{sen}\omega \quad ,$$

y la solución general es:

$$\varrho = C(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega)^{\pm 1}.$$

Nota 4. En § 102-2, *b*, se estudiarán las ecuaciones homogéneas en x, y, pero no resueltas en y'.

3. **Ecuaciones reducibles a homogéneas.** — Entre las ecuaciones reducibles a homogéneas por cambios de variables están las del tipo

[101-8] $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) .$$

Distinguiremos tres casos, I, II, III, según que las rectas

[101-9] $$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad , \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

coincidan, se corten, o sean paralelas.

I. Si las rectas [101-9] coinciden, el segundo miembro de [101-8] se reduce a una constante y la ecuación es trivial.

II. Si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, es decir, las rectas [101-9] se cortan en un punto (x_0, y_0), la traslación

[101-10] $$X = x - x_0 \quad , \quad Y = y - y_0$$

reduce [101-8] a la ecuación homogénea

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) .$$

Ejemplo 1.

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y + 2}{x + y + 1}\right)^2 .$$

Las rectas se cortan en $P(1, -2)$. La traslación $X = x - 1$, $Y = y + 2$ conduce a la ecuación homogénea $dY/dX = 2Y^2/(X + Y)^2$. La ecuación en $Z = Y/X$ es

$$\frac{dX}{X} = \left(-\frac{1}{Z} - \frac{2}{1 + Z^2}\right) dZ \quad ,$$

y la solución de la ecuación dada es

$$\ln(y + 2) + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y + 2}{x - 1} = C.$$

III. Si las rectas [101-9] son paralelas, $a_1/a_2 = b_1/b_2 = \lambda$, y la ecuación [101-8] es

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{f}\left[\frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right] = \mathrm{g}(a_2x + b_2y).$$

Poniendo $a_2x + b_2y = z$ resulta la ecuación de variables separables: $[(\mathrm{d}z/\mathrm{d}x) - a_2]/b_2 = \mathrm{g}(z)$.

EJEMPLO 2.

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (x + 2y - 8)/(2x + 4y - 1).$$

Poniendo $z = x + 2y$ resulta $\frac{1}{2}[(\mathrm{d}z/\mathrm{d}x) - 1] = (z - 8)/(2z - 1)$, y separando variables se llega a la integral general

$$(4x + 8y - 17)^{15} = Ce^{4x-8y}.$$

4. **Ecuaciones lineales.** — Son las lineales en y é y', es decir del tipo

$$[101\text{-}11] \qquad y' + \mathrm{P}(x)y = \mathrm{Q}(x).$$

En general no se pueden separar las variables. En cambio es posible hacerlo en la *ecuación lineal incompleta* (u homogénea en y é y') que resulta de reemplazar $\mathrm{Q}(x)$ por 0 en [101-11]. Sea $u = \mathrm{u}(x)$ una solución particular de la ecuación incompleta:

$$[101\text{-}12] \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \mathrm{P}(x)u = 0 \quad ,$$

de donde:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \ln u = -\int \mathrm{P}(x)\mathrm{d}x \quad ;$$

$$u = e^{-\int \mathrm{P}(x)\mathrm{d}x}.$$

Pongamos ahora (*sustitución de* LAGRANGE):

$$[101\text{-}13] \qquad y = u \cdot v \quad ,$$

siendo u la solución ya hallada de la ecuación incompleta [101-12], y se trata de determinar la función v de modo que y sea solución de la ecuación completa [101-11]. Derivando y reemplazando en [101-11] resulta:

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \mathrm{P}(x)u\right] = \mathrm{Q}(x).$$

La expresión entre paréntesis se anula, pues u es solución de [101-12], y entonces queda para determinar v la ecuación:

$$u\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \mathrm{Q}(x) \quad ,$$

en la que pueden separarse las variables

$$\mathrm{d}v = \frac{Q(x)}{u}\mathrm{d}x = Q(x)e^{\int P\,.\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \quad ,$$

$$\therefore \quad v = \int Q(x)e^{\int P\,.\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C.$$

Reemplazando u y v en [101-13] se tiene la solución general.

EJEMPLOS: 1. $y' + ay = e^{bx}$. La ecuación incompleta $u' + au = 0$ tiene la solución particular $u = e^{-ax}$, y [101-13] da

$$e^{-ax}\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = e^{bx} \quad \therefore \quad v = (a+b)^{-1}e^{(a+b)x} + C$$
$$\therefore \quad y = (a+b)^{-1}e^{bx} + Ce^{-ax}.$$

2. $y' + y\varphi'(x) = \varphi(x)\varphi'(x)$. La ecuación incompleta tiene la solución particular

$$u = e^{-\varphi(x)} \ .$$

Resulta

$$y = \varphi(x) - 1 + Ce^{-\varphi(x)} \ .$$

3. En un circuito con resistencia R y auto-inducción L actúa una fuerza electromotriz $E = E_0 \operatorname{sen} \omega t$. Hallar la intensidad $I(t)$ de la corriente en función del tiempo.

Por la ley de OHM el producto IR es igual a la fuerza electromotriz total $E - L(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t)$, y se tiene la ecuación lineal:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}\,I = \frac{E_0}{L}\operatorname{sen}\omega t.$$

La ecuación incompleta $(\mathrm{d}u/\mathrm{d}t) + R(u/L) = 0$ (que corresponde a fuerza electromotriz exterior nula: abertura del circuito), tiene la solución particular $u = e^{-Rt/L}$. La sustitución $I = u\,.\,v$ da para $v(t)$ la ecuación $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (E_0/L)e^{Rt/L}\operatorname{sen}\omega t$. Por [51-9] se tiene:

$$v = \frac{E_0}{L}\left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2\right)^{-1} e^{Rt/L}\left(\frac{R}{L}\operatorname{sen}\omega t - \omega\cos\omega t\right) + C.$$

Poniendo

$$\begin{cases} R/L = \varrho\cos\gamma \\ \omega = \varrho\operatorname{sen}\gamma \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \varrho = \sqrt{(R/L)^2 + \omega^2} \\ \gamma = \operatorname{arc\,tg}\omega L/R \ , \end{cases}$$

se llega a

$$I(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}\operatorname{sen}(\omega t - \gamma) + Ce^{-Rt/L}.$$

La intensidad consta entonces de un sumando periódico y de otro que decrece rápidamente. La constante C se determina conociendo la intensidad I_0 en el instante inicial $t = 0$. Si $I_0 = 0$ resulta

$$C = E_0\omega L/(R^2 + \omega^2L^2).$$

NOTAS: 1. Haciendo el reemplazo indicado de u y v en [101-13] puede verse que la solución general de la ecuación lineal [101-11] se obtiene sumando a una solución particular de la ecuación dada la solución general de la incompleta. Demostraremos en el § 107-3 que esta propiedad vale también para ecuaciones lineales de orden superior, y es muy útil para su resolución.

2. La sustitución de LAGRANGE [101-13] equivale a reemplazar en la solución general $Cu(x)$ de la ecuación incompleta, la constante C por

una función $v(x)$ de modo que el producto satisfaga a la ecuación completa. En esto consiste el método de "variación de las constantes" de LAGRANGE, que desarrollaremos en § 107-4, *a*, para ecuaciones lineales de orden superior.

3. Si se conoce una solución particular y_1 de [101-11], la general se obtiene por una sola cuadratura, pues escribiendo que y_1 verifica [101-11] y restando de [101-11] resulta $(y - y_1)' + P(x)(y - y_1) = 0$, es decir, $y - y_1$ es solución de la ecuación incompleta (cfr. nota 1), o sea

$$y - y_1 = Ce^{-\int P dx} .$$

4. Si se conocen dos soluciones particulares y_1 é y_2 de la ecuación lineal, la integral general se obtiene sin ninguna cuadratura, pues por verificar y_2 la relación anterior para un cierto valor de C resulta por división para eliminar

$$e^{-\int P dx} ,$$

siendo α una constante arbitraria

[101-14] $$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \alpha.$$

5. **Ecuaciones reducibles a lineales.** — *a*) *Ecuación de* BERNOULLI. — Multiplicando por y^n el segundo miembro de la ecuación lineal [101-11] se obtiene la *ecuación de* BERNOULLI:

[101-15] $$y' + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Dividiéndola por y^n *resulta*:

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x) ,$$

y observando que si $z = y^{1-n}$, es $z' = (1 - n)y^{-n}y'$, vemos que [101-15] se reduce a la ecuación lineal en $z(x)$:

[101-16] $$z' + (1 - n)P(x)z = (1 - n)Q(x).$$

NOTA 1. El método fracasa si $n = 1$, pues $z = y^0 = 1$ y [101-16] se reduce a $z' = 0$, pero en tal caso [101-5] es lineal incompleta.

EJEMPLO 1. Curvas tales que la ordenada del punto de intersección de la tangente con el eje y sea proporcional al cuadrado de la ordenada.

Como la abscisa del pie de la tangente es $y - xy'$, resulta la ecuación:

$$y - xy' = ky^2 ,$$

que es del tipo $n = 2$ de BERNOULLI; se reduce a lineal sustituyendo:

$$y = z^{-1} \quad \therefore \quad y' = - z^{-2}.z'$$
$$z^{-1} + xz^{-2}.z' = kz^{-2} ,$$

y multiplicando por z^2/x resulta la ecuación lineal:

$$z' + x^{-1}z = kx^{-1} ,$$

cuya solución general es

$$z = x^{-1}(\int k\,.\,dx + C) = k + C/x \quad ;$$

luego las curvas que resuelven el problema son las hipérbolas

$$y(C + kx) = x$$

que tienen la asíntota fija $y = 1/k$ y la otra paralela al eje y, con centro en $(-C/k,\ 1/k)$.

b) *Ecuaciones de* RICCATI. — Ocurre inmediatamente hacer también la generalización de la ecuación lineal completa agregando un término y^n; pero tales ecuaciones ya no se pueden resolver por cuadraturas como ha demostrado LIOUVILLE, ni aun siquiera en el caso más sencillo $n = 2$. Tales ecuaciones:

$$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x) \tag{101-17}$$

se llaman de RICCATI, y se pueden resolver completamente cuando se conoce una integral particular y_1; pues sustituyendo $y = y_1 + z$, resulta la nueva ecuación:

$$y'_1 + z' = A \,.\, y_1^2 + B \,.\, y_1 + C + 2A \,.\, y_1 \,.\, z + Az^2 + Bz$$

que se simplifica por satisfacer y_1 a la ecuación [101-17], resultando:

$$z' = (2Ay_1 + B)z + Az^2$$

que no es lineal, pero por ser de BERNOULLI con $n = 2$, se hace lineal dividendo por z^2 y poniendo $Y = 1/z$; se obtiene:

$$Y' = -(2Ay_1 + B)Y - A. \tag{101-18}$$

Integrada ésta, se deduce la integral de [101-17] mediante la fórmula de transformación:

$$y = y_1 + (1/Y). \tag{101-19}$$

EJEMPLO 2. Una solución particular de la ecuación

$$y' = x^{-2} - x^{-1} . y - y^2$$

es $y = -x^{-1}$, y con la sustitución $y = -1/x + 1/Y$ resulta la ecuación lineal:

$$Y' + x^{-1}Y = 1 \quad ,$$

cuya solución general es

$$Y = (x^2 + c)/2x \quad ,$$

resultando como integral general de la ecuación dada el haz de cúbicas $y = 2x/(x^2 + c) - (1/x)$.

NOTA 2. *Si se conocen tres soluciones particulares* y_1, y_2, y_3 *de la ecuación de* RICCATI, *la solución general se obtiene sin ninguna cuadratura.* En efecto, en tal caso se conocen dos soluciones particulares $Y_1 = 1/(y_2 - y_1)$, $Y_2 = 1/(y_3 - y_1)$ de la ecuación lineal [101-18]. Luego (§ 101-4, nota 4), la solución general Y resulta de $(Y - Y_1)/(Y_2 - Y_1) = C$. La de la ecuación de RICCATI resulta de eliminar Y, Y_1, Y_2:

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = \text{Const.}; \tag{101-20}$$

es decir: *La razón anarmónica de cuatro soluciones de la ecuación de* RICCATI *es constante.*

EJEMPLO 3. La ecuación $y' = x^2y^2 + 2x^{-1}y + 6x^{-4}$, mediante la sustitución $y = -u'/(x^2u)$, se lleva a la $x^2u'' - 4xu' + 6u = 0$. Ensayando para ésta la solución $u = x^m$ obtendremos (ver § 108, ejerc. 4) la integral general $u = C_1x^3 + C_2x^2$, que da para la ecuación *dada* el haz *simplemente* infinito $y = -(3x + 2C)/(x^4 + Cx^3)$.

6. Ecuaciones diferenciales exactas. — La ecuación

[101-21] $$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

se llama diferencial exacta si su primer miembro es la diferencial total de una función $U(x, y)$. Para esto, supuestas P y Q continuas, uniformes y diferenciables en un recinto simplemente conexo, la condición necesaria y suficiente es que $P_y = Q_x$ (§ 89-1). En tal caso la ecuación se reduce a $dU(x, y) = 0$ y la solución general es $U(x, y) = C$, o bien (§ 89-1):

[101-22] $$\int_a^x P(x, y)\,dx + \int_b^y Q(a, y)\,dy = C.$$

Ejemplo. Sea la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2xy}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$dx\,(x^2 - 2xy) - dy\,(x^2 + y^2 + 1) = 0.$$

Se cumple la condición $P_y = Q_x$, luego es diferencia exacta, y la solución general es por [101-22] con $a = b = 0$:

$$\frac{x^3}{3} - x^2 y - \frac{y^3}{3} - y = C.$$

7. Factor integrante. — *a*) Toda ecuación de primer orden $y' = f(x, y)$ puede ponerse en la forma [101-21] donde uno al menos de los coeficientes P, Q, no sea idénticamente nulo, y supondremos que es Q. Se puede adoptar por ejemplo

$$P = f(x, y) \quad , \quad Q = -1 \quad ,$$

o bien, se puede multiplicar o dividir P y Q por cualquier constante o función de x, y, que no sea idéntica a cero. Precisamente en esta indeterminación, que permite multiplicar por un factor conveniente, se funda el método que se llama del *factor integrante* o *multiplicador de* Euler.

En general, la expresión dada $P dx + Q dy$ no es diferencial exacta, pero demostraremos que multiplicando por un factor conveniente $\mu(x, y)$ se puede conseguir transformarla en diferencial exacta. El cálculo de dicho factor integrante no es fácil en general; pero hay casos en que se obtiene inmediatamente.

Ejemplos: 1. Si $P(x, y) = X_1(x) \cdot Y_1(y)$, $Q(x, y) = X_2(x) \cdot Y_2(y)$, la separación de variables se logra multiplicando por $\mu(x, y) = 1/(Y_1 \cdot Y_2)$, que es un factor integrante, pues la ecuación obtenida $(X_1/X_2)\,dx + (Y_1/Y_2)\,dy = 0$ es diferencial exacta. [Obsérvese que a la solución de esta ecuación hay que agregar la curva $1/\mu(x, y) = 0$; ver § 101-1, nota].

2. Si $m \neq n$, no es diferencial exacta la ecuación

$$m \cdot y \cdot dx + n \cdot x \cdot dy = 0 \quad ,$$

pero el primer miembro se hace diferencial exacta del producto $x^m y^n$ multiplicando por el factor $x^{m-1}y^{n-1}$, pues resulta:

$$(mx^{m-1})y^n dx + x^m(ny^{n-1})dy = d(x^m y^n) = 0 \quad ,$$

y la solución general es: $x^m \cdot y^n = C$.

3. La ecuación $x dy - y dx = 0$ no es exacta, pero tiene los factores integrantes $\mu_1 = 1/x^2$, $\mu_2 = 1/y^2$, $\mu_3 = 1/(x^2 + y^2)$, $\mu_4 = 1/(x^2 - y^2)$, que transforman su primer miembro en las diferenciales de y/x, $-x/y$, $\operatorname{arc\,tg}(y/x)$, $\operatorname{arg\,th}(y/x)$. Todos conducen a la solución general $y/x = C$.

4. *Concepto de entropía.* Para un mol de gas ideal es

$$T = pv/R \quad \therefore \quad dT = p dv/R + v dp/R \quad ,$$

que expresa el aumento de temperatura al pasar el gas del estado (v, p) al $(v + dv, p + dp)$ en dos sumandos: los incrementos infinitésimos al aumentar v a presión constante, y al aumentar p a volumen constante. Indicando con c_p y c_v los calores específicos a presión constante y a volumen constante, el incremento de cantidad de calor será:

$$\Delta Q = (pc_p dv + vc_v dp)/R.$$

Esta expresión no es diferencial exacta, pues $c_p \neq c_v$, y entonces (§ 89-2) a la variación $Q_2 - Q_1$ de cantidad de calor al pasar el gas de un estado a otro, depende no sólo de éstos, sino también de los estados intermedios (por eso hay máquinas que realizan ciclos entregando un saldo para Q).

Interesa definir una magnitud, ligada al estado del gas y no a su historia, cuya variación dependa sólo de los estados inicial y final. Observando que

$$\Delta Q/T = (c_p dv/v) + (c_v dp/p) = d(c_p \ln v + c_v \ln p + C) \quad ,$$

vemos que al ser $1/T$ factor integrante de la expresión de ΔQ, la función $S = c_p \ln v + c_v \ln p + C = \ln(kv^{c_p} \cdot p^{c_v})$ cumple las condiciones antedichas en virtud de § 89-2. Se la llama *entropía* del gas y es una variable macroscópica de gran importancia en Termodinámica.

b) Para que $\mu(P dx + Q dy) = 0$ sea diferencial exacta, debe ser

[101-23] $$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \quad ,$$

es decir, $\mu(x, y)$ debe satisfacer a esta ecuación en derivadas parciales cuya resolución, como veremos (§ 110-4), se reduce a la de un sistema de ecuaciones ordinarias, una de las cuales es precisamente la propuesta. Pero sólo necesitamos una solución particular de [101-23] y además esta ecuación puede simplificarse cuando se conozca (o se ensaye como hipótesis) alguna condición sobre μ.

b$_1$) *Si existe un factor integrante que dependa de una sola variable, se lo puede determinar con una cuadratura.* Si $\mu = \mu(x)$, [101-23] da $\mu P_y = \mu' Q + \mu Q_x$, de donde resulta $\mu'(x)/\mu(x) = (P_y - Q_x)/Q$ y debiendo ser el segundo miembro una función de x solamente (por serlo el primero), se halla μ con una cuadratura.

b_2) De la demostración anterior resulta: *Existe un factor integrante de* [101-21], *dependiente de una sola variable*: $\mu(x)$, $[\mu(y)]$, *cuando y sólo cuando* $(P_y - Q_x)/Q$ *es función de* x *solamente*, $[(P_y - Q_x)/P$ *es función de* y *solamente*$]$.

EJEMPLOS: 5. Resolver

$$\operatorname{sen} x - x \cos x - 3x^2(y-x)^2 + 3x^2(y-x)^2 y' = 0 .$$

Es $P_y - Q_x = -6x(y-x)^2 = (-2/x)Q$; entonces por b_1 es $\mu'/\mu = -2/x$, con lo que $\mu = x^{-2}$ es un factor integrante, que conduce a la solución $(y-x)^3 - (\operatorname{sen} x)/x = C$.

6. Para que $y' = f(x, y)$, escrita en la forma $dy - f(x, y)dx = 0$, tenga un factor integrante función de x, es necesario y suficiente que $f(x, y)$ sea lineal en y (es decir, que la ecuación sea lineal).

En efecto, por b_2 debe ser $f_y(x, y)$ función de x solamente.

8. **Propiedades del factor integrante.** — *a*) La *existencia* de un factor integrante de [101-21] (que podría deducirse de [101-23] con la teoría de ecuaciones en derivadas parciales), resulta de la existencia de la solución general $\Phi(x, y, C) = 0$, pues resuelta ésta en la constante se escribe:

[101-24] $$U(x, y) = C.$$

De aquí resulta $y' = -U_x/U_y$, siendo por otra parte por la ecuación $y' = -P/Q$. Entonces $U_x/P = U_y/Q$ y el valor común de estas razones es un factor integrante. Luego: *Conociendo una solución general en la forma* [101-24] *se halla un factor integrante sin ninguna cuadratura.*

b) *Si* [101-24] *es solución de* [101 21], *lo es también* $\varphi[U(x, y)] = C$, *siendo* φ *una función arbitraria* (*derivable*).

En efecto, $\varphi(U) = C$ equivale a $d\varphi(U) = 0$, o sea a

$$\varphi'(U)(U_x dx + U_y dy) = 0.$$

c) *Si* [101-24] *y* $V(x, y) = C$ *son soluciones de* [101-21], *es* $V = \varphi(U)$.

En efecto, de $U_x/U_y = P/Q$ y $V_x/V_y = P/Q$ sigue $\partial(U, V)/\partial(x, y) = 0$ (§ 68-3).

d) Si $U = C$ es solución general de [101-21], como por *b* también lo es $\varphi(U) = C$, sigue de *a* que tanto U_x/P como $\varphi'(U) . U_x/P$ son factores integrantes. Luego: *Si* μ *es factor integrante, lo es también toda función* $\mu . \psi(U)$, *siendo* $U = C$ *solución general.*

e) Recíprocamente, *todo factor integrante* ν *es de la forma* $\mu\psi(U)$. De

$$\mu(Pdx + Qdy) = dU \quad ; \quad \nu(Pdx + Qdy) = dV \quad ,$$

como por *c* es $V = \varphi(U)$, resulta de *a*:

$$\mu = U_x : P \quad , \quad \nu = V_x : P = \varphi'(U) . U_x : P = \varphi'(U)\mu .$$

f) Como $\varphi'(U) = \nu/\mu = C$ es solución por *b*, resulta llamando independientes a dos factores integrantes cuyo cociente no se reduzca a una constante: *Si se conocen dos factores integrantes independientes* μ *y* ν, *la solución general es* $\mu/\nu = C$, *así obtenida sin cuadraturas.*

g) *Formación de combinaciones integrables.* Con la práctica puede

adquirirse cierta destreza en hallar factores μ tales que $\mu(\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy)$ se descomponga en una suma

[101-25] $$(\mathrm{P}_1dx + \mathrm{Q}_1dy) + (\mathrm{P}_2dx + \mathrm{Q}_2dy) \quad ,$$

donde cada paréntesis resulte una diferencial total.

EJEMPLOS: 1. $(4x^2 + y)dx - xdy = 0$, multiplicada por $\mu = x^{-2}$, puede escribirse $4dx + (ydx - xdy)/x^2 = 0$, y la solución general es $4x - (y/x) = \mathrm{C}$.

2. $(x + \sqrt{x^2 + y^2})dx + ydy = 0$, escrito así

$$(xdx + ydy)(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + dx = 0 \quad ,$$

da de inmediato $\sqrt{x^2 + y^2} + x = \mathrm{C}$.

De aplicación menos fácil es este procedimiento: Si una expresión diferencial se descompone en la forma [101-25] y se conoce un factor integrante para cada paréntesis, se puede hallar uno para toda la expresión mediante la propiedad *d*.

3. $(x + 3y^3x^{-1})dx + (4y^2 + x^2y^{-1})dy = 0$ se descompone así:

$$(xdx + x^2y^{-1}dy) + (3y^3x^{-1}dx + 4y^2dy) = 0 \quad ,$$

y en cada paréntesis se reconoce (casi a simple vista) un factor integrante $\mu = x^{-2}$, $\nu = y^{-3}$, que los transforma respectivamente en las diferenciales totales de

$$\ln(xy) \quad , \quad \ln(x^3y^4).$$

Toda expresión de la forma $x^{-2}\varphi(xy)$ y a la vez de la forma $y^{-3}\psi(x^3y^4)$ será por *d* factor integrante de *ambos* paréntesis, y por tanto de la expresión dada. Poniendo

$$x^{-2}(xy)^r = y^{-3}(x^3y^4)^s$$

se determinan $r = 17$, $s = 5$, llegándose así al factor integrante $x^{15}y^{17}$, que da fácilmente la integral general de la ecuación dada:

$$(x^{17}y^{17}/17) + (x^{15}y^{20}/5) = \mathrm{C}.$$

EJERCICIOS

1. Integrar:

a) $y\sqrt{1 - x^2}\,dx - x\,dy = 0;$

b) $y\,dx - \sqrt{1 - y^2}\,dy = 0;$

c) $du/dv = (1 + u^2)/(1 + v^2).$

2. Integrar:

1º) $(a^2 + y^2)dx - 2x\sqrt{ax - a^2}\,dy = 0;$

2º) $(1 + y^2)dx - (y + \sqrt{1 + y^2})(1 + x^2)^{3/2}\,dy = 0.$

3. Curvas para las cuales la subnormal es: *a*) Constante; *b*) Igual a la abscisa.

4. Resolver:

a) $2x^2\,dy = (x^2 + y^2)\,dx;$

b) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx;$

c) $2xy + y'y^2 = y'x^2.$

5. Resolver:

1º) $(x^3 + 3xy^2)\,dx + (y^3 + 3x^2y)\,dy = 0$;

2º) $x\,dx + y\,dy = 2my\,dx$,

en los casos $|m| > 1$, $|m| = 1$, $|m| < 1$.

6. Resolver las ecuaciones reducibles a homogéneas:

a) $y' = (6x - y - 5)/(4x - y - 3)$;

b) $(2y + x + 1)\,dx - (2x + 4y + 3)\,dy = 0$.

7. Integrar: $y' = \cos(x + y)$.

8. Integrar las ecuaciones lineales:

1º) $y' - 2y(x+1)^{-1} = e^x(x+1)^3$;

2º) $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arc\,tg} x$;

3º) $y' + xy(1 - x^2)^{-1} = a$ en los casos $|x| < 1$, $|x| > 1$.

9. Construir una ecuación lineal que tenga por curvas integrales $y = x$, $y = x^2$.

10. Probar que la ecuación diferencial de un haz $y = f(x) + C\,g(x)$ que depende linealmente de la constante, es lineal.

11. En una ecuación lineal: *a*) Dos rectas $x = x_1$, $x = x_2$ cortan a las curvas integrales en pares de puntos que determinan rectas concurrentes; *b*) Las tangentes en puntos de igual abscisa concurren en un punto.

12. Resolver: *a*) $L.dI/dt + RI = E$ siendo $I = 0$ para $t = 0$ (cierre de circuito con fuerza electromotriz constante); *b*) $L.dI/dt + RI = 0$ con $I = E/R$ para $t = 0$ (abertura de circuito con fuerza electromotriz constante).

13. Resolver las ecuaciones de BERNOULLI:

a) $2xyy' + (1 + x)y^2 = e^x$;

b) $y'x^4 - yx^3 = y^3$;

c) $(1 - x^2)y' - xy = axy^2$;

d) $y' + xy(1 - x^2)^{-1} = x\sqrt{y}$.

14. Probar que la ecuación

$$f(y/x)\,dx + g(y/x)\,dy + kx^a(x\,dy - y\,dx) = 0$$

(a real cualquiera) se reduce a una de BERNOULLI poniendo $y/x = z$.

15. Resolver la ecuación de RICCATI: $y' - xy^2 + 2x^2y - x^3 - 1 = 0$.

16. La solución general de una ecuación de RICCATI es función homográfica (cociente de funciones lineales) de la constante de integración: $y = [f(x) + Cg(x)]/[h(x) + Ck(x)]$.

17. Verificar que son diferenciales exactas y resolver:

a) $(2x - y)\,dx + (3y^2 - x)\,dy = 0$;

b) $(e^y + 1)\cos x\,dx + e^y \operatorname{sen} x\,dy = 0$;

c) $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\dfrac{dy}{y} = 0$.

18. Resolver verificando que admiten factores integrantes de una sola variable:

a) $(y - \operatorname{tg} y \cos^2 x)\, dx + \left(\operatorname{sen} x \cos x - x \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 y} \right) dy = 0;$

b) $(2xy + 1)\, y\, dx + (y - x)\, dy = 0.$

19. Resolver mediante un factor integrante la ecuación lineal [101-11] o sea $dy + [P(x)\, y - Q(x)]\, dx = 0$ (ver § 101-7, ej. 6).

20. Resolver:

1º) $(x^2 - 4xy - 2y^2)\, dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\, dy = 0;$

2º) $(2x^2 - xy + y^2)\, dx - (x^2 - xy + 2y^2)\, dy = 0,$ con el factor integrante $x - y$.

21. Usando la relación de Euler para funciones homogéneas (§ 67-3) probar que: *a*) Si [101-21] es una ecuación homogénea, admite el factor integrante $\mu = 1/(xP + yQ)$ siempre que este denominador no se anule idénticamente; *b*) Recíprocamente, si μ es factor integrante, [101-21] es homogénea.

22. Aplicando el ejercicio anterior, resolver:

$$(x^2 + y^2 - xy)\, dx + x^2\, dy = 0.$$

23. Condición sobre P y Q para que [101-21] admita un factor integrante función de: *a*) y/x; *b*) $x^2 + y^2$; *c*) $ax + by$.

24. Resolver $(2y + 5x^2y^4)\, dx + (4x^3y^3 - 3x)\, dy = 0$ mediante factores integrantes de $2y\, dx - 3x\, dy$ y de $x^2y^3(5y\, dx + 4x\, dy)$.

25. Curvas cuyas normales son bisecadas por la parábola $\eta^2 = a\xi$.

26. Curvas tales que es constante ($= a$) la proyección sobre el radio vector, de la normal terminada en el eje x.

§ 102. Ecuaciones no resueltas en y'

1. **Definición de la integral general.** — Para resolver la ecuación de primer orden implícita o no resuelta en y':

[102-1] $$\varphi(x, y, y') = 0$$

cabe pensar en llevarla a la forma explícita despejando y'. En un entorno de un punto dado (x_0, y_0) tendremos en general varias determinaciones

[102-2] $$y' = f_1(x, y) \quad , \quad y' = f_2(x, y) \quad , \quad \ldots,$$

a cada una de las cuales corresponderá una solución general de la forma

[102-3] $$\Phi_1(x, y, C) = 0 \quad , \quad \Phi_2(x, y, C) = 0 \quad , \quad \ldots$$

Las curvas de estos haces forman un nuevo haz que llamaremos *integral general* o *solución general* de [102-1]. Por cada punto pasa ahora en general un número finito o infinito de curvas integrales. Si el número de haces [102-3] es finito, la solución general de [102-1] es:

[102-4] $$\Phi_1(x, y, C) \,.\, \Phi_2(x, y, C) \,.\, \ldots = 0.$$

Ejemplos: 1. $y'^2 = 1 + y^2 \quad \therefore \quad \pm\, dy/\sqrt{1+y^2} = dx$. Las ecuaciones [102-3] son las dos siguientes:

[102-5] $$(y \pm \sqrt{1+y^2})/e^x = C \quad ,$$
se llega a $1 + y^2 = (Ce^x - y)^2$, habiendo desaparecido el doble signo al elevar al cuadrado, pero esto equivale a formar la única ecuación [102-4].

2. $y'^2 - yy'(x+y) + y^3 x = 0$. Esta ecuación de segundo grado en y' tiene las raíces

$$y' = xy \quad , \quad y' = y^2 \quad ,$$

y entonces la solución general de la ecuación diferencial es:

$$(y - Ce^{\frac{1}{2}x^2}) \cdot \left(y - \frac{1}{C - x} \right) = 0 .$$

Véase nota I, 2, ejemplo 5.

2. Ecuaciones integrables por separación de variables. — *a*) Si en la ecuación falta una variable:

[102-6] $$\varphi(x, y') = 0 \quad \text{ó} \quad \psi(y, y') = 0$$

y se puede despejar y', se separan las variables. En ocasiones es más sencillo despejar x ó y. Se tiene entonces, poniendo $y' = p$, la solución general expresada en uno y otro tipo en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y - C = \int p\,dx = \int p f'(p)\,dp \end{cases} \qquad \begin{cases} y = g(p) \\ x - C = \int \frac{dy}{p} = \int \frac{g'(p)\,dp}{p} . \end{cases}$$

En cada caso, eliminando p se tiene la solución en la forma acostumbrada.

Ejemplos: 1. $x\sqrt{1+y'^2} - y' = 0$, se puede resolver en y':

$$dy/dx = x/\sqrt{1-x^2} \quad \therefore \quad y = C - \sqrt{1-x^2} \quad ,$$

o bien: $x^2 + (y - C)^2 = 1$; circunferencias de radio 1 con centros en el eje y. Para las soluciones singulares véase nota I, 2, ejemplo 6.

2. $x = y'^3 + 1$. La solución general en forma paramétrica es:

$$x = p^3 + 1 \quad , \quad y = \int p\,dx = 3\int p^3 dp = \tfrac{3}{4}p^4 + C \quad ,$$

y eliminando p: $(x-1)^4 = [4(y-C)/3]^3$.

b) Si la ecuación es homogénea en x, y (§ 101-2), pero no de primer grado en y', puede expresarse en la forma

[102-7] $$\psi\left(\frac{y}{x} , \frac{dy}{dx}\right) = 0 .$$

Si puede resolverse respecto de y' estaremos en el caso ya estudiado en § 101-2. Si puede resolverse respecto de y/x, poniendo $y' = p$, de [102-7] obtendremos

[102-8] $$y = x\,f(p) \quad ,$$

y derivando respecto de x queda

$$p = \mathrm{f}(p) + x\mathrm{f}'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad ,$$

donde las variables pueden separarse. Así se obtiene

$$\ln x = \mathrm{C} + \int \frac{\mathrm{f}'(p)\,\mathrm{d}p}{p - \mathrm{f}(p)}$$

que junto con [102-8] representa la integral general en forma paramétrica, y de la que podría pasarse a la forma acostumbrada por eliminación de p.

A veces es más fácil en [102-7] expresar y/x y $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ mediante una variable auxiliar u. En lugar de [102-7] tendremos

[102-9] $$\frac{y}{x} = \mathrm{f}(u) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{g}(u).$$

De la primera de éstas deducimos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{f}(u) + x\mathrm{f}'(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

que restada de la segunda da

$$\mathrm{g}(u) - \mathrm{f}(u) = x\mathrm{f}'(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

de variables separables, cuya integral

$$\ln x = \mathrm{C} + \int \frac{\mathrm{f}'(u)\,\mathrm{d}u}{\mathrm{g}(u) - \mathrm{f}(u)}$$

junto con la primera de [102-9] da la integral general de [102-7] en forma paramétrica.

Este último método puede aplicarse también a las ecuaciones [102-6]. (Ver ejercicio 4).

Ejemplo 3. Integrar $(y/x)^{2/3} + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^{2/3} = a^{2/3}$. Se pone $y/x = a\cos^3 u$, $y' = a\,\mathrm{sen}^3 u$, dando

$$\ln x = \mathrm{C} + \int \frac{3\cos^2 u \,\mathrm{sen}\, u\, \mathrm{d}u}{\mathrm{sen}^3 u - \cos^3 u} = \mathrm{C} + \int \frac{3t\mathrm{d}t}{(t^3 - 1)(t^2 + 1)}$$

con $t = \mathrm{tg}\, u$. La integral general es

$$\begin{cases} \ln x = \ln[(t^3 - 1)^2 (t^2 + 1)^{-3}]^{1/4} + \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}} - \dfrac{3}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\, t + \mathrm{C}; \\ \ln y = \ln[a^4 (t^3 - 1)^2 (t^2 + 1)^{-6}]^{1/4} + \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}} - \dfrac{3}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\, t + \mathrm{C}. \end{cases}$$

3. Ecuaciones resueltas en y, integrables por derivación. — *a*) Consideremos la ecuación

[102-10] $$y = \mathrm{f}(x, y')$$

o bien poniendo $y' = p$:

[102-11] $$y = \mathrm{f}(x, p).$$

Derivando se obtiene una ecuación de primer orden en p

$$p = \mathrm{f}_x + \mathrm{f}_p p'$$

donde puede despejarse la derivada p'. Resolviéndola se obtiene una expresión

[102-12] $$p = \mathrm{g}(x, \mathrm{C})$$

que reemplazada en [102-11] da la solución general de [102-10].

Los tipos que siguen (*b* y *c*) ilustran sobre la aplicación de este método. Análogamente se integran las ecuaciones resueltas en x.

NOTAS: 1. El método seguido equivale a considerar [102-11] como solución de [102-10], pero a condición de reemplazar p por una función de x tal que derivando [102-11] respecto a x resulta justamente p. Esta función es [102-12].

2. Los tipos de ecuaciones estudiados en § 102-2, *b*, son caso particular de éstas.

b) Cuando el segundo miembro de [102-10] es lineal en x se tiene la *ecuación de* LAGRANGE:

[102-13] $$y = x\alpha(y') + \beta(y').$$

Poniendo $y' = p$ y derivando resulta la ecuación

[102-14] $$p = \alpha(p) + [x\alpha'(p) + \beta'(p)] \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

que considerada en x como función de p es lineal:

[102-15] $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - \frac{\alpha'(p)}{p - \alpha(p)} x = \frac{\beta'(p)}{p - \alpha(p)}.$$

Como la sabemos integrar, se completa el método indicado en *a*).

EJEMPLO 1. Sea $y = x \cdot y'^2 + y'^3$. La ecuación lineal que determina x, es:

$$(p^2 - p) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + 2p \cdot x + 3p^2 = 0 \quad ,$$

o sea:

$$(p - 1) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + 2x + 3p = 0 \quad ,$$

cuya solución general es:

$$x = \left(c + \frac{3}{2} p^2 - p^3 \right) : (p-1)^2 \quad ,$$

y las ecuaciones paramétricas de cada integral son:

$$x = \tfrac{1}{2}(c + 3p^2 - 2p^3) \; : \; (p-1)^2 \quad ,$$
$$y = p^3 + (c + 3p^2 - 2p^3)p^2 \; : \; 2(p-1)^2 .$$

NOTA 3. Las raíces $p_1, p_2, \ldots,$ de $p - \alpha(p) = 0$ crean dificultades en [102-15], pero $p = p_1$, $p = p_2$, ..., satisfacen [102-14], donde anulan también $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$. Reemplazando estos valores de p en lugar de y' en [102-13] se obtienen las soluciones singulares (nota I) que representan rectas. La solución singular obtenida como envolvente del haz (§ 100-4, nota 4) se estudiará en la nota I-4, *c*, ejemplo 8.

c) *Ecuaciones de* CLAIRAUT. — La ecuación de todas las rectas del plano (excepto las paralelas al eje y) es:

$$y = cx + a \quad ;$$

pero si los coeficientes no son los dos arbitrarios, sino que están ligados por una relación $a = \beta(c)$, tenemos una familia simplemente infinita: $y = cx + \beta(c)$, pues contiene una sola constante.

La ecuación diferencial de este haz se obtiene así: derivando resulta $y' = c$, y eliminando c resulta

[102-16] $$y = y' . x + \beta(y') .$$

Las ecuaciones diferenciales de este tipo se llaman: *ecuaciones de* CLAIRAUT. Se obtienen de [102-13] para $\alpha(y') = y'$ en cuyo caso no puede aplicarse [102-15].

Recíprocamente: toda ecuación de este tipo tiene por solución general las rectas $y = cx + \beta(c)$ puesto que éstas la satisfacen, como acabamos de ver.

También es solución de [102-16] la envolvente de este haz de rectas (§ 100-4, *b*). Esta integral singular (nota I) resulta de eliminar C entre la ecuación del haz y su derivada respecto a C (§ 74-1, *b*). Ver también § 100-4, notas 4 y 5, ejemplo 4, y § 100, ejercicio 8.

NOTAS: 4. También puede aplicarse a la ecuación de CLAIRAUT [102-16] el método de derivación. Haciendo $y' = p$ en [102-16]:

[102-17] $$y = px + \beta(p) \quad ,$$

y derivando resulta

$$p = p + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} [x + \beta'(p)] \quad ,$$

y entonces es, o bien $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = 0$, o bien $x + \beta'(p) = 0$.

En el primer caso resulta $p = \mathrm{C}$ y reemplazando en [102-17] resulta el haz de rectas solución general.

En el segundo caso, la eliminación de p entre $x + \beta'(p) = 0$ y [102-17] conduce a la envolvente, pues las ecuaciones son las mismas que para hallar ésta.

5. Recíprocamente, la ecuación diferencial del haz de tangentes a una curva es una ecuación de CLAIRAUT, que tiene por solución singular la curva dada.

En efecto, si $y = px + h$ es tangente a la curva $\eta = f(\xi)$, debe cumplirse $f(\xi) = p\xi + h$, $p = f'(\xi)$, y eliminando ξ entre estas dos ecuaciones se obtiene una condición $h = \beta(p)$, por la que la ecuación del haz de tangentes a la curva dada tendrá la forma [102-17].

EJEMPLO 2. Ecuación diferencial de las rectas que son cortadas por los ejes x, y en segmentos de longitud constante k:

$$y = cx + h \quad ; \quad h^2 + (h^2/c^2) = k^2 \quad \therefore \quad h = \pm\, ck/\sqrt{1+c^2}.$$

La ecuación diferencial es por tanto:

$$y = y'x + ky'/\sqrt{y'^2+1}.$$

Como envolvente del haz resulta:

$$x = -\, k(1+p^2)^{-3/2} \quad ; \quad y = kp^3(1+p^2)^{-3/2} \quad ,$$

y eliminando p se obtiene $x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3}$, ecuación de la astroide (§ 23-9, nota). La misma solución se obtiene si se buscan las curvas cuyo segmento de tangente entre los ejes es constante.

NOTA 6. Es fácil construir los campos de direcciones de las ecuaciones de LAGRANGE o de CLAIRAUT. Haciendo $y' = m$ se obtienen las isoclinas correspondientes a la dirección de pendiente m:

$$y = \alpha(m)x + \beta(m) \quad , \quad y = mx + \beta(m).$$

En ambos casos son rectas, pero mientras en la ecuación de CLAIRAUT tienen la dirección del campo (y en consecuencia son a la vez líneas integrales, en concordancia con la solución hallada, cfr. § 100-2, ej. 3), no ocurre lo mismo en la ecuación de LAGRANGE sino para los valores de m tales que $\alpha(m) = m$, para los cuales la isoclina es a la vez integral (cfr. nota 3).

EJERCICIOS

1. Solución general de $x^2y'^2 - 6xyy' + 8y^2 = 0$.

2. Curvas para las cuales la subtangente es media proporcional entre las dos coordenadas.

3. Probar que las curvas para las cuales el área bajo un arco es proporcional a la longitud del mismo, son las catenarias iguales

$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x - C}{a} \quad ,$$

y la recta $y = a$, envolvente de aquéllas.

4. Integrar $\varphi(x, y') = 0$ cuando se saben expresar x é y' mediante una variable auxiliar u (cfr. § 102-2, b).

5. Resolver las ecuaciones de LAGRANGE:

$a)$ $y = x(1 + y') + y'^2$;
$b)$ $y = 2xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

6. Resolver las ecuaciones de CLAIRAUT:

$a)$ $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$;
$b)$ $y = xy' + (y' - y'^2)$;
$c)$ $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$.

7. $a)$ Integrar $e^{y'} = 2y'^2 + 5$; $b)$ Generalizar para $f(y') = 0$.

§ 103. APLICACIONES GEOMÉTRICAS

1. Trayectorias ortogonales. Evolventes. — *a*) Volvamos a las ecuaciones consideradas en los ejemplos 2 y 3 de § 100-1 y sus soluciones generales:

Ec. difer. (Ec. dif. del haz)	*Soluc. general* (Ecuac. del haz)
[103-1] $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$	[103-2] $y = mx$ (fig. 345)
[103-3] $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$	[103-4] $x^2 + y^2 = C$ (fig. 346)

Como ya observamos en § 100-2, ejemplo 1, los haces [103-2] y [103-4] tienen la propiedad de que cada curva de uno corta perpendicularmente a todas las curvas del otro. En casos como éste diremos que cada uno de los haces es el *haz de las trayectorias ortogonales del otro.*

En muchas aplicaciones interesan las trayectorias ortogonales de un haz. Si uno de los haces es por ejemplo el de las líneas de fuerza de un campo, el otro será el de las líneas equipotenciales (§ 103-3, *a*).

La ortogonalidad de los haces [103-2] y [103-4] *se advierte en sus ecuaciones diferenciales* [103-1] *y* [103-3] que nos indican que en un mismo punto $P(x, y)$ las tangentes respectivas tienen pendientes recíprocas y de signo contrario.

En general, si la ecuación diferencial de un haz de curvas (obtenida derivando y eliminando luego el parámetro, § 100-4) es:

$$[103\text{-}5] \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad , \quad \text{o bien} \quad \varphi(x, y, y') = 0 \quad ,$$

la del haz de trayectorias ortogonales será:

$$[103\text{-}6] \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{f(x, y)} \quad , \\ \text{o respectivamente} \quad \varphi\left(x, y, -\dfrac{1}{y'}\right) = 0 . \end{cases}$$

Observemos que para pasar de la ecuación [103-2] de un haz, a la ecuación [103-4] del haz ortogonal debemos seguir el camino [103-2] → [103-1] → [103-3] → [103-4] a través de las ecuaciones diferenciales de los haces.

EJEMPLOS: 1. Hallar las trayectorias ortogonales del haz de las rectas que pasan por $P(3, 1)$. Tendremos sucesivamente:

α) Ecuación del haz: $y - 1 = C(x - 3)$;

β) Ecuación diferencial del haz; derivando: $y' = C$ y eliminando el parámetro: $y - 1 = y'(x - 3)$;

γ) Ecuación diferencial del haz ortogonal:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-3}{y-1};$$

δ) Haz ortogonal: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = C$, circunferencias de centro $P(3, 1)$.

2. *Cónicas homofocales.* Recordemos de la Geometría analítica que al variar el parámetro λ las cónicas

[103-7] $$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1$$

tienen todas los mismos focos (lo que es inmediato verificar) y que forman una red de elipses e hipérbolas mutuamente ortogonales, tal que por cada punto del plano pasan dos cónicas y entonces los valores correspondientes de λ pueden tomarse, con oportunas convenciones, como coordenadas del punto. Se obtiene así un sistema de coordenadas de gran importancia en muchas aplicaciones.

Para demostrar la propiedad de ortogonalidad de este haz formemos su ecuación diferencial; derivando resulta

$$\frac{2x}{a^2 - \lambda} + \frac{2yy'}{b^2 - \lambda} = 0 \quad \therefore \quad \frac{x}{a^2 - \lambda} = \frac{-yy'}{b^2 - \lambda} = \frac{x + yy'}{a^2 - b^2}.$$

De aquí, indicando con f el último miembro, donde no figura λ:

$$x^2/(a^2 - \lambda) = x \,.\, f \quad ; \quad y^2/(b^2 - \lambda) = (-y/y') \,.\, f \quad ,$$

y reemplazando en [103-7] se obtiene la ecuación diferencial del haz:

[103-8] $$\left(x - \frac{y}{y'}\right)(x + yy') = a^2 - b^2.$$

Si en ella sustituímos y' por $-1/y'$ para obtener la ecuación diferencial del haz ortogonal, resulta *la misma ecuación* [103-8], y entonces el haz ortogonal es el mismo [103-7].

b) Vimos en § 74-2, que la evoluta Γ de una curva plana C puede también definirse como envolvente de las normales de aquélla (cfr. § 55-8). En consecuencia la curva C corta ortogonalmente a las tangentes de su evoluta, es decir: *Las evolventes de una curva* Γ *son las trayectorias ortogonales de sus tangentes.* De la ecuación de CLAIRAUT del haz de tangentes (§ 102-3, nota 5) se obtiene (§ 103-1, *a*) la ecuación diferencial de las evolventes que es del tipo de LAGRANGE (§ 102-3, *b*).

EJEMPLO 3. *Evolventes de la circunferencia unidad.* La recta de inclinación α en el haz de tangentes, por ser normal a la de inclinación $\alpha - \frac{1}{2}\pi$, es

$$x \cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\pi) + y \operatorname{sen}(\alpha - \tfrac{1}{2}\pi) = 1, \quad \text{o sea} \quad -x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha = 1;$$

de aquí podría hallarse la ecuación diferencial del haz por derivación y eliminación de α (o bien teniendo en cuenta que debe ser una ecuación de CLAIRAUT, ver § 102-3, nota 5), pero es más sencillo poner $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ en función de $\operatorname{tg}\alpha = y'$, llegándose así a la ecuación:

$$(y - xy')^2 = 1 + y'^2 \quad ,$$

que mediante reemplazo de y' por $-1/y'$, da

$$(yy'+x)^2 = 1 + y'^2 \quad \therefore \quad (y\mathrm{d}y + x\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{d}s^2 \quad ,$$

indicando con $\mathrm{d}s$ la diferencial de arco $\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$. Como el primer miembro es $[\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)]^2$, conviene pasar a coordenadas polares, siendo en ellas $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\varrho^2 + \varrho^2\mathrm{d}\omega^2$ (§ 55-4); entonces:

$$[\tfrac{1}{2}\mathrm{d}(\varrho^2)]^2 = \mathrm{d}\varrho^2 + \varrho^2\mathrm{d}\omega^2 \quad \therefore \quad (\varrho^2-1)\,\mathrm{d}\varrho^2 = \varrho^2\mathrm{d}\omega^2 \quad ,$$

donde las variables se separan y resulta:

$$\omega = \sqrt{\varrho^2-1} - \operatorname{arc\,cos}(1/\varrho) + C \quad ,$$

(cfr. ejercicio 5 y § 55, ejercicio 15).

2. **Trayectorias oblicuas.** — Una *trayectoria* de un haz es una curva que corta a las del haz según una ley dada. Un caso importante es el de las curvas que forman un ángulo constante θ con las del haz: para $\theta = \pi/2$ se tienen las trayectorias ortogonales ya estudiadas; para $\theta \neq \pi/2$ las trayectorias se llaman *oblicuas*.

Poniendo $m_0 = \operatorname{tg}\theta$, entre la pendiente m de una curva del haz en un punto P y la pendiente m_1 de la trayectoria oblicua en P existe la relación

$$m_1 = \frac{m-m_0}{1+mm_0} \quad ,$$

de modo que si la ecuación diferencial de la familia está dada en una de las formas [103-5], la de las trayectorias oblicuas de ángulo $\theta = \operatorname{arc\,tg} m_0$ será:

[103-9] $$y' = \frac{\mathrm{f}(x,y) - m_0}{1+\mathrm{f}(x,y)\,m_0} \quad ,$$

o bien:

$$\varphi\left(x, y, \frac{y'-m_0}{1+y'm_0}\right) = 0 .$$

Ejemplo. El haz de circunferencias concéntricas $x^2+y^2=C^2$ tiene por ecuación diferencial $x+yy'=0$. Las trayectorias oblicuas con ángulo $\operatorname{arc\,tg} m_0$ forman un haz cuya ecuación diferencial es:

$$x + y\,\frac{y'-m_0}{1+y'm_0} = 0 \quad ,$$

o bien

[103-10] $$(m_0x+y)\,y' + x - m_0y = 0 .$$

Ésta es una ecuación homogénea. Resolviéndola se llega a

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} + m_0 \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = C .$$

En coordenadas polares (ϱ, ω), la ecuación de las trayectorias es

$$\varrho = Ce^{-m_0\omega} \quad ,$$

es decir, las curvas son espirales logarítmicas. Pudimos obtenerlas directamente integrando [103-10] por paso a coordenadas polares (§ 101-2, nota 3).

3. **Líneas de fuerza de un campo vectorial plano.** — *a*) Dado un campo vectorial (§ 91-2, *a*) de componentes $X(x,y)$, $Y(x,y)$ las líneas de fuerza (§ 91-2, *b*) están caracterizadas por la condición de que en cada punto el vector le es tangente, es decir, tiene por coeficiente angular: $Y(x,y)/X(x,y)$, luego la ecuación diferencial de las líneas de fuerza del campo vectorial es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$$

o abreviadamente:

[103-11] $$Y\,dx - X\,dy = 0$$

El caso más importante se presenta cuando el campo es **irrotacional** (§ 91-5), es decir, se verifica:

[103-12] $$X_y = Y_x$$

pues entonces existe una función potencial U del campo, tal que las componentes son las derivadas parciales:

[103-13] $$X = U_x \quad , \quad Y = U_y$$

y la ecuación de las *líneas equipotenciales* es $U =$ constante.

Por otra parte, la condición necesaria y suficiente para que la expresión [103-11] sea diferencial exacta es

[103-14] $$-Y_y = X_x$$

equivalente a decir que la divergencia del campo (§ 91-3) es nula, o que el campo es solenoidal.

Entonces existe un potencial V tal que:

[103-15] $$-Y = V_x \quad , \quad X = V_y$$

y la ecuación de las líneas de fuerza es: $V =$ constante, y sustituyendo en [103-14] los valores [103-13] resulta:

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \quad ó \quad \Delta U = 0.$$

Análogamente, sustituyendo en [103-12] los valores [103-15] resulta:

$$V_{xx} + V_{yy} = 0 \quad , \quad \text{o sea: } \Delta V = 0$$

es decir: *los dos potenciales* (que se llaman *conjugados*) *satisfacen a la ecuación de* LAPLACE.

De [103-13] y [103-15] resulta: *las curvas equipotenciales* $U =$ *const. y las líneas de fuerza* $V =$ *const. son ortogonales.*

EJEMPLO: Sea el campo vectorial $X = x^2 - y^2$, $Y = -2xy$, que cumple la condición de las derivadas cruzadas; luego existe un potencial U, tal que:

$$U_x = x^2 - y^2 \quad , \quad U_y = -2xy \quad \therefore \quad U = (1/3)x^3 - y^2x + c$$

También existe un potencial conjugado V, tal que:

$$V_x = +2xy \quad , \quad V_y = x^2 - y^2 \quad \therefore \quad V = + x^2y - (1/3)y^3 + C$$

Dibújense las curvas equipotenciales $U =$ const. y las líneas de fuerza $V =$ const.

b) *Líneas de nivel y de máxima pendiente de una superficie.* — En una superficie $z = U(x,y)$, las curvas $U(x,y) = \alpha$, $z = \alpha$ (α constante), intersecciones con planos paralelos al (x,y), se llaman *líneas de nivel*. Las curvas de la superficie cuya tangente en cada punto forma el mayor ángulo posible con el plano (x,y), se llaman *líneas de máxima pendiente* de la superficie.

El estudio de estos sistemas de curvas se reduce al *a*) considerando el campo vectorial grad. U, de componentes U_x, U_y, U_z (§ 66-6).

EJERCICIOS

1. Trayectorias ortogonales de los haces:

$a)$ $x^2 - y^2 = C^2$;
$b)$ $y = Cx^2$.

2. Hallar y representar las trayectorias ortogonales de las elipses:

$a)$ $x^2 + (y^2/4) = C$;
$b)$ $x^2 + (y^2/C^2) = 1$.

3. Hallar y representar las trayectorias ortogonales del haz de circunferencias de radio 1 y centros sobre el eje y.

4. Probar que son ortogonales los haces:

$$x^2 - y^2 + \ln\cos 2xy = C \quad , \quad x^2 - y^2 + \ln \operatorname{sen} 2xy = C.$$

5. En el ejemplo 3 de § 103-1 obtener la evolvente que pasa por el punto $\rho = 1$, $\omega = 0$, y verificar que es la misma curva hallada en el ejercicio 15 de § 55.

6. Hallar las evolventes de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3}$ como trayectorias ortogonales de sus tangentes y verificar el resultado mediante el ejercicio 14 de § 55.

7. Trayectorias oblicuas (de ángulo $\theta = \operatorname{arc\,tg} m_0$) de las rectas $y = Cx$.

8. Probar que dado un haz *cualquiera* de circunferencias, sus trayectorias ortogonales u oblicuas son (con cambio de variables) soluciones de una ecuación de RICCATI.

9. Sabiendo que las líneas equipotenciales de un campo vectorial plano irrotacional y solenoidal son los óvalos de CASSINI $(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = C^4$, hallar las líneas de fuerza.

§ 104. RESOLUCIÓN APROXIMADA. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

1. **Método de desarrollo en serie.** — No existe método general para resolver una ecuación diferencial

$$[104\text{-}1] \qquad y' = f(x, y)$$

exactamente, mediante cuadraturas. Entre los métodos de resolución aproximada, los que expresan la solución en forma de serie dan en ocasiones la solución exacta, si la serie se corta, o se ve que es la de una función conocida. El desarrollo en serie resulta útil si es rápidamente convergente.

$a)$ *Coeficientes indeterminados.* — Si la solución de [104-1] puede expresarse en serie de potencias

$$[104\text{-}2] \qquad y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

al derivar y sustituir en [104-1] se obtienen por igualación de

coeficientes de ambos miembros, condiciones para determinar los coeficientes $a_1, a_2, \ldots$ de [104-2] a partir de a_0 que puede fijarse arbitrariamente, y así resulta la solución general, con una constante arbitraria. Para ello hay que suponer $f(x, y)$ desarrollada en serie de potencias de x y de y.

NOTAS: 1. Queda pendiente el estudio de las condiciones sobre $f(x, y)$ para que haya una solución de la forma [104-2], con el parejo examen de la convergencia de la serie obtenida una vez calculados los coeficientes, porque como dijimos en § 44-4, sólo en esta hipótesis son legítimas las operaciones a que se ha sometido dicha serie para determinar los coeficientes.

2. El método implica la sustitución de una serie en otra, y se simplifica cuando $f(x, y)$ es racional, como puede verse comparando los dos ejemplos que siguen.

EJEMPLOS: 1. *Desarrollar alrededor de* $x = 0$ *la solución de* $y' = y/(1 + x)$. El reemplazo de [104-2] con $x_0 = 0$ conduce a igualar coeficientes en

$$(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots)(1 + x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots ,$$

y resulta $a_1 = a_0$, $a_n = 0$ para $n \geqslant 2$. La solución *exacta* $y = a_0(1 + x)$, se obtiene más fácilmente por separación de variables.

2. *En* $y' = \cos x + \operatorname{sen} y$ *desarrollar hasta el término en* x^5 *la solución particular que se anula para* $x = 0$.

Reemplazando [104-2] con $x_0 = 0$ y $a_0 = 0$ resulta (escribiendo los términos necesarios):

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots =$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots) -$$
$$- \frac{1}{3!}(a_1x + a_2x^2 + \ldots)^3 + \ldots$$

Igualando coeficientes resultan las ecuaciones

$$a_1 = 1 \quad , \quad 2a_2 = a_1 \quad , \quad 3a_3 = -\tfrac{1}{2} + a_2 \quad , \quad 4a_4 = a_3 - (a_1^3/6) \quad ,$$
$$5a_5 = (1/24) + a_4 - \tfrac{1}{2}a_1^2 \cdot a_2 \quad ,$$

de donde se obtienen sucesivamente $a_1, a_2, \ldots$, y resulta:

$$y = x + \tfrac{1}{2}x^2 - (x^4/24) - (x^5/20) + \ldots$$

b) *Uso de la serie de* TAYLOR. — El desarrollo [104-2] de la solución por $P(x_0, y_0)$ puede obtenerse cuando existe (nota 1), escribiéndolo en la forma de serie de TAYLOR

$$[104\text{-}3] \qquad y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 +$$
$$+ \frac{y'''_0}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

y calculando los coeficientes a partir de la ecuación diferencial [104-1]

$$y' = f \quad ; \quad y'' = f_x + f_y \cdot y' = f_x + f_y \cdot f$$
$$y''' = f_{xx} + 2f_{xy} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_y \cdot f_x + (f_y)^2 \cdot f$$

. . . .

Resulta así, poniendo $x - x_0 = h$:

[104-4] $$y = y_0 + h\mathrm{f} + \tfrac{1}{2}h^2[\mathrm{f}_x + \mathrm{f}_y \, . \, \mathrm{f}] +$$
$$+ \frac{h^3}{3!}[\mathrm{f}_{xx} + 2\mathrm{f}_{xy}\mathrm{f} + \mathrm{f}_{yy}\mathrm{f}^2 + \mathrm{f}_y(\mathrm{f}_x + \mathrm{f} \, . \, \mathrm{f}_y)] + \ldots \quad ,$$

donde las funciones se toman en (x_0, y_0).

EJEMPLO 3. Ecuación: $y' = y^2 + x$, con las condiciones iniciales: $x = 0$, $y = 0$.

$$\begin{aligned} y'' &= 2yy' + 1 \\ y''' &= 2yy'' + 2y'^2 \\ y^{\mathrm{IV}} &= 2yy''' + 6y'y'' \\ y^{\mathrm{V}} &= 2yy^{\mathrm{IV}} + 8y'y''' + 6y''^2 \end{aligned}$$

de donde:

$$y_0' = 0 \quad , \quad y_0'' = 1 \quad , \quad y_0''' = 0 \quad , \quad y_0^{\mathrm{IV}} = 0 \quad , \quad y_0^{\mathrm{V}} = 6 \quad , \quad \ldots$$
$$y = \tfrac{1}{2}x^2 + (1/20)x^5 + \ldots$$

una solución bastante aproximada es, pues, $\frac{1}{2}x^2$. En un intervalo de 0,1 el error cometido tomando este arco de parábola es menor que 0,000 001.

2. **Métodos de Adams y de Nyström.** — En general el desarrollo en serie sólo da la solución en las inmediaciones de un punto x_0. Existen muchos métodos prácticos de cálculo numérico para prolongar una solución que corresponda a un reducido número de términos en [104-4]. El método de EULER (§ 100-3) consiste en tomar sólo dos términos, aproximando la curva integral por un pequeño segmento de la recta $y = y_0 + (x - x_0)\mathrm{f}(x_0, y_0)$, y reiterar el procedimiento. Como hemos dicho, su precisión es muy grosera (cfr. § 100-3, ej.)

a) En el método de J. C. ADAMS se elige h suficientemente pequeño para que haciendo en [104-3] $x - x_0 = h, 2h, 3h, 4h$, se puedan calcular los cuatro primeros valores de y en los puntos $x_j = x_0 + jh$, $(j = 1, 2, 3, 4)$ con tanta aproximación como se quiera. Con ello pueden calcularse los valores $q_j = \mathrm{q}(x_j) = h\mathrm{f}(x_j, y_j)$, y formar la tabla de diferencias (§ 47-1):

[104-5] $$\left\{ \begin{array}{lllll} q_0 & & & & \\ & \Delta q_0 & & & \\ q_1 & & \Delta^2 q_0 & & \\ & \Delta q_1 & & \Delta^3 q_0 & \\ q_2 & & \Delta^2 q_1 & & \Delta^4 q_0 \\ & \Delta q_2 & & \Delta^3 q_1 & \\ q_3 & & \Delta^2 q_2 & & \\ & \Delta q_3 & & & \\ q_4 & & & & \end{array} \right.$$

Para hallar valores y_j de y en $x_j = x_0 + jh$, con $j = 5, 6, \ldots$, el método consiste en calcular $\mathrm{q}(x) = h\mathrm{f}(x, y)$ para valores x_j con $j > 4$ por la utilización de la ecuación diferencial, y la extrapolación en la tabla anterior mediante una forma "retrógrada" de la fórmula de NEWTON - GREGORY (§ 47-5)

simbólicamente expresada (con los operadores E y Δ de § 47-2):

$$\mathrm{E}^r = \left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}-\Delta}\right)^r = \left(1 - \frac{\Delta}{\mathrm{E}}\right)^{-r} = 1 + r\Delta\,.\,\mathrm{E}^{-1} + $$
$$+ \frac{r(r+1)}{2!}\Delta^2\,.\,\mathrm{E}^{-2} + \ldots$$

Aplicando ésta, se tiene:

$$\mathrm{q}(x_j + rh) = q_j + r\Delta q_{j-1} + \frac{r(r+1)}{2!}\Delta^2 q_{j-2} + \ \ldots \quad ;$$

que en $0 < r < 1$ sirve para calcular y_{n+1} mediante

$$[104\text{-}6] \qquad y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_n+h} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_n+h} q\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 q(x_n + rh)\,\mathrm{d}r.$$

Resulta así en general

$$[104\text{-}7] \qquad y_{n+1} - y_n = q_n + \frac{1}{2}\Delta q_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{n-2} +$$
$$+ \frac{3}{8}\Delta^3 q_{n-3} + \frac{251}{720}\Delta^4 q_{n-4} + \ldots$$

En particular ADAMS toma los cinco términos escritos y con $n = 4$ calcula y_5 partiendo de valores de la tabla [104-5], y luego $q_5 = h\mathrm{f}(x_5, y_5)$, lo que permite agregar a la tabla [104-5] una nueva línea paralela a $q_4, \ldots, \Delta^4 q_0$. Entonces con [104-7] para $n = 5$ se halla y_6 y luego $q_6 = h\mathrm{f}(x_6, y_6)$, lo que permite agregar otra línea a la tabla, etc.

EJEMPLO 1. Dada la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2$, tabular la solución desde $x_0 = 0$; $y_0 = 0$ hasta $x = 0{,}6$ con $h = 0{,}1$.

El desarrollo en serie es $y = (1/3)x^3 + (1/63)x^7 + \ldots$, que para $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$, $x_4 = 0{,}4$ da los valores de y_0 a y_4, los que sustituídos en $q_j = 0{,}1(x_j^2 + y_j^2)$ dan q_0, q_1, q_2, q_3, q_4. Aplicando [104-7] resulta y_5 y con el mismo proceso y_6, y así se obtiene:

				Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
valores iniciales	$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$q_0 = 0$				
				1000			
valores iniciales	$x_1 = 0{,}1$	$y_1 = 0{,}000\,333$	$q_1 = 0{,}001\,000$		2001		
				3001		5	
valores iniciales	$x_2 = 0{,}2$	$y_2 = 0{,}002\,667$	$q_2 = 0{,}004\,001$		2006		20
				5007		25	
valores iniciales	$x_3 = 0{,}3$	$y_3 = 0{,}009\,003$	$q_3 = 0{,}009\,008$		2031		35
				7038		60	
valores iniciales	$x_4 = 0{,}4$	$y_4 = 0{,}021\,359$	$q_4 = 0{,}016\,046$		2091		
				9129			
	x_5 0,5	$y_5 = 0{,}041\,786$	$q_5 = 0{,}025\,175$				
	x_6 0,6	$y_6 = 0{,}072\,431$					

b) En lugar de [104-6] podría tomarse

$$y_{n+1} - y_{n-1} = \frac{1}{h}\int_{x_n - h}^{x_n + h} q\,dx = \int_{-1}^{1} q(x_n + rh)\,dr \quad ,$$

dando

$$y_{n+1} - y_{n-1} = 2q_n +$$

$$+ \sum_{t=1}^{\tau} \frac{1}{t!} \Delta^t q_{n-t} \int_{-1}^{+1} r(r+1)\ldots(r+t-1)\,dr.$$

Para $\tau = 5$, resulta la fórmula dada por Nyström:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2q_n + \frac{1}{3}\left(\Delta^2 q_{n-2} + \Delta^3 q_{n-3} + \Delta^4 q_{n-4} + \Delta^5 q_{n-5}\right) -$$

$$- \frac{1}{90}(\Delta^4 q_{n-4} + 2\Delta^5 q_{n-5}) \quad ,$$

más cómoda que la de Adams en los cálculos.

Ejemplo 2. Aplicada la fórmula de Nyström al ejemplo anterior para $n = 5$ resulta:

$$y_6 = 0{,}021\,359 + 2 \,.\, 0{,}025\,175 + (1/3) \,.\, 0{,}002\,201 - (1/90) \,.\, 0{,}000\,065 =$$
$$= 0{,}072\,442.$$

3. **Métodos de Runge y de Runge y Kutta.** — El cálculo directo de un reducido número de términos de la serie [104-4], como se indicó para el comienzo en el método de Adams, ofrece en general inconvenientes por la creciente complicación de las derivadas sucesivas de $f(x, y)$. Además, si $f(x, y)$ se da por una tabla, resulta muy impreciso el cálculo de derivadas de orden superior. C. Runge dió fórmulas que consisten en formar combinaciones de valores de $f(x, y)$ en puntos adecuados para obtener sin derivaciones, expresiones cuyos desarrollos coincidan en sus primeros términos con [104-4]. Estas fórmulas fueron tan mejoradas por K. Heun y W. Kutta, que podemos representar con cuatro valores de $f(x, y)$ todos los términos hasta el que contiene h^4 como factor.

a) *Primera fórmula de* Runge. — La observación de que por ser $g(x+h) - g(x) = hg'(x) + \frac{1}{2}h^2 g''(\xi)$ es $[g(x+h) - g(x)]/h$ un valor aproximado de $g'(x)$ con error $\frac{1}{2}hg''(\xi)$ del orden de h, pero que $[g(x+h) - g(x-h)]/(2h)$ da mejor aproximación, pues el error es $h^2 g'''(\xi)/3!$, del orden de h^2, conduce a pensar que el incremento

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

del método de Euler (fig. 348) podría mejorarse con sólo tomar

f en otro punto. Esto se logra con la primera fórmula de RUNGE:

[104-8] $$k' = h \cdot f(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}f \cdot h)$$

cuyo significado geométrico es éste: la tangente en A_0 a la curva integral corta a la recta $x = x_0 + \frac{1}{2}h$ en un punto A_1 (fig. 349) que tiene las coordenadas $(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}f \cdot h)$ al cual corresponde una tangente; la paralela por A_0 determina en la recta $x = x_0 + h$ un punto que aproximadamente pertenece a la curva integral por A_0, con error $O(h^3)$.

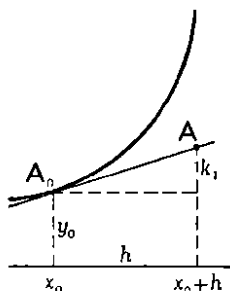


Fig. 348.

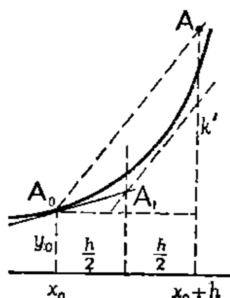


Fig. 349.

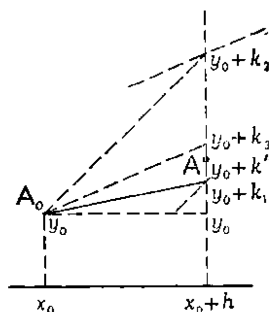


Fig. 350.

En efecto, desarrollando por la fórmula de TAYLOR, resulta:
$k' = hf + \frac{1}{2}h^2(f_x + f_y \cdot f) + \frac{1}{8}h^3(f_{x^2} + 2f_{xy} \cdot f + f_{y^2} \cdot f^2) + \ldots$
desarrollo que coincide con [104-4] en los términos h y h^2, siendo el error de tercer orden.

b) Segunda fórmula de RUNGE. — Calcúlense sucesivamente:

$$k_1 = f(x_0, y_0) \cdot h \quad ; \quad k_2 = f(x_0 + h,\ y_0 + k_1) \cdot h \quad ;$$
$$k_3 = f(x_0 + h,\ y_0 + k_2) \cdot h \quad ,$$

es decir: se calcula el incremento por la fórmula de EULER; en el punto obtenido se aplica nuevamente, y otra vez en el mismo punto corregido con el nuevo incremento k_2 en vez del k_1. El promedio

$$k'' = \tfrac{1}{2}(k_1 + k_3) = \tfrac{1}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_0 + h,\ y_0 + k_2)) \cdot h$$

da un valor del mismo orden que el k', es decir, da exactamente los t é r m i n o s p r i m e r o y segundo del desarrollo. En efecto:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f \\
k_2 &= h \cdot f + h^2(f_x + f_y \cdot f) + \tfrac{1}{2}h^3(f_{x^2} + 2f_{xy} \cdot f + f_{y^2} \cdot f^2) + \ldots \\
k_3 &= [f + h \cdot f_x + k_2 f_y + \tfrac{1}{2}(h^2 f_{x^2} + 2hk_2 f_{xy} + k_2^2 f_{y^2}) + \ldots]h = \\
&= h \cdot f + h^2(f_x + f_y f) + \tfrac{1}{2}h^3(f_{x^2} + 2f_{xy} \cdot f + f_{y^2} \cdot f^2) + \\
&+ h^3(f_x \cdot f_y + f_y^2 \cdot f) + \ldots
\end{aligned}$$

y el promedio de k_1 y k_3 es:

$$k'' = h \cdot \mathrm{f} + \tfrac{1}{2}h^2(\mathrm{f}_x + \mathrm{f}_y \cdot \mathrm{f}) + \tfrac{1}{4}h^3(\mathrm{f}_{x^2} + 2\mathrm{f}_{xy} \cdot \mathrm{f} + \mathrm{f}_{y^2} \cdot \mathrm{f}^2) + \\ + \tfrac{1}{2}h^3(\mathrm{f}_x \cdot \mathrm{f}_y + \mathrm{f}_y{}^2 \cdot \mathrm{f}) + \ldots$$

que da un error de tercer orden; pero a nada conduciría obtener esta segunda fórmula del mismo orden que la más sencilla k', si no fuera porque combinadas ambas, resulta otra de orden superior, dada por la expresión:

[104-9] $$k''' = (2k' + k'') : 3 .$$

En efecto, los términos comunes a k' y k'', subsisten en k'''; y los términos de tercer grado producen éste:

$$h^3(\mathrm{f}_{x^2} + 2\mathrm{f}_{xy} \cdot \mathrm{f} + \mathrm{f}_{y^2} \cdot \mathrm{f}^2 + \mathrm{f}_x \cdot \mathrm{f}_y + \mathrm{f}_{y^2} \cdot \mathrm{f}) : 6$$

que coincide con el que aparece en el desarrollo [104-4]. Luego el error de k''' es de cuarto orden.

EJEMPLO 1. Aunque para funciones algebraicas es más ventajoso el desarrollo en serie, he aquí un ejemplo para indicar la marcha del cálculo. Sea integrar $y' = x^2 + y^2$ para $x = y = 0$ siendo $h = 0{,}2$. (Cfr. § 104-2, ejemplos 1 y 2).

Puede adoptarse el siguiente esquema de cálculo:

x	y	$\mathrm{f}(x, y)$	$h\mathrm{f}(x, y)$			y_0
x_0	y_0	$\mathrm{f}(x_0, y_0)$	k_1	k_1		
$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}k_1$	$\mathrm{f}(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}k_1)$	k'		$2k'$	
$x_0 + h$	$y_0 + k_1$	$\mathrm{f}(x_0 + h,\ y_0 + k_1)$	k_2			
$x_0 + h$	$y_0 + k_2$	$\mathrm{f}(x_0 + h,\ y_0 + k_2)$	k_3	k_3	k''	k'''
				$2k''$	$3k'''$	$y_1 = y + k'''$
0	0	0	0	0		
0,1	0	0,01	0,002		0,004	
0,2	0	0,04	0,008			
0,2	0,008	0,040 06	0,008 01	0,008 01	0,004	0,002 67
				0,008 01	0,008	0,002 67 $= y_1(0{,}2)$
0,2	0,002 67	0,040 01	0,008	0,008		
0,3	0,006 67	0,090 04	0,018 01		0,036 02	
0,4	0,010 67	0,160 11	0,032 02			
0,4	0,034 69	0,161 21	0,032 24	0,032 24	0,020 12	0,018 71
				0,040 24	0,056 14	0,021 38 $= y_2(0{,}4)$
0,4	0,021 38	0,160 46	0,032 09	0,032 09		
0,5	0,037 42	0,251 4	0,050 28		0,100 56	
0,6	0,053 47	0,362 87	0,072 57			
0,6	0,093 95	0,368 85	0,073 77	0,073 77	0,052 93	0,051 16
				0,105 86	0,153 49	0,072 54 $= y_3(0{,}6)$

Mediante el desarrollo en serie (§ 104-1) se obtiene

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \mathrm{O}(x^{15}) \quad , \quad \mathrm{O}(x^{15}) < 5 \,.\, 10^{-7} \quad ,$$

dando $y(0{,}6) = 0{,}072\,447\,8$.

c) Fórmula de RUNGE *y* KUTTA. — Desarrollando como antes en serie de TAYLOR se constata que un valor aproximado del incremento, con error $\varepsilon = \mathrm{O}(h^5)$, lo da el promedio ponderado:

$$\text{[104-10]} \qquad \mathrm{K} = (k_1 + 2k' + 2k^{\mathrm{IV}} + k^{\mathrm{V}}) : 6 \quad ,$$

siendo

$$\text{[104-11]} \qquad \begin{cases} k^{\mathrm{IV}} = h\mathrm{f}(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}k') \quad ; \\ k^{\mathrm{V}} = h\mathrm{f}(x_0 + h,\ y_0 + k^{\mathrm{IV}}) \,. \end{cases}$$

FR. WILLERS (citado en Cap. XII, nota III, 1) da (con sus notaciones) el siguiente esquema de cálculo:

x	y	$\mathrm{f}(x,y)$	$h\mathrm{f}(x,y)$		y_0
				k_1	
x_0	y_0	$\mathrm{f}(x_0, y_0)$	k_1	$2k'$	K
$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}k_1$	$\mathrm{f}(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}k_1)$	k'	$2k^{\mathrm{IV}}$	$y_1 = y_0 + \mathrm{K}$
$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}k'$	$\mathrm{f}(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}k')$	k^{IV}	k^{V}	
$x_0 + h$	$y_0 + k^{\mathrm{IV}}$	$\mathrm{f}(x_0 + h,\ y_0 + k^{\mathrm{IV}})$	k^{V}	6K	
$x_0 + h$	y_1	$\mathrm{f}(x_0 + h, y_1)$	k_1	k_1	
$x_0 + 3h/2$	$y_1 + \frac{1}{2}k_1$	$\mathrm{f}(x_0 + 3h/2,\ y_1 + \frac{1}{2}k_1)$	k'	$2k'$	
....	....	....	....	....	....

EJEMPLO 2. Apliquemos este procedimiento al mismo ejemplo anterior $y' = x^2 + y^2$ para $x_0 = y_0 = 0$, siendo $h = 0{,}2$. Resulta:

x	y	$\mathrm{f}(x,y)$	$h\mathrm{f}(x,y)$		y_0
0	0	0	0	0	
0,1	0	0,01	0,002	0,004	
0,1	0,001	0,010 001	0,002	0,004	
0,2	0,002	0,040 004	0,008 001	0,008 001	0,002 667
				0,016 001	0,002 667 $= y_1(0{,}2)$
0,2	0,002 667	0,040 007	0,008 001	0,008 001	
0,3	0,006 668	0,090 044	0,018 009	0,036 018	
0,3	0,011 671	0,090 136	0,018 027	0,036 054	
0,4	0,020 694	0,160 482	0,032 096	0,032 096	0,018 695
				0,112 169	0,021 362 $= y_2(0{,}4)$
0,4	0,021 362	0,160 456	0,032 091	0,032 091	
0,5	0,037 408	0,251 4	0,050 28	0,100 56	
0,5	0,046 502	0,252 16	0,050 432	0,100 864	
0,6	0,071 794	0,365 16	0,073 032	0,073 032	0,051 091
				0,306 547	0,072 453 $= y_3(0{,}6)$

NOTA. Una idea de la aproximación lograda se obtiene repitiendo el cálculo con amplitud doble $2h$. Como el error es del orden de h^5 y el número de pasos se ha reducido a la mitad, el nuevo error ε' será alrededor de 16 veces mayor. Hay que advertir que ésto no permite acotar ε, y menos aún calcularlo dividiendo por 15 la diferencia $\varepsilon' - \varepsilon$.

4. **Teorema de existencia y unicidad.** — *a*) Los tipos de ecuaciones diferenciales explícitas que hemos estudiado, nos hacen pensar que en condiciones muy generales sobre $f(x, y)$ habrá infinitas curvas integrales de [100-1] expresables en la forma $y = \varphi(x, C)$, y que por cada punto (x_0, y_0) pasa una y sólo una, que resulta determinando C por $y_0 = \varphi(x_0, C)$. El siguiente teorema da condiciones *suficientes* sobre $f(x, y)$ para que esto ocurra.

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD. *Si la función* $f(x, y)$ *cumple en un dominio* D, *cerrado, acotado y convexo* *, *las siguientes condiciones*:

α_1) *Es continua, y por lo tanto acotada, en* D;

α_2) *Condición de* LIPSCHITZ *respecto de* y: *Existe un número* $K > 0$ *tal que para cada dos puntos de igual abscisa* (x, y), (x, Y) *en* D *es* **:

[104-12] $$|f(x, y) - f(x, Y)| \leqq K\,|y - Y| \quad ;$$

entonces, por cada punto (x_0, y_0) *interior a* D *pasa una y sólo una curva integral* $y = \varphi(x)$ *de la ecuación diferencial* [104-1].

La demostración resultará del lema *b*) con el que probaremos en *c*) y *d*) la existencia y la unicidad como consecuencias de conclusiones "más fuertes", sobre la marcha de las curvas integrales de todo un conjunto de ecuaciones diferenciales con segundo miembro poco diferente de $f(x, y)$.

b) LEMA DE APROXIMACIÓN. — *Si* $f(x, y)$ *cumple* α_1 *y* α_2 *y por un punto* (x_0, y_0) *de* D *pasan dos curvas* $y = \varphi(x)$, $Y = \psi(x)$, *tales que*:

β_1) $\varphi(x)$ *y* $\psi(x)$ *son dos funciones continuas, con derivadas acotadas y continuas salvo un número finito de puntos donde pueden no existir*;

β_2) $\varphi(x)$ *y* $\psi(x)$ *satisfacen la ecuación diferencial* [104-1] *con errores* $\varepsilon_1(x)$ *y* $\varepsilon_2(x)$ *tales que* $|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \leqslant \varepsilon$; *entonces es*:

[104-13] $$|y - Y| \leqslant \frac{\varepsilon}{K}\left(e^{K|x - x_0|} - 1\right).$$

---

* Es decir, con cada par de puntos, D contiene el segmento que los une.

** Es decir, es acotada en D la razón de incrementos respecto de y. Esta condición se cumple en particular si existe derivada parcial f_y acotada en D.

b_1) Basta demostrar [104-13] para curvas poligonales, pues hecho esto, dado $\eta > 0$ existen (cfr. § 26, ejercicio 6) quebradas $q(x)$ y $Q(x)$ tales que $|q - y|$, $|Q - Y|$, $|q' - y'|$, $|Q' - Y'|$ son $< \eta$ y de la desigualdad [104-13] para las quebradas, resulta

$$|y - Y| \leqq \frac{\varepsilon + 2\eta}{K}(e^{K|x - x_0|} - 1) + 2\eta \quad ,$$

y haciendo $\eta \to 0$ resulta [104-13].

b_2) Supongamos entonces que $y = \varphi(x)$ é $Y = \psi(x)$ son quebradas; de α_2 y β_2 se obtiene

[104-14] $$|y' - Y'| \leqq K|y - Y| + \varepsilon.$$

Poniendo $u = |y - Y|$ resulta $u' = \pm(y' - Y')$, salvo en un número finito de puntos donde no existe y' ó Y', ó cambia de signo $y - Y$. Salvo en estos puntos resulta de [104-14] $u' < Ku + \varepsilon$, de donde:

$$D(e^{-Kx} . u) = e^{-Kx}(u' - Ku) \leqslant \varepsilon e^{-Kx}.$$

Integrando de x_0 a $x > x_0$ y observando que $u(x_0) = 0$, resulta

$$e^{-Kx} . u \leqq (\varepsilon/K)(e^{-Kx_0} - e^{-Kx}) \quad ,$$

y de aquí [104-13].

Si es $x < x_0$ basta integrar de x a x_0, lo que permuta x con x_0 y subsiste [104-13].

c) TEOREMA FUERTE DE EXISTENCIA. — *Si* $f(x, y)$ *cumple* α_1 *y* α_2, *para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una quebrada* $y = \varphi_\varepsilon(x)$ *que pasa por* (x_0, y_0) *y verifica la ecuación diferencial* [104-1] *salvo un error* $\omega(x)$ *de módulo* $< \varepsilon$. *Si* $\varepsilon \to 0$, $\varphi_\varepsilon(x)$ *tiende uniformemente hacia una integral* $\varphi(x)$ *de* [104-1], *que pasa por* (x_0, y_0).

c_1) Por α_1 la oscilación de $f(x, y)$ es $< \varepsilon$ en todo círculo de radio $< \delta = \delta(\varepsilon)$ contenido en D, y entonces toda quebrada de EULER (§ 100-3) de lados $< \delta$ cumple las condiciones exigidas a $\varphi_\varepsilon(x)$.

c_2) Si $\varepsilon \to 0$, en virtud de [104-13] las funciones $\varphi_\varepsilon(x)$ tienden *uniformemente* hacia un límite $\varphi(x)$.

c_3) Integrando $D\varphi_\varepsilon(x) = f[x, \varphi_\varepsilon(x)] + \omega(x)$ resulta

$$\varphi_\varepsilon(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} \{f(x, \varphi_\varepsilon) + \omega\} dx \quad ,$$

y para $\varepsilon \to 0$ será por c_2 y $|\omega| < \varepsilon$:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, \varphi(x)] dx \quad ,$$

de donde:

$$\varphi(x_0) = y_0 \quad \text{y} \quad \varphi'(x) = f[x, \varphi(x)].$$

d) TEOREMA FUERTE DE UNICIDAD. — *La integral* $\varphi(x)$ *del teorema anterior es la única en* D *que pasa por* (x_0, y_0). *Toda función* $y = \psi(x)$ *que verifique* [104-1] *con error de módulo menor que* ε, *difiere de* $\varphi(x)$ *en menos de* $(\varepsilon/K)(e^{K|x - x_0|} - 1)$, *y por consiguiente tan poco como se quiera con tal de tomar* ε *suficientemente pequeño.*

La segunda parte resulta de *b* con $\varepsilon_1 = 0$. De ella resulta la unicidad.

NOTAS: 1. *Dependencia respecto de parámetros.* Si $f(x, y)$ contiene uno o más parámetros: $f(x, y, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, de los cuales es función continua en el punto $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, y además $f(x, y, 0, \ldots, 0)$ cumple α_1 y α_2, los teoremas anteriores implican que la curva integral de [104-1] por (x_0, y_0) será función continua de esos parámetros en $\lambda_i = 0$. Esta propiedad de las soluciones se extiende fácilmente a un dominio de variación de los parámetros. Fué estudiada por POINCARÉ (*Les nouvelles méthodes de la mécanique céleste*, 1892) y es fundamental para las aplicaciones, pues en la práctica sólo se tienen valores aproximados de las constantes numéricas que figuran en la ecuación.

2. *Otras demostraciones del teorema de existencia y unicidad.* La demostración dada en el texto siguiendo a VALLÉE POUSSIN, sigue las líneas del método de CAUCHY - LIPSCHITZ, que es un perfeccionamiento de un teorema de existencia dado por CAUCHY *, quien exigía la continuidad de $f_y(x, y)$.

Para el intervalo (x_0, x) la quebrada de EULER correspondiente a la partición $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x$, conduce en x al valor:

$$y_n = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + \ldots + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}).$$

Esta suma presenta mucha analogía con la correspondiente a la definición de CAUCHY de la integral (§ 48-3). Una demostración debida a GOURSAT consiste en generalizarla de modo que muestre la mayor analogía posible con la definición más general (§ 49) de RIEMANN (GOURSAT, citado en Cap. VI, nota VI, 5; t. 2, 7ª ed., pág. 401; INCE, citado en Cap. XXVII, nota IV, 3; pág. 76).

Una demostración totalmente distinta es la basada en el *método de aproximaciones sucesivas* de PICARD, que consiste en formar la sucesión de funciones:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx \quad , \quad y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y_1(x)]\,dx \quad ,$$

$$\ldots, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]\,dx \quad , \quad \ldots .$$

Se demuestra que si $f(x, y)$ cumple las condiciones dadas en *a*, esta sucesión converge uniformemente hacia una función $y(x)$ que verifica:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y(x)]\,dx \quad ,$$

y en consecuencia en un entorno suficientemente pequeño de x_0 es solución de [104-1], y que es la única por (x_0, y_0). Por el teorema de unicidad, la solución dada por este método coincidirá con la construída en *c*, pero el método de CAUCHY - LIPSCHITZ tiene sobre el de PICARD la ventaja de que permite construir la solución en todo intervalo finito donde ésta es continua. (Ver GOURSAT, citado en Cap. VI, nota VI, 5; t. 2, 7ª ed., pág. 407).

3. *Otros teoremas de existencia y unicidad.* La condición de LIPSCHITZ es superflua para el teorema de existencia. Con la única hipótesis de la continuidad de $f(x, y)$ ha probado ARZELÀ que [104-1] admite al

* El método basado en la consideración de las quebradas de EULER, dado por CAUCHY en sus lecciones de la École Polytechnique entre 1820 y 1830, está resumido en una memoria litografiada en Praga en 1835, y publicado en forma más completa por su discípulo F. N. M. MOIGNO (*Leçons de Calcul*, 2, 1844, p. 385, 513), pero la esencia del método se remonta a EULER (*Inst. Calc. Int.*, 1, 1768, p. 493). De allí el nombre dado en § 100-3.

menos una solución por (x_0, y_0). Una demostración de MONTEL (*Thèse*, 1907), que utiliza las quebradas de EULER, puede verse en VALIRON (citado en Cap. VI, nota VI, 5), II, pág. 326.

Por otra parte, debe imponerse la condición de LIPSCHITZ u otra similar para asegurar la unicidad. En efecto, basta considerar la ecuación diferencial $y' = +\sqrt{|y|}$ en el punto $x_0 = y_0 = 0$ donde es continuo su segundo miembro y por el que pasan sin embargo las dos soluciones $y = 0$ é $y = x|x|/4$.

W. F. OSGOOD (*Monatshefte Math. Phys.*, 9, 1898) ha colocado el problema sobre una base firme probando que si $f(x, y)$ es continua en un entorno de (x_0, y_0), existe en general un haz de curvas integrales por (x_0, y_0), comprendidas entre dos extremos $y = \Phi_1(x)$, $y = \Phi_2(x)$. La unicidad equivale a $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$, y para esto una condición suficiente es:

[104-15] $$|f(x,y) - f(x,Y)| \leqslant \omega(|y - Y|) \quad ,$$

siendo $\omega(u)$ una función continua, $\geqslant 0$ para $u \geqslant 0$, sólo nula si $u = 0$, y tal que para $\varepsilon > 0$ haga divergente la integral

$$\int_0^\varepsilon \frac{du}{\omega(u)}$$

Funciones con estas condiciones son:

$$Ku \quad , \quad Ku \ln(1/u) \quad , \quad Ku \ln(1/u) \ln\ln(1/u) \quad , \quad \ldots \quad ;$$

la primera da la condición de LIPSCHITZ, las demás, otras condiciones más generales.

Más recientes son los teoremas de unicidad de NAGUMO (*Japanese Journal of Math.*, 3, 1926) y PERRON (*Math. Annalen*, 95, 1926; *Math. Zeitschrift*, 28, 1928); ver KAMKE (citado en Cap. XXVII, nota IV, 2), págs. 97-100 y 139.

5. **Dependencia de las condiciones iniciales.** — Supongamos que el segundo miembro de

[104-16] $$y' = f(x, y)$$

cumple las condiciones de § 104-4, *a*. Indicando con

[104-17] $$y = F(x, y_0)$$

la solución que para $x = x_0$ toma el valor $y = y_0$, nos proponemos demostrar: *a*) Que esta solución es función continua de y_0, y *b*) Que en ciertas condiciones es derivable respecto de y_0.

a) *El incremento* $\Delta y = F(x, y_0 + \Delta y_0) - F(x, y_0)$ *de* [104-17] *correspondiente al incremento* Δy_0 *de* y_0, *verifica*

$$|\Delta y| < |\Delta y_0| e^{K|x - x_0|} \quad ,$$

y en consecuencia y es función continua de y_0.

La función

$$z = z(x) = y + \Delta y - \Delta y_0$$

es tal que $z(x_0) = y_0$, y por ser

$$z'(x) = (y + \Delta y)' = f(x, y + \Delta y) = f(x, z + \Delta y_0) \quad ,$$

verifica [104-16] con error de módulo:

$$|f(x, z + \Delta y_0) - f(x, z)| < K |\Delta y_0|.$$

Será entonces en virtud de [104-13] con $\varepsilon = K|\Delta y_0|$

$$|z - y| = |\Delta y - \Delta y_0| < |\Delta y_0| (e^{K|x - x_0|} - 1) \quad ,$$
$$\therefore \quad |\Delta y| \leqslant |\Delta y - \Delta y_0| + |\Delta y_0| < |\Delta y_0| e^{K|x - x_0|}.$$

b) Si $f(x, y)$ *es continua en el dominio* D, *y admite una derivada* f_y *en* D, *la función* $y = F(x, y_0)$ *admite una derivada parcial respecto a* y_0, *que es continua y no se anula en* D.

Tanto y como $y + \Delta y$ verifican [104-16], por lo que se tiene:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta y_0}\right)' = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y_0}.$$

Por *a* es $\Delta y / \Delta y_0$ acotado, y entonces el segundo miembro es para $\Delta y_0 \to 0$ infinitamente próximo a

$$\frac{\partial f}{\partial y} \; \frac{\Delta y}{\Delta y_0} \quad ,$$

y entonces (§ 104-4, *b*) $\Delta y / \Delta y_0$, que tiene valor inicial 1, será infinitamente próximo a la solución de

[104-18] $$u' = \frac{\partial f}{\partial y} . u \quad ,$$

con igual valor inicial. Pero es

$$u = \lim_{\Delta y_0 \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta y_0} = \frac{\partial}{\partial y_0} F(x, y_0) \quad ,$$

y mediante separación de variables resulta de [104-18]:

$$D \ln u = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \therefore \quad u = \frac{\partial}{\partial y_0} F(x, y_0) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial y} dx}$$

lo que demuestra el teorema.

Ejercicios

1. Obtener la solución en serie y expresarla en términos finitos:

a) $y' = xy$ siendo $y = 1$ para $x = 0$;

b) $y' = y + 2x$ siendo $y = 0$ para $x = 0$.

2. Resolver por desarrollo en serie $y' = 1 + y^2$ siendo $y = 0$ para $x = 0$, y obtener de allí el desarrollo de $\operatorname{tg} x$ hasta x^7.

3. Por el método de Adams tabular la solución particular de $y' = (y - x)/(y + x)$ por $P(0; 1)$, entre $x = 0$ y $x = 0{,}2$, con $h = 0{,}02$ y seis decimales. [Resuelto en Whittaker y Robinson (citado en Cap. X, nota V, 4), pág. 366].

4. Aplicar dos pasos del método de Runge y Kutta a la ecuación $y' = (-4y/x) + x^2y^2$ partiendo de $x_0 = y_0 = 1$, con $h = 0{,}1$. [Resuelto en Willers (citado en Cap. XII, nota III, 1), pág. 95].

5. Probar en el caso en que $f(x, y)$ depende sólo de x, que el error en el método de Runge y Kutta es $O(h^5)$, demostrando que la expresión de K es en tal caso la de la fórmula de Simpson (§ 57-3, *b*).

6. Probar que si $f(x, y)$ cumple α_1) y α_2) de § 104-4, *a*), puede construirse una quebrada de Euler (§ 100-3) que aproxime a la curva integral con cota de error prefijada $\delta > 0$.

7. Del teorema de § 104-5, *b*, deducir que, en las condiciones del mismo, la integral $y = F(x, y_0)$ puede resolverse respecto de y_0, como función *diferenciable* de x é y.

NOTAS AL CAPÍTULO XXVI

I. **Soluciones singulares.** — 1. *Generalidades.* — La ecuación de CLAIRAUT (§ 102-3, *c*) nos ha dado un ejemplo característico en que por un mismo punto pasa más de una curva integral. Más precisamente: por todo punto P por donde pasa una curva integral pasan infinitas, si se tiene presente que un arco de la envolvente de rectas soluciones, y las semirrectas tangentes en sus extremos, forman una curva integral. Si P no pertenece a la envolvente, existe un entorno de él, donde todas esas curvas coinciden y hay unicidad (§ 104-4), pero no así si P pertenece a la envolvente.

No siempre la ecuación diferencial

$$\text{[XXVI-1]} \qquad \varphi(x, y, y') = 0$$

puede llevarse, despejando y', a la forma explícita $y' = f(x, y)$. Supondremos que $\varphi(x, y, p)$ es continua y uniforme conjuntamente con sus derivadas parciales primeras y segundas, en un recinto G del espacio (x, y, p) de elementos lineales, que contenga un trozo S de la superficie $\varphi(x, y, p) = 0$.

Si (x_0, y_0, p_0) es un punto (elemento inicial) de S para el cual

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}(x_0, y_0, p_0) \neq 0 \quad ,$$

existe (§ 67-4) una única función $p = f(x, y)$ continua y uniforme en un cierto contorno de (x_0, y_0) y para la cual

$$f(x_0, y_0) = p_0 \quad , \quad \varphi[x, y, f(x, y)] \equiv 0 .$$

En este entorno, el haz de curvas $F(x, y) = C$, solución de $y' = f(x, y)$, verifica también [XXVI-1].

La recta $x = x_0$, $y = y_0$, (p cualquiera), puede cortar a S en varios puntos; si en todos se verifica la condición $\partial\varphi/\partial p \neq 0$, para cada uno se tiene un haz de curvas $F_k(x, y) = C$, $(k = 1, 2, \ldots)$, solución de [XXVI-1]. Si hay un número finito de intersecciones, la solución general de [XXVI-1] en el entorno de (x_0, y_0) puede escribirse en la forma:

$$[F_1(x, y) - C] \cdot [F_2(x, y) - C] \ldots [F_n(x, y) - C] = 0 .$$

2. *Curva discriminante de la ecuación.* — Un papel especial juegan los puntos de S para los cuales $\partial\varphi/\partial p \neq 0$. Éstos son los puntos de G [o del espacio (x, y, p)] pertenecientes a la curva intersección de las superficies

$$\text{[XXVI-2]} \qquad \varphi(x, y, p) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial p}\varphi(x, y, p) = 0 .$$

La proyección $D(x, y) = 0$ de esta curva sobre el plano (x, y) se llama *φ-discriminante* o *p-discriminante* o *curva discriminante de la ecuación* [XXVI-1]. En muchos casos puede obtenerse esta curva discriminante por eliminación de p entre las ecuaciones [XXVI-2], por ejemplo en el entorno de un elemento lineal de [XXVI-1] para el cual $\partial^2\varphi/\partial p^2 \neq 0$, pues entonces se despeja p de la segunda [XXVI-1] y se reemplaza en la primera.

Los elementos lineales (x, y, p) que verifican ambas ecuaciones [XXVI-2] se llaman *elementos lineales singulares* *; por tanto la curva

* Aunque esta definición es más cómoda para un primer estudio, debe señalarse que el ejemplo $\varphi(x, y, p) \equiv (p - x)^2 = 0$ muestra que los elementos lineales (x, y, p) con $p = x$, que verifican [XXVI-2], cumplen no obstante las condiciones de existencia y unicidad (§ 104-4) y no correspondería señalarlos como singulares. Véase KAMKE (citado en Cap. XXVII, nota IV, 2), págs. 116 y 117.

discriminante es el lugar de los puntos (x, y) sostenes de elementos lineales singulares.

EJEMPLOS: 1. $xy' = y$. Los elementos lineales singulares son $x = 0$, $y = 0$, p cualquiera. La curva discriminante se reduce al único punto $(0, 0)$ por donde pasan todas las curvas integrales $y = Cx$.

2. En $x^2y'^2 = y^2$ los elementos lineales singulares son $(x, 0, 0)$, $(0, y, \infty)$ formando la curva discriminante $xy = 0$, incluída en la integral general de la ecuación dada.

3. En $y'^2 = x^2$ los elementos lineales singulares son $x = 0$, y cualquiera, $p = 0$. La curva discriminante es entonces el eje y. Las curvas integrales son $y = \frac{1}{2}x^2 + C$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + C$ y las $y = \pm\frac{1}{2}x^2 \operatorname{sg} x + C$ formadas por arcos de las anteriores. Por cada punto de la curva discriminante pasan cuatro curvas integrales.

4. En $y'^2 = 4y$ los elementos lineales singulares son $(x, 0, 0)$ y entonces la curva discriminante es $y = 0$ (eje x), que es también curva integral, y envolvente de las otras curvas integrales $y = (x + C)^2$.

5. En la ecuación $\varphi = (y' - xy)(y' - y^2) = 0$ de § 102-1, ejemplo 2, reemplazando el valor de y' sacado de $\partial\varphi/\partial y' = y' - y(x + y) = 0$, se obtiene la curva discriminante

$$[\tfrac{1}{2}y(x + y) - xy] \,.\, [\tfrac{1}{2}y(x + y) - y^2] = (y^2 - xy)(xy - y^2)/4 = 0$$

que se desdobla en las rectas $y = 0$ é $y = x$. La primera es solución de la ecuación diferencial y está comprendida en la expresión (§ 102-1, ej. 2) de la solución general. La segunda no satisface a la ecuación.

6. En la ecuación $\varphi = x\sqrt{1 + p^2} - p = 0$ de § 102-2, ejemplo 1, con solución general allí hallada $x^2 + (y - C)^2 = 1$, la relación

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{xp}{\sqrt{1 + p^2}} - 1 = 0 \quad \text{da} \quad x = \frac{\sqrt{1 + p^2}}{p} \,,$$

que reemplazado en $\varphi = 0$ da $1/p = 0$, y como $x = (1/p)^2 + 1$ resulta el φ-discriminante $x = \pm 1$. Estas dos rectas son soluciones de la ecuación diferencial, pues tienen en cada punto la pendiente del elemento lineal singular $p = \infty$. Obsérvese que constituyen la envolvente del haz de circunferencias solución general.

3. *Soluciones singulares.* — Llamaremos *solución singular* a una solución cuyos elementos lineales sean todos singulares. Como los puntos sostenes de elementos lineales singulares son los de la curva discriminante, toda solución singular está formada por arcos de esa curva. Los ejemplos anteriores prueban que la curva discriminante puede no ser solución (ej. 3), o ser solución singular (ejs. 4 y 6) o tener una parte solución singular (ej. 5). El ejemplo 5 muestra además que una solución singular puede estar comprendida en la solución general. Para que la curva discriminante, o un arco de ella, sea solución singular, se necesario y suficiente que el elemento lineal singular en cada punto, sea tangente al arco. Veamos cómo se expresa analíticamente esta condición. Derivando respecto de x la primer ecuación [XXVI-2] y teniendo en cuenta la segunda resulta

$$\text{[XXVI-3]} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Pero dy/dx es la pendiente de la curva; para que ésta sea solución singular, debe coincidir con la pendiente p del elemento singular en el punto. Entonces

[XXVI-4] $$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y,p)+\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y,p)\cdot p=0 \quad ,$$

y se tienen, para la determinación de las soluciones singulares, las tres ecuaciones [XXVI-2] y [XXVI-4].

Recíprocamente, si a cada punto de una curva se puede asociar un valor del parámetro p de modo que se verifiquen [XXVI-2] y [XXVI-4], la curva será seguramente solución singular si en ella es

[XXVI-5] $$\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y,p)\neq 0 .$$

En efecto, de [XXVI-3] y [XXVI-4] resulta

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}-p\right)=0$$

y por [XXVI-5], $dy/dx=p$, que reemplazado en la primera [XXVI-2] muestra que la curva es solución, singular en virtud de la segunda [XXVI-2].

En general, la curva discriminante *no* es solución singular, pues en ella no se verificará en general [XXVI-4]. Es interesante observar que esta curva *puede ser también solución no singular*, pues para cada punto, además de el o los elementos singulares, puede haber otros no singulares, y ser la curva tangente a uno de éstos.

EJEMPLO 7. La ecuación diferencial $(y'^2-x+y)(y'-1)=0$ tiene por curva discriminante $D(x,y)=0$ la $4(x-y)(y-x+1)^2=0$ que da por solución singular $y=x-1$, mientras que la recta $y=x$ es *solución no singular*, aunque sobre ella se den los elementos lineales singulares $x=y,\ p=0$.

4. *Soluciones singulares y envolventes.* — La ecuación de CLAIRAUT (§ 102-3, *c*) y los ejemplos 3, 4 y 6 por una parte, y el ejemplo 5 por otra, prueban que la solución singular puede ser envolvente del haz solución general, y puede también no serlo. Probaremos que *cuando la envolvente existe, forma parte de la solución singular.*

a) Toda envolvente del haz $\Phi(x,y,C)=0$ solución general, es también solución de [XXVI-1], como vimos en § 100-4, *b*. Más generalmente, la curva $\Delta(x,y)=0$ que resulta de eliminar C entre

[XXVI-6] $$\Phi(x,y,C)=0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial C}\Phi(x,y,C)=0 \quad ,$$

que llamaremos *Φ-discriminante* o *curva discriminante de la solución general*, y contiene a la envolvente (§ 74-1, teor. 1), *satisface a la ecuación diferencial* [XXVI-1] *salvo eventualmente en los puntos donde*

[XXVI-7] $$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial C^2}=0 .$$

En efecto, en cada punto de $\Delta(x,y)=0$ coinciden las tangentes a esta curva y a la del haz $\Phi=0$ por él (§ 74-1, *b*).

b) *Las soluciones de* [XXVI-1] *contenidas en el Φ-discriminante* $\Delta(x,y)=0$, *pertenecen también al φ-discriminante, es decir, son soluciones singulares.*

Por un punto (x_0,y_0) de la curva $\Delta(x,y)=0$ pasa una curva $\Phi(x,y,C_0)=0$ del haz, y como ambas son soluciones de [XXVI-1] se tiene:

$$\varphi_x+\varphi_y\cdot y'+\varphi_{y'}\,y''_\Delta=0 \quad , \qquad \varphi_x+\varphi_y\cdot y'+\varphi_{y'}\,y''_\Phi=0 \quad ,$$

indicando con y''_Δ é y''_Φ las derivadas segundas d^2y/dx^2 sobre una u otra curva. Restando resulta, en el punto (x_0,y_0):

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)_0 (y''_\Delta - y''_\Phi)_0 = 0 \quad ,$$

y si no coinciden los valores de las derivadas segundas, resulta en (x_0, y_0): $\partial\varphi/\partial y' = 0$.

Al mismo resultado se llega derivando $n-1$ veces [XXVI-1] si coinciden las derivadas 2as., 3as., ..., $(n-1)$-ésimas en (x_0, y_0), y difieren las n-ésimas.

c) Si la integral general se da en forma paramétrica, su curva discriminante se halla por el método ya estudiado en § 74-1, nota 3, para este caso.

EJEMPLO 8. La integral general de la ecuación de LAGRANGE (§ 102-3, *b*) tiene la forma (§ 101-4, nota 1):

$$x = \mathrm{x}_1(p) + C\mathrm{x}_2(p) \quad , \quad y = \mathrm{y}_1(p) + C\mathrm{y}_2(p) \quad ,$$

donde

$$\mathrm{y}_1(p) \equiv \mathrm{x}_1(p)\alpha(p) + \beta(p) \quad ; \quad \mathrm{y}_2(p) \equiv \mathrm{x}_2(p)\alpha(p).$$

Eliminando p y C entre las anteriores y la

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial p} & \dfrac{\partial x}{\partial C} \\ \dfrac{\partial y}{\partial p} & \dfrac{\partial y}{\partial C} \end{vmatrix} \equiv y_2(x'_1 + Cx'_2) - x_2(y'_1 + Cy'_2) = 0$$

se obtiene como solución singular de la ecuación de LAGRANGE:

$$\frac{y_2x'_1 - x_2y'_1}{x_2y'_2 - y_2x'_2} = \frac{x - x_1}{x_2} = \frac{y - y_1}{y_2} .$$

CAPÍTULO XXVII

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

§ 105. CONCEPTOS FUNDAMENTALES. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

1. Ecuación diferencial de una familia de curvas. — Vimos (§ 100-2) que una ecuación diferencial de primer orden representa geométricamente un campo de direcciones en el plano (x, y). Para una ecuación de orden superior al primero, el significado geométrico no es tan simple.

EJEMPLO 1. La ecuación de segundo orden

[105-1] $$y'' = f(x, y, y')$$

indica que para cada terna de valores (x, y, y') hay un valor para y''. Luego por cada punto (x, y) pasan infinitas curvas, una en cada dirección (según el valor dado a y'), y en cada una queda determinado el sentido de la concavidad y la curvatura, que se calcula mediante el valor y'' que resulta de [105-1].

En cambio podemos formarnos una idea clara de la multiplicidad de curvas que constituyen la solución general de una ecuación de orden n recordando que en el caso de una ecuación de primer orden es un haz de curvas, y que recíprocamente (§ 100-4, *a*) dado un haz de curvas

[105-2$_1$] $$\Phi(x, y, C) = 0$$

derivando respecto de x y eliminando luego el parámetro, se obtiene la ecuación diferencial del haz

[105-3$_1$] $$\varphi(x, y, y') = 0.$$

Bajo este aspecto el problema se generaliza fácilmente a ecuaciones diferenciales de orden superior al primero.

Sea una familia de curvas

[105-2$_n$] $$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0 \quad ,$$

donde Φ es una función n veces diferenciable respecto de las variables x, y, y además *continua* respecto de los n parámetros supuestos *distintos, esenciales o independientes*, es decir, la fa-

milia no está comprendida en otra de menor número de parámetros $\Psi(x, y, A_1, \ldots, A_\nu) = 0$, $\nu < n$, siendo Ψ también continua (ver ej. 4 y notas 1, 2).

Entonces, si se deriva [105-2_n] respecto de x, n veces, y se eliminan luego los n parámetros entre las $n+1$ ecuaciones, se llega a una ecuación diferencial de orden n:

[105-3_n] $$\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Un razonamiento análogo al de § 100-4, *a*, prueba que esta ecuación diferencial se verifica para todas las curvas de la familia [105-2_n] y por esta razón se llama *ecuación diferencial de la familia.*

Veremos (§ 105-4) que recíprocamente, dada una ecuación diferencial [105-3_n], de orden n, su *solución general* [105-2_n] contiene n constantes arbitrarias.

EJEMPLOS: 2. La familia de todas las rectas del plano: $y = C_1x + C_2$, no paralelas al eje y, tiene dos parámetros. Por consiguiente, su ecuación diferencial será de segundo orden. Derivando dos veces se obtiene $y' = C_1$; $y'' = 0$. Como esta última ecuación no contiene ninguno de los parámetros, es ya la ecuación diferencial de la familia.

3. La ecuación: $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$, representa la familia con tres parámetros de todas las circunferencias del plano. Derivando tres veces se obtiene:

$$x + yy' + A + By' = 0 \quad ; \quad 1 + y'^2 + yy'' + By'' = 0 \quad ;$$
$$3y'y'' + yy''' + By''' = 0 \quad ,$$

y eliminando B entre las dos últimas se llega a la ecuación diferencial de tercer orden

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0.$$

4. De $y = C_1e^{x+C_2}$ resulta la ecuación de *primer* orden $y' = y$. Ello se debe a que los parámetros no son independientes, como se ve escribiendo la familia en la forma

$$y = C_1e^{C_2}e^x = Ae^x.$$

NOTAS: 1. La continuidad de Φ respecto de $C_1, \ldots, C_n$ es esencial para que tenga sentido hablar de *número de parámetros* en [105-2_n], pues si se prescinde de la continuidad pueden definirse correspondencias biunívocas entre conjuntos de diferente número de dimensiones (cfr. Cap. II, nota II).

2. Si se deriva sucesivamente $n-1$ veces [105-2_n], ésta y las nuevas ecuaciones obtenidas forman un sistema de n ecuaciones entre los n parámetros y $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Se dice que los n parámetros son *distintos, esenciales* o *independientes* si no se pueden eliminar los n parámetros entre las n ecuaciones anteriores, es decir, si no puede deducirse de ellas una relación que ligue $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ sin intervención de los parámetros. En § 68-2 y 3 se han estudiado condiciones suficientes para que los n parámetros sean "distintos" y queden determinados para valores *arbitrarios* de $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$.

3. Si a partir de [105-2_n], después de cada derivación se elimina una de las constantes, las relaciones obtenidas, a partir de la ecuación diferencial [105-3_n] en orden inverso, constituyen las *integrales*: *primera* (con derivadas hasta $y^{(n-1)}$ y *una* constante), *segunda*, ..., *n-ésima* o *general* [105-2_n].

2. Reducción a un sistema de ecuaciones de primer orden. — Introduciendo en [105-1] $y' = z$ como nueva función incógnita, vemos que [105-1] equivale al sistema (§ 100-1, c)

$$y' = z \quad ; \quad z' = \mathrm{f}(x, y, z).$$

Análogamente una ecuación diferencial de orden n

[105-4] $$y^{(n)} = \mathrm{f}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

se reduce, introduciendo las funciones incógnitas

[105-5] $$y' = z \quad ; \quad y'' = t \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad y^{(n-1)} = w \quad ,$$

al sistema de n ecuaciones de primer orden

[105-5′] $$y' = z \quad ; \quad z' = t \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad v' = w \quad ; \quad w' = \mathrm{f}(x, y, z, \ldots, w).$$

Esta observación trivial es muy útil, pues con ella toda propiedad relativa a un sistema

[105-6] $$y' = \mathrm{f}_1(x, y, \ldots, w) \,; \quad \ldots \,; \quad w' = \mathrm{f}_n(x, y, z, \ldots, w),$$

particularizada al sistema especial [105-5′] se traduce en una propiedad de la ecuación de orden n [105-4].

Veremos en § 105-3 cómo el teorema de existencia y unicidad se generaliza para sistemas de la forma [105-6], llamados *normales* por aparecer la derivada de cada función incógnita en función de éstas y de la variable independiente. Este resultado se aplica en § 105-4 a una ecuación de orden n [105-4] en forma *normal*, o sea, resuelta en la derivada de orden mayor.

3. Teorema de existencia y unicidad para sistemas. — El teorema de existencia y unicidad para una ecuación de primer orden (§ 104-4, a) se generaliza para un sistema normal [105-6]. Para ello es conveniente la siguiente definición: *Diremos que la función* $\mathrm{f}(x, y, z, \ldots, w)$ *verifica la condición de* LIPSCHITZ *respecto de las variables* $y, z, \ldots, w$, *en un dominio* D *del espacio* $(x, y, z, \ldots, w)$, *si existe un número* $\mathrm{K} > 0$ *tal que para cada dos puntos de* D *con igual abscisa* x, *se tenga:*

[105-7] $$|\mathrm{f}(x, y, z, \ldots, w) - \mathrm{f}(x, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \ldots, \mathrm{W})| \leqslant \leqslant \mathrm{K}(|y - \mathrm{Y}| + |z - \mathrm{Z}| + \ldots + |w - \mathrm{W}|).$$

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD. — *Si las funciones* $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_n$, de [105-6], *cumplen en un dominio* D, *cerrado, acotado y convexo, las siguientes condiciones:*

α_1) *Son continuas y por tanto acotadas, en* D;

α_2) *Verifican la condición de* LIPSCHITZ [105-7];

entonces, por cada punto $(x_0, y_0, z_0, \ldots, w_0)$ *interior a* D, *pasa una y sólo una "curva integral" del sistema* [105-6], *dada por* n *funciones*

[105-8] $y = F_1(x) \quad ; \quad z = F_2(x) \quad ; \quad \quad ; \quad w = F_n(x)$,

tales que

[105-8₀] $y_0 = F_1(x_0) \quad ; \quad z_0 = F_2(x_0) \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad w_0 = F_n(x_0)$.

La demostración se hace como en el caso de una ecuación de primer orden, por generalización de los teoremas de § 104-4, lo que no ofrece dificultades.

El conjunto de funciones [105-8] constituye *una* solución del sistema, la que resulta unívocamente determinada por las *condiciones iniciales* [105-8₀].

También se generalizan fácilmente a sistemas normales de primer orden, los teoremas sobre dependencia respecto de las condiciones iniciales (§ 104-5 y § 104, ej. 7). Ver, por ejemplo, VALLÉE POUSSIN (citado en cap. VI, nota VI, 4), vol. II; 6ª ed., pág. 144 a 149.

4. **Aplicación a las ecuaciones de orden** n. — Referida al sistema [105-5′], la existencia y unicidad de la solución [105-8] que pasa por un punto $(x_0, y_0, z_0, \ldots, w_0)$, se demuestra en virtud de las sustituciones [105-5] el siguiente teorema:

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD. — *Si la función* $f(x, y, z, \ldots, w)$ *cumple las condiciones* α_1 *y* α_2 *del teorema de* § 105-3 *en un dominio* D, *cerrado, acotado y convexo, entonces existe y es única la solución de la ecuación normal* [105-4]:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \quad ,$$

que verifique las condiciones iniciales:

[105-9] $y = y_0 \quad ; \quad y' = z_0 \quad ; \quad \quad ; \quad y^{(n-1)} = w_0 \quad ,$

para $x = x_0$.

Como vemos, deben imponerse n condiciones iniciales, para determinar la curva integral, al prefijar los valores de la función y de sus $n - 1$ primeras derivadas en un punto. Con estas n condiciones iniciales se determinan las n constantes de la *solución general* [105-2ₙ], obteniéndose así una *solución particular*.

EJEMPLO. Si se conoce la aceleración de un punto de función del tiempo $s'' = a(t)$, no queda determinada la ley del movimiento, pero sí, dando además la posición s_0 y la velocidad v_0 del punto, en el instante inicial $t = 0$, pues resulta:

$$s = \int_0^t dt \int_0^t a(t)\, dt + v_0 t + s_0.$$

EJERCICIOS

1. Ecuaciones diferenciales de las familias con tres parámetros: *a*) Parábolas de eje "vertical": $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$; *b*) Parábolas de eje "horizontal": $(y - C_1)^2 = 2C_2(x - C_3)$.

2. Hallar la ecuación diferencial de todas las circunferencias de radio 1 e interpretarla geométricamente.

3. Ecuación diferencial: 1º) De las circunferencias $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; 2º) De las cónicas homofocales

$$\frac{x^2}{a^2 + c} + \frac{y^2}{b^2 + c} = 1$$

(a y b constantes, c parámetro).

4. Siendo $y = ax + b \pm \sqrt{px^2 + 2qx + r}$ la ecuación general de las cónicas, probar que su ecuación diferencial es $(y''^{-2/3})''' = 0$, y que para las parábolas ($p = 0$), la ecuación se reduce al cuarto orden: $(y''^{-2/3})'' = 0$.

§ 106. TIPOS ESPECIALES. INTEGRACIÓN O REDUCCIÓN

1. Ecuaciones donde falta la función o la variable. — *a*) *Falta* y. — La ecuación de orden n:

[106-1] $$\varphi(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

donde falta la función incógnita y, se transforma en otra de orden $n - 1$ en la nueva función incógnita $y' = p$:

[106-2] $$\varphi(x, p, p', \ldots, p^{(n-1)}) = 0.$$

Si puede integrarse esta ecuación de orden menor, se obtiene una relación

[106-3] $$\Omega(x, p) = 0$$

[integral $(n - 1)$-ésima de [106-1], § 105-1, nota 3], que por ser $p = y'$ es una ecuación de primer orden donde falta y (§ 102-2, *a*), que integrada resuelve el problema.

EJEMPLOS: 1. $y'' + y' . \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x = 0$. La ecuación en p es lineal de primer orden, y tiene por solución (§ 101-4):

$$p = C_1 \cos x - \cos^2 x.$$

De aquí resulta:

$$y = \int p dx = C_1 \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C_2.$$

2. *Problema "de la lluvia"*. Hallar la ley del movimiento de una gota (de masa m) que cae desde el reposo, suponiendo que la resistencia del aire sea proporcional a la velocidad.

Sobre la gota actúa la fuerza $m . g$ hacia abajo (sentido en que medimos el espacio s) y una fuerza $kv = ks'$ hacia arriba. La ecuación de la dinámica nos da

$$ms'' = mg - ks',$$

ecuación donde no figura s. Poniendo $k/m = h$ y tomando $s' = v$ como función incógnita resulta

$$\frac{dv}{dt} = g - hv \quad ,$$

ecuación de variables separables que da $g - hv = Ke^{-ht}$.

Para $t = 0$ es $v = 0$ $\therefore$ $K = g$, y se tiene

[106-4] $$v = \frac{ds}{dt} = \frac{g}{h}(1 - e^{-ht}).$$

Separando nuevamente las variables se obtiene:

$$s = \frac{g}{h}\left(t + \frac{1}{h}e^{-ht}\right) + C_2.$$

Para $t = 0$ es $s = 0$ $\therefore$ $C_2 = -g/h^2$, y entonces:

[106-5] $$s = \frac{g}{h}\left[t - \frac{1}{h}(1 - e^{-ht})\right].$$

Para t muy grande [106-4] y [106-5] nos dan, despreciando los términos en e^{-ht}:

$$v = \frac{g}{h} \quad ; \quad s = \frac{g}{h}\left(t - \frac{1}{h}\right).$$

Más generalmente, la ecuación

[106-6] $$\varphi(x, y^{(r)}, y^{(r+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

donde faltan $y, y', \ldots, y^{(r-1)}$, se transforma en otra de orden $n - r$ en la nueva función-incógnita $y^{(r)} = z$:

[106-7] $$\varphi(x, z, z', \ldots, z^{(n-r)}) = 0.$$

Si ésta puede **integrarse** (por ejemplo si $r = n - 1$ y [106-7] es de uno de los tipos estudiados en § 101 ó 102), da:

[106-8] $$\Omega(x, z) = 0 \quad ,$$

y si de aquí es posible despejar $z = y^{(r)}$, la ecuación

[106-9] $$y^{(r)} = g(x)$$

se integra por r cuadraturas:

[106-10] $$y = \int dx \int dx \int \ldots \int g(x)\,dx.$$

NOTAS: 1. Si [106-8] se resuelve en x, así: $x = h(z)$, se tiene también la solución con r cuadraturas:

$$y^{(r-1)} = \int z h'(z)\,dz \quad , \quad y^{(r-2)} = \int h'(z)\,dz \int z h'(z)\,dz \quad ; \quad \ldots \quad ;$$
$$y = \int\int \ldots \int z(dx)^r = \int\int \ldots \int z[h'(z)\,dz]^r \quad ;$$

donde la notación usada en el último miembro indica que el factor $h'(z)$ figura en cada una de las r integrales sucesivas; otro tanto ocurre si la relación [106-8] se expresa en forma paramétrica: $x = x(t)$, $z = z(t)$:

$$y = \int\int \ldots \int z(dx)^r = \int\int \ldots \int z(t)[x'(t)\,dt]^r.$$

Obsérvese que por la significación dada a los terceros miembros de las dos últimas relaciones, el exponente r no puede distribuirse sobre cada factor, así:

$$\int\int z[z\,dz]^2 \equiv \int z\,dz \int z \cdot z\,dz = \frac{z^5}{15} \neq \int\int z \cdot z^2 (dz)^2 = \int dz \int z^3 dz = \frac{z^5}{20}$$

2. La ecuación [106-9] puede integrarse con una sola cuadratura. En efecto, aplicando la fórmula de TAYLOR con la forma integral [51-14] del término complementario [con $f(x)=y$, $n=r-1$, $x_0=a$, $x-x_0=h$] se obtiene la siguiente expresión de la solución de [106-9] tal que $y=y_0$, $y'=y'_0, \ldots, y_0^{(r-1)}=y_0^{(r-1)}$ para $x=x_0$ (cfr. § 86-2, ej. 4):

[106-11] $$y = P(x) + \frac{1}{(r-1)!}\int_{x_0}^{x} g(\xi)(x-\xi)^{r-1}\,d\xi \quad ,$$

con

$$P(x) = y_0 + (x-x_0)y'_0 + \ldots + \frac{(x-x_0)^{r-1}}{(r-1)!}\,y_0^{(n-1)}.$$

Análogamente se consideran los casos tratados en la nota 1, pues vale la siguiente expresión general de la integral reiterada:

[106-12] $$\int\int\ldots\int z(t)\,[x'(t)\,dt]^r = P[x(t)] + \frac{1}{(r-1)!}\int_{t_0}[x(t)-x(\tau)]^{r-1}z(\tau)\,x'(\tau)\,d\tau \quad ,$$

obtenida de [106-11] con el cambio de variables

$$g[x(t)] = z(t) \quad ; \quad \xi = x(\tau) \quad ; \quad g(\xi) = z(\tau) \quad ; \quad x_0 = x(t_0).$$

Si [106-8] representa una curva unicursal (§ 52-2, *b*), basta la integración de una función racional (§ 52-1).

3. *Primitivas y derivadas de orden real.* Por ser [106-11] solución de [106-9], la función

[106-13] $$F(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{x_0}^{x} g(\tau)(x-\tau)^{r-1}\,d\tau \quad , \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$$

tiene derivada r-ésima coincidente con $g(x)$, si $g(x)$ es continua en $[x_0, x_1]$, y puede considerarse entonces como una *primitiva de orden r* de $g(x)$. Mas generalmente, se tiene la definición de RIEMANN - LIOUVILLE de *primitiva de orden real* $r > 0$ de $g(x)$ por la expresión

[106-14] $$D^{-r}g(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_{x_0}^{x} g(\tau)(x-\tau)^{r-1}\,d\tau \quad , \quad (r > 0 \text{ real}) \quad ,$$

donde $\Gamma(r)$ se refiere a la función Gamma (Cap. XXIX, nota VII).

La **derivada de orden real** $\alpha > 0$ se define como la derivada de orden (entero) $m = [\alpha]+1$, de la integral de orden $1+[\alpha]-\alpha$, $(0 < \beta = m-\alpha \leqslant 1)$. Así resulta

[106-15] $$D^{\alpha}g(x) = D^{m}D^{-\beta}g(x) = \frac{d^m}{dx^m}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{x_0}^{x} g(\xi)(x-\xi)^{\beta-1}\,d\xi.$$

Si existe continua la derivada $g^{(m)}(x)$, la conmutación de ambos procesos daría

[106-16] $$D^{\alpha}g(x) = D^{-\beta}D^{m}g(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{x_0}^{x} g^{(m)}(\xi)(x-\xi)^{\beta-1}\,d\xi.$$

Empleando las fórmulas de la función Gamma (Cap. XXIX, nota VII), si $g(x)$ tiene derivadas ordinarias continuas de orden suficientemente elevado, se prueba que para α y r reales arbitrarios es

[106-17] $$D^{r}D^{\alpha}g(x) = D^{\alpha}D^{r}g(x).$$

Estas derivadas fueron utilizadas por RIEMANN (1847) al desarrollar una función del tipo $a_0 + a_1x^h + a_2x^{h+1} + \ldots$, con $h > 0$ real.

F. E. HERRERA (Revista de la Fac. de C. Exactas y Tecnología, Tucumán; Serie A, 9, págs. 79-85; 1952), ha estudiado la generalización del

teorema fundamental del Cálculo integral (§ 35-3) a la derivación de orden α real cualquiera.

b) Falta x. — La ecuación

$$[106\text{-}18] \qquad \varphi(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

donde no figura la variable independiente x, se reduce a otra de orden $n - 1$, tomando $p = y'$ como función incógnita e y como variable independiente, pero ahora habrá que transformar $y'' = dp/dx$, $y''' = d^2p/dx^2$, ..., de modo que tampoco en ellas aparezca x:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p \quad ;$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\, y'' = \frac{d}{dy}\left(p \cdot \frac{dp}{dy}\right) \cdot p = p^2 \frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \; ; \quad \text{etc.}$$

Reemplazando en [106-18] se obtiene

$$[106\text{-}19] \qquad \Psi\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0 .$$

Si se puede integrar esta ecuación, la relación así obtenida

$$\Omega(y, p) = 0$$

es una ecuación de primer orden donde falta x (§ 102-2, *a*) que integrada resuelve el problema.

EJEMPLOS: 3. Solución particular de $y'' = e^y$, tal que $y = 0$, $y' = \sqrt{2}$, para $x = 0$.

La ecuación en p es:

$$\frac{dp}{dy} \cdot p = e^y \quad ,$$

y da $\frac{1}{2}p^2 = e^y + C_1$, siendo $C_1 = 0$ por la segunda condición inicial. La ecuación $dy/dx = \sqrt{2}e^{y/2}$, con la primera condición inicial, da

$$x = \sqrt{2}(1 - e^{-y/2}) .$$

4. La ecuación diferencial del movimiento de un punto atraído por otro con fuerza proporcional a la distancia (fuerza elástica) es:

$$s'' = -k^2 s .$$

Poniendo

$$s' = v \quad , \quad s'' = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v\,\frac{dv}{ds} \quad .$$

resulta:

$$v dv = -k^2 s ds \quad ,$$

$$\therefore \quad v^2 = -k^2 s^2 + (kC_1)^2 \quad ,$$

pues se puede dar esa forma a la constante; y esta ecuación puede escribirse así:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = k^2(C_1^2 - s^2) \quad \therefore \quad k dt = \frac{ds}{\sqrt{C_1^2 - s^2}}$$

$$\therefore \quad kt + C_2 = \operatorname{arc\,sen} \frac{s}{C_1} \quad ,$$

con lo que resulta la solución general

$$s = C_1 \operatorname{sen}(kt + C_2).$$

A este mismo resultado llegaremos por otro camino en § 108-1, a_2, (cfr. § 108-2).

La amplitud y fase inicial del movimiento vibratorio armónico se determinan conociendo la posición y velocidad iniciales del punto.

5. *Curvas cuyo radio de curvatura* $\varrho = (1 + y'^2)^{3/2}/y''$ *es proporcional al segmento normal* $n = y\sqrt{1 + y'^2}$.

La condición $\varrho = kn$ da la ecuación donde falta x:

[106-20] $$y'' = (1 + y'^2)\,/\,(ky).$$

La ecuación en p puede llevarse a la forma

$$\frac{dp^2}{dy} - \frac{2}{ky}p^2 = \frac{2}{ky},$$

y es entonces lineal en $p^2 = q(y)$, siendo su solución general:

$$q = C_1 y^{2/k} - 1.$$

Se tiene entonces $y' = (C_1 y^{2/k} - 1)^{\frac{1}{2}}$, de donde:

$$x = \int (C_1 y^{2/k} - 1)^{-\frac{1}{2}} dy + C_2.$$

La integración puede hacerse para k entero (§ 52-2, f), por ejemplo, $k = \pm 1$, $k = \pm 2$. Resulta $q = (k - 2)/2$, $p + q = (k - 3)/2$, diferencial binomia.

Si el segmento normal coincide con el radio de curvatura es $k = -1$ (pues entonces es por [106-20] $yy'' < 0$ y la curva es cóncava hacia el eje x). En tal caso:

$$x = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 - y^2}} + C_2 = -\sqrt{C_1 - y^2} + C_2 ,$$

o sea $(x - C_2)^2 + y^2 = C_1$, circunferencias con centro en el eje x.

Si $k = 1$ resulta una catenaria (§ 29-1), pues poniendo $C_1 = 1/\alpha^2$

$$x = \int \frac{\alpha\,dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2}} + C_2 = \alpha \operatorname{arg\,ch} \frac{y}{\alpha} + C_2$$

$$\therefore \quad y = \alpha \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{\alpha}.$$

Para los casos $k = \pm 2$, ver ejercicio 13 y respuesta.

NOTA 4. Si en $f(x, y, y')$ figura uno solo de los argumentos, la ecuación de segundo orden $y'' = f(x, y, y')$ se integra por cuadraturas:

α) $y'' = g(x)$ es un caso particular de [106-9].

β) De $y'' = g(y)$ resulta multiplicando por y':

$$\tfrac{1}{2}(y'^2)' = g(y)y' \quad \therefore \quad \tfrac{1}{2}y'^2 = g(y)dy = h(y), \text{ etc.}$$

γ) De $y'' = g(y')$ se obtiene la solución en forma paramétrica:

$$x = \int \frac{dp}{g(p)} + C_1 \quad , \quad y = \int \frac{p\,dp}{g(p)} + C_2.$$

2. **Ecuación diferencial de la línea elástica.** — *a) Solución exacta.* — Se admite en la teoría de la elasticidad que en una viga de sección constante, e inicialmente horizontal, sometida a cargas verticales, la fibra que pasa por el centro de gravedad de la sección carece de tensiones, y que la curvatura $c_1(x)$ que adopta en cada punto, es proporcional al momento flector

M(x) en dicho punto, e inversamente proporcional al momento de inercia I de la sección. Es decir, la curvatura viene expresada así:

$$[106\text{-}21] \qquad c_1(x) = \frac{1}{EI} \cdot M(x) = k \cdot M(x)$$

siendo E el módulo de elasticidad del material.

Recuérdese que el momento flector en un punto, es el momento elástico respecto de un plano vertical que pase por él, de las cargas y reacciones a uno u otro lado del punto.

La ecuación [106-21], que expresa que la curvatura $c_1(x) = y''/(1+y'^2)^{3/2}$ es una función dada de la abscisa: $k \cdot M(x) = f(x)$, es del tipo estudiado en § 106-1, *a* (falta *y*). La ecuación en $p = y'$ es, separadas las variables,

$$\frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = f(x)dx.$$

Para integrarla ponemos $p = \operatorname{tg} t$

$$1 + p^2 = 1/\cos^2 t \quad ; \quad dp = dt/\cos^2 t$$

y la ecuación se reduce a: $\cos t dt = f(x) . dx$.

Integrando resulta: $\operatorname{sen} t = \int f(x) dx + C_1 = \varphi(x)$.

Despejando p, por ser $p = \operatorname{tg} t = \operatorname{sen} t/\cos t$, resulta en definitiva:

$$p = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1 - \varphi(x)^2}} \quad ,$$

y entonces

$$[106\text{-}22] \qquad y = \int p dx = \int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}} dx + C_2$$

que es la ecuación exacta de la *línea elástica*, pero cuya integración sólo se podrá hacer elementalmente en casos muy especiales.

EJEMPLO 1. Cuando $f(x) = \text{constante} = 1/r$, y suponiendo $C_1 = 0$, resulta

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2} + C_2 \quad ; \quad (y - C_2)^2 + x^2 = r^2 \quad ,$$

que es una circunferencia de radio r, como era de esperar.

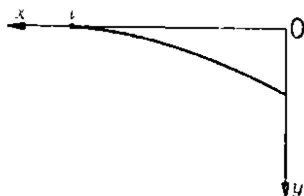


Fig. 351.

NOTA 1. Llamaremos *línea elástica mensular* a la forma de equilibrio de una lámina elástica, de peso despreciable, empotrada en un extremo y con un peso en el otro. Si el peso $2a$ está en $x = 0$ (fig. 351), es $f(x) = 2ax$, $\varphi(x) =$

$= ax^2 + C_1$. La integral [106-22] no puede expresarse, en este caso, elementalmente en forma finita, y depende de funciones elípticas § 55-4, *b*).

b) *Solución aproximada.* — Si la curvatura es pequeña, caso el más frecuente, es decir, si la línea elástica difiere poco de la recta horizontal, puede suponerse $y' = 0$, y tomarse y'' como valor aproximado de la curvatura (§ 55-5).

La ecuación que caracteriza la línea elástica es entonces:

[106-23] $$y'' = k \,.\, \mathrm{M}(x) = \mathrm{f}(x) \quad ,$$

de donde:

$$y' = \int \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x + \mathrm{C}_1 = \varphi(x) \quad ; \quad y = \int \varphi(x)\mathrm{d}x + \mathrm{C}_2 .$$

EJEMPLO 2. Para la línea elástica mensular (nota 1), se tiene como solución aproximada la parábola cúbica

$$y = (a/3)x^3 + \mathrm{C}_1 x + \mathrm{C}_2 .$$

Si la viga está empotrada horizontalmente en un extremo de abscisa l (fig. 349) es $y = y' = 0$, para $x = l$, y determinando C_1 y C_2 resulta

$$y = (a/3)(x^3 - 3l^2x + 2l^3).$$

NOTA 2. Llamemos $\mathrm{p}(x)$ a la *densidad lineal de carga*, llamada también *coeficiente de carga* o *carga unitaria*, es decir, al límite para $h \to 0$ de la carga en el intervalo $(x, x+h)$, dividida por h. La carga total en el intervalo $(0, x)$ será

[106-24] $$\gamma(x) = \int_0^x \mathrm{p}(t)\mathrm{d}t \quad ,$$

a la que se le añade como constante de integración la reacción en $x = 0$, si el punto no es libre, para obtener el llamado *esfuerzo cortante*.

El momento respecto del plano vertical, de abscisa x, es

$$\mathrm{M}(x) = \int_0^x \mathrm{p}(t)(x - t)\mathrm{d}t \quad ,$$

o lo que es lo mismo (§ 106-1, nota 2)

[106-25] $$\mathrm{M}(x) = \int_0^x \gamma(u)\mathrm{d}u \quad ,$$

donde debe agregarse como constante de integración el momento de la reacción a la izquierda de $x = 0$.

De [106-25] y [106-24] resulta sucesivamente

$$\mathrm{M}''(x) = \gamma'(x) = \mathrm{p}(x) \quad ,$$

y se tiene por [106-23] la ecuación diferencial aproximada, en la forma:

[106-26] $$y^{\mathrm{IV}} = k\mathrm{p}(x).$$

3. **Ecuaciones en dos derivadas.** — *a*) *Derivadas consecutivas.* — La ecuación

[106-27] $$y^{(n)} = \mathrm{f}(y^{(n-1)})$$

se integra por *dos* cuadraturas, haciendo $y^{(n-1)} = z$.

En efecto, la ecuación $z' = f(z)$ se integra por una cuadratura, dando $x = \varphi(z)$, y a su vez $x = \varphi(y^{(n-1)})$, puede integrarse mediante una cuadratura (§ 106-1, notas 1 y 2).

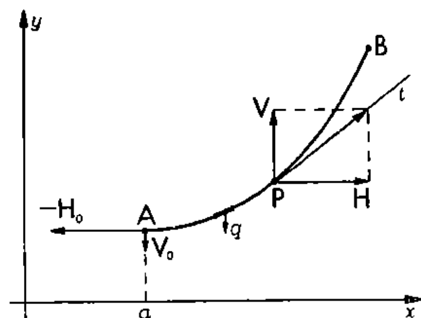


Fig. 352.

EJEMPLO 1. *Cable suspendido.* Se trata de hallar la forma que toma por acción de la gravedad, un cable flexible e inextensible, de sección constante, con sus extremos fijos en dos puntos A y B.

Sea $y = f(x)$ la escuación "del cable" y $P(x, y)$ un punto cualquiera de él (fig. 352). Las fuerzas que actúan sobre el arco AP son las de los extremos (marcadas en los extremos mediante sus componentes horizontales y verticales) y el peso del arco AP. Como deben estar en equilibrio tendremos, llamando $-q$ al peso de la unidad de longitud:

$$H = H_0 \quad ; \quad V = V_0 + q\int_a^x ds = V_0 + q\int_a^x \sqrt{1 + y'^2(u)}\,du.$$

Escribiendo que la tangente en P tiene la dirección de la resultante $H + V$ se obtiene, poniendo $-q/H = -k$:

$$y'(x) = \frac{V_0}{H} + k\int_a^x \sqrt{1 + y'^2(u)}\,du.$$

Derivando se tiene, por ser $y'(u)$ una función continua (§ 50-1, *a*),

$$y''(x) = k\sqrt{1 + y'^2(x)}.$$

La ecuación en $z = p = y'$, es

$$\frac{dp}{dx} = k\sqrt{1 + p^2} \quad , \quad \therefore \quad \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = k\,dx \quad ,$$

de donde

$$\operatorname{arg\,sh} p = kx + kC_1 \quad , \quad p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{sh}\{k(x + C_1)\} \quad ,$$

e integrando nuevamente:

[106-28] $$y = \frac{1}{k}\operatorname{ch}\{k(x + C_1)\} + C_2.$$

De aquí el nombre de *catenaria* dado a la gráfica de la función ch (§ 29-1); [106-28] representa una familia de catenarias obtenidas por traslación de una de ellas.

NOTA. Si $y = F(x)$ es una curva integral de una ecuación que no contenga ni x ni y, sino sólo derivadas, lo es también toda curva $y - C_2 = f(x - C_1)$ obtenida por traslación.

b) Derivadas cuyos órdenes difieren en 2. — La ecuación

[106-29] $$y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$$

se integra por *tres* cuadraturas, haciendo $y^{(n-2)} = z$.

En efecto, la ecuación $z''=f(z)$ se integra por dos cuadraturas (§ 106-1, nota 4, *b*), dando $x=\varphi(z)$, y a su vez $x=\varphi(y^{(n-2)})$ puede integrarse mediante una cuadratura (§ 106-1, notas 1 y 2).

EJEMPLO 2. La ecuación $y''=1/y^3$ tiene la integral primera

$$y'^2 = 2\int dy/y^3 = C_1 - (1/y^2)$$

que a su vez da, por separación de variables,

$$x = [\sqrt{C_1y^2-1}/C_1] + C_2 \quad ,$$

o sea, las hipérbolas ($C_1 \leqslant 0$ no da curva real)

$$C_1^2(x-C_2)^2 = C_1y^2 - 1 .$$

4. **Ecuaciones homogéneas.** — Se puede disminuir en una unidad el orden de una ecuación diferencial cuando se presentan diversos casos de homogeneidad.

a) *Ecuación homogénea en* y *y sus derivadas.* — Se toma como función incógnita $u=y'/y$ dando

$$y' = uy \quad ; \quad y'' = y(u^2+u') \quad ; \quad y''' = y(u^3+3uu'+u'') \quad ,$$

y al poder escribir la ecuación diferencial en la forma

[106-30] $$\varphi\left(x\ ,\ \frac{y'}{y}\ ,\ \frac{y''}{y}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0 \quad ,$$

se convierte en

$$\varphi(x,\ u,\ u^2+u',\ u^3+3uu'+u'',\ \dots) = 0$$

de orden $n-1$ en u. Resuelta ésta, se obtiene $y=Ce^z$, siendo $z=\int u du$.

EJEMPLO. $yy''+e^{2x}y'^2+yy'\cos x=0$.
Haciendo $y=e^z$ se tiene para $z'=u$ la ecuación de BERNOULLI (§ 101-5, *a*),

$$u' + (1+e^{2x})u^2 + u\cos x = 0 \quad ,$$

que da

$$\frac{1}{u} = -e^{\operatorname{sen} x}\int(1+e^{2x})e^{-\operatorname{sen} x}dx + C_1e^{\operatorname{sen} x} \quad ,$$

y la solución se expresa por

$$y = C_2e^{\int u(x)\,dx} .$$

NOTA. La ecuación lineal en y y sus derivadas

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

se conduce por el procedimiento indicado en la ecuación de RICCATI (§ 101-5, *b*) en z':

$$\frac{dz'}{dx} + z'^2 + Pz' + Q = 0 .$$

b) *Ecuación homogénea en* x, y, dx, dy, ..., d^ny. — Como la ecuación no cambia sustituyendo x, y por kx, ky para k constante cualquiera, y esta transformación conserva y/x, y', xy'', ..., $x^{n-1}y^{(n)}$, la ecuación debe ser de la forma

[106-31] $$\varphi(y/x,\ y',\ xy'',\ \dots,\ x^{n-1}y^{(n)}) = 0 .$$

Si efectuamos la sustitución

$$x = e^t \quad , \quad y = ux \quad ,$$

es (§ 38-5)

$$y^{(m)} = u^{(m)}x + mu^{(m-1)} \quad ,$$

de donde

$$x^{m-1}y^{(m)} = u^{(m)}x^m + mu^{(m-1)}x^{m-1}.$$

Introduciendo las derivadas respecto de t, designadas con puntos sobre las letras, es:

$$\dot{u} = u'x \quad ; \quad \ddot{u} = u''x^2 + u'x \quad ; \quad \dddot{u} = u'''x^3 + 3u''x^2 + u'x \quad ;$$

y la ecuación se convierte en

$$\varphi(u, \dot{u} + u, \ddot{u} + \dot{u}, \dddot{u} - \dot{u}, \ldots) = 0 \quad ,$$

de orden $n-1$ en la función u con variable independiente t.

c) *Ecuación homogénea en x* y dx. — Como la ecuación no cambia sustituyendo x por kx, es de la forma

[106-32] $$\varphi(y, xy', x^2y'', \ldots, x^ny^{(n)}) = 0.$$

Por el cambio $x = e^t$, se convierte en otra ecuación que no contiene t, de orden $n-1$, con cálculo análogo al *a*.

5. **Simplificación por derivación.** — En ciertos casos es ventajoso aumentar el orden de derivación, porque así se obtiene una ecuación más simple. Este recurso ya se ha aplicado para integrar la ecuación de LAGRANGE (§ 102-3).

La integral general de la ecuación de orden $n+1$ deducida de la dada de orden n, contiene $n+1$ parámetros arbitrarios, y sólo ciertas soluciones de la deducida serán también soluciones de la ecuación propuesta. Si se escribe la verificación de ésta por la solución general de la ecuación de orden $n+1$, se tendrá una relación entre los $n+1$ parámetros.

EJEMPLO. Las proyecciones sobre el plano xy de las líneas de curvatura (§ 76-5, *c*) del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad a > b > c \quad ,$$

cumplen la ecuación diferencial

[106-33] $$\alpha xyy'^2 + (x^2 - \alpha y^2 - \beta)y' - xy = 0 \quad ,$$

$$\alpha = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)} \quad , \quad \beta = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2} .$$

Para integrarla, MONGE la deriva reemplazando en la deducida, el valor de $x^2 - \alpha y^2 - \beta$, obtenido de [106-33] y así llega a

$$(\alpha y'^2 + 1)(xyy'' + xy'^2 - yy'') = 0.$$

Por ser $\alpha > 0$, se ha de resolver la ecuación de segundo orden

$$x(y'^2 + yy'') - yy' = 0 \quad ,$$

con integral primera inmediata $yy' = C_1x$, de donde $y^2 = C_1x^2 + C_2$. Sustituyendo en [106-33], se ve que C_1 y C_2 deben verificar la condición $\alpha C_1C_2 + \beta C_1 + C_2 = 0$. Así, la integral general de [106-33] está formada por las cónicas

$$(y^2 - C_1x^2)(\alpha C_1 + 1) + \beta C_1 = 0.$$

6. **Ecuación de Jacobi** $y'' = f(x, y)$. — Por si el lector observa la ausencia del tipo

[106-34] $$y'' = f(x, y) \quad , \quad (\text{falta } y') \quad ,$$

entre las ecuaciones incompletas de segundo orden, conviene advertir que aún en casos tan simples como

$$y'' = xy \quad , \quad y'' = x^2 y \quad , \quad \ldots \quad ,$$

su integración exige recursos de Análisis superior y resulta y como suma de funciones trascendentes llamadas de BESSEL y de NEUMANN. En cambio es elemental, como veremos, el tipo $y'' = ay +$ polinomio en x.

JACOBI ha demostrado que si se conoce una integral primera de [106-34]

[106-35] $$y' = g(x, y, C_1) \quad ,$$

la integración se completa por cuadraturas.

En efecto, probaremos que $\partial g/\partial C_1$ es un factor integrante (§ 101-7) de la ecuación

$$dy - g dx = 0 \quad ,$$

de modo que la integral general de [106-34] será

[106-36] $$\int \frac{\partial g}{\partial C_1}(dy - g dx) = C_2 .$$

Observemos para ello que toda solución de [106-34] que verifique [106-35] satisface también a

$$y'' = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y' \quad , \quad f(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} g(x, y, C_1) \quad ;$$

y derivando la segunda relación respecto de C_1 se llega a la condición para que $(\partial g/\partial C_1)(dy - g \, . \, dx)$ sea diferencial exacta:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial C_1}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-g \frac{\partial g}{\partial C_1}\right) .$$

EJERCICIOS

1. Resolver: *a*) $y'' = y'^2$; *b*) $y'' + y' \sqrt{y'^2 - 1} = 0$.

2. Probar que la ecuación $y'' + f(x) y'^2 + g(x) y' = 0$ se integra por cuadraturas.

3. Hallar la ecuación diferencial y la ley de velocidades y espacios en el descenso de un paracaidista, si la resistencia del aire es $-kv^2$, proporcional al cuadrado de la velocidad (cfr. § 106-1, ej. 2).

4. Generalizar el problema anterior y el de § 106-1, ejemplo 2, considerando el caso en que la fuerza es $f(e, v)$, función de la posición y de la velocidad.

5. Curvas tales que la proyección del radio de curvatura sobre el eje x es constante.

6. Curva persecutoria del punto M_1 que recorre la recta $x_1 = a$ con velocidad constante, siendo constante e igual a la de M_1 la velocidad del punto perseguidor M que sale del origen cuando M_1 atraviesa el eje x.

7. Resolver con una sola cuadratura (§ 106-1, nota 2):

a) $y'' = \sqrt{x}$ siendo para $x = 1$, $y = y' = 1$;
b) $y'' = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ siendo para $x = \frac{1}{2}\pi$, $y = y' = 0$;
c) $y'' + (1 + x^2)^{-1} = 0$ siendo para $x = 0$, $y = 1$, $y' = 2$;
d) $y^{\mathrm{v}} = 1 - x^3$.

8. *a*) Teniendo en cuenta que (Cap. XXIX, nota VII) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, expresar la derivada de orden $\frac{1}{2}$ (§ 106-1, nota 3) de $f(x)$; *b*) Aplicar a $f(x) = k = \text{const.}$

9. La ecuación en $f(x)$: $D^{-\frac{1}{2}}f(x) = g(x)$ es (ejercicio 8) la llamada *ecuación integral de* ABEL:

$$(\circ) \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}\, d\xi = g(x).$$

Probar que si $g(x)$ tiene derivada continua y se anula en $x = 0$, la solución de (°) es:

$$f(x) = D^{\frac{1}{2}}g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}\, d\xi.$$

10. Resolver:

$a)\quad y'' = y^2$ siendo para $x = 0,\ y = 1,\ y' = \sqrt{2/3}$;

$b)\quad y'' = yy'^2/(1 + y^2)$.

11. Solución general de $y'' = e^y$ (§ 106-1, ejemplo 3).

12. Probar que las ecuaciones

$$y'' + f(y)y'^2 = g(y)y' \quad ; \quad y'' + f(y)y'^2 = g(y) \quad ,$$

se integran por cuadraturas.

13. Estudiar el ejemplo 5 de § 106-1 en los casos $k = \pm 2$.

14. Interpretar geométricamente e integrar: $y'' = (1 + y'^2)^{3/2}$.

15. Integrar: $y^{IV} - \sqrt{y'''} = 0$.

16. Integrar la ecuación homogénea en y y sus derivadas:

$$y'' - (y'^2/y) - (y/x)\operatorname{sen}(y'/y) = 0.$$

17. Ídem: $yy'' + y'^2 = y^2/x^2$.

18. Integrar la ecuación de JACOBI $y'' = (1 + 2\operatorname{tg}^2 x)y$, conociendo la integral primera $y' = y \operatorname{tg} x + C_1 \cos x$.

§ 107. ECUACIONES LINEALES EN GENERAL

1. La ecuación homogénea. Dependencia lineal de las soluciones. — La ecuación de orden n, $[f_0(x) \neq 0]$:

$$[107\text{-}1] \qquad f_0(x)y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = 0 \quad ,$$

lineal en y y sus derivadas, y *homogénea* en ellas, es de uso frecuente en la Matemática y sus aplicaciones.

Supongamos que en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ los coeficientes $f_i(x)$ son funciones continuas y $f_0(x)$ no se anula. Podemos suponer $f_0(x) \equiv 1$ (pues para ello basta dividir por dicho coeficiente), es decir, considerar la ecuación:

$$[107\text{-}2] \qquad y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = 0.$$

Esta ecuación verifica [en todo punto interior a la faja $a \leqslant x \leqslant b$ del plano (x, y)] las condiciones del teorema de existencia y unicidad (§ 105-4). Entonces:

TEOR. 1. *En todo intervalo* $[a, b]$ *de continuidad de los coeficientes* $f_i(x)$, *cada solución* $y = F(x)$ *de* [107-2] *queda unívocamente determinada por las condiciones iniciales*

[107-3] $$F(x_0) = y_0 \quad , \quad F'(x_0) = y'_0 \quad , \quad \quad , \quad F^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}{}_0 \quad ,$$

siendo $a \leqslant x_0 \leqslant b$ é $y_0, y'_0, \ldots, y^{(n-1)}{}_0$ *un sistema arbitrario de números.*

Como $y = 0$ es solución de [107-2], se tiene en particular:

TEOR. 2. *Una solución* $y = F(x)$ *nula en* $x = x_0$ *conjuntamente con sus* $n - 1$ *primeras derivadas, es idénticamente nula*: $F(x) \equiv 0$.

TEOR. 3. *Si* $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ *son soluciones de* [107-2], *lo es también toda combinación lineal de ellas*:

[107-4] $$y = C_1u_1 + C_2u_2 + \ldots + C_ku_k.$$

DEM. Para mayor sencillez (y ya que la demostración es tal cual en el caso general) supongamos que $u(x)$ y $v(x)$ son dos soluciones de

[107-5] $$y'' + f_1y' + f_2y = 0$$

y constatemos que entonces $y = C_1u + C_2v$ también verifica [107-5].

Derivando dos veces, reemplazando en [107-5] y agrupando los términos en C_1 y en C_2 se tiene en efecto:

$$C_1(u'' + f_1u' + f_2u) + C_2(v'' + f_1v' + f_2v) = 0 \quad ,$$

pues ambos paréntesis se anulan por ser u y v soluciones.

Por el teorema 3 las soluciones de [107-2] forman un espacio vectorial lineal (Cap. II, nota III, *b*; Cap. XVII, nota I). Por el teorema 1 cada solución queda determinada por n números $(y_0, y'_0, \ldots, y^{(n-1)}{}_0)$. Demostraremos, en efecto (§ 107-2), que el espacio lineal de las soluciones es de *dimensión n*. Llamando *sistema fundamental de soluciones* a una base $(u_1(x), \ldots, u_n(x))$ del espacio lineal, podremos enunciar el siguiente teorema:

TEOR. 4. *La ecuación* [107-2] *admite un sistema de n soluciones particulares* $u_1(x), \ldots, u_n(x)$, *linealmente independientes* (sistema fundamental de soluciones). *Toda otra solución se expresa como combinación lineal de las anteriores*:

[107-6] $$y = C_1u_1 + C_2u_2 + \ldots + C_nu_n.$$

Entonces [107-6], siendo las C_i constantes arbitrarias, es la solución general, y no hay soluciones singulares.

NOTA. En § 68-4 se ha visto que para la dependencia lineal en $[a, b]$ de las n funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, supuestas derivables hasta el orden $n-1$, era condición *necesaria* la anulación idéntica en $[a, b]$ del *wronskiano*

$$[107\text{-}7] \qquad W(x) = W(x, u_1, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

En cambio esta condición *no es suficiente en general* (§ 68-4, nota 3), a menos que las funciones sean analíticas o se agregue alguna condición suplementaria sobre los adjuntos de W (§ 68-4, teor. 3). También se puede afirmar en general que si $W(x)$ es idénticamente nulo en $[a, b]$, existe un intervalo $[c, d]$ contenido en $[a, b]$ donde las funciones u_1, u_2, ..., u_n son linealmente dependientes. Pues si el wronskiano de p funciones ($p < n$, por ej. $p = n-1$) no es idénticamente nulo, al ser continuo (depende de derivadas continuas al ser $p < n$), se conservará distinto de cero en un intervalo $[c, d]$ contenido en $[a, b]$ y a él podrá aplicarse el criterio anterior (§ 68-4, teor. 3). Si las n funciones resultaren idénticamente nulas, el teorema es nimio.

2. **Determinación de la solución general.** — Para tener n soluciones linealmente independientes de [107-2] basta fijarlas por el teorema 1 de § 107-1, dando en un punto $x = \xi_0$ los elementos de su wronskiano, de modo que éste no se anule en $x = \xi_0$, y aplicar luego el teorema 2 de § 68-4.

Hecho esto,[107-6] es la integral general de la ecuación, y quedará demostrado el teorema 4 de § 107-1. En efecto, se pueden determinar las C_i de modo que $F(x) = \sum C_i u_i$ verifique [107-3]. Esto se hace resolviendo en las C_i el sistema

$$[107\text{-}8] \qquad y_0 = \sum C_i u_i(\xi_0), \quad y'_0 = \sum C_i u'_i(\xi_0) \quad , \quad \ldots \quad , \quad y^{(n-1)}_0 = \sum C_i u^{(n-1)}_i(\xi_0) \quad ,$$

cuyo determinante es $W(\xi_0) \neq 0$ (§ 15-4).

NOTA. Para un sistema fundamental de soluciones, el wronskiano [107-7] es distinto de cero en todo punto del intervalo $[a, b]$ (teor. de LIOUVILLE). Pues si en $x = \xi_0 \varepsilon [a, b]$ fuese $W(\xi_0) = 0$, el sistema

$$[107\text{-}9] \qquad \begin{cases} C_1 u_1(\xi_0) + \ldots + C_n u_n(\xi_0) = 0 \\ C_1 u_1'(\xi_0) + \ldots + C_n u_n'(\xi_0) = 0 \\ \ldots \\ C_1 u_1^{(n-1)}(\xi_0) + \ldots + C_n u_n^{(n-1)}(\xi_0) = 0 \end{cases}$$

tendría solución $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ no nula (§ 15-6, b), y entonces la solución $y = C_1 u_1 + \ldots + C_n u_n$ debería coincidir con la $y \equiv 0$ de las mismas condiciones iniciales (§ 107-1, teor. 2), con lo que u_1, u_2, ..., u_n no formarían un sistema fundamental de soluciones (linealmente independientes).

3. **La ecuación completa. Forma de la solución general.** — TEOR. *La solución general y, de la ecuación lineal completa, o no homogénea*:

$$[107\text{-}10] \qquad y^{(n)} + f_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + f_{n-1} \cdot y' + f_n \cdot y = f(x)$$

se expresa sumando una solución particular z, a la solución general Y *de la ecuación incompleta u homogénea* [107-2]:

$$[107\text{-}11] \qquad y = Y + z .$$

DEM. Derivando n veces [107-11] y reemplazando en [107-10] se obtiene

$$(Y^{(n)} + \ldots + f_n Y) + (z^{(n)} + \ldots + f_n z) = f(x) \quad ,$$

pues en virtud de las hipótesis sobre Y y z, el primer paréntesis se anula y el segundo vale $f(x)$. Luego [107-11] verifica la ecuación [107-10] y es la solución general, pues con $y = F(x) = Y + z$ pueden satisfacerse las condiciones [107-3] determinando los parámetros que figuran en Y.

EJEMPLO. La ecuación lineal de primer orden

$$(x^2 - x)y' + (1 - 2x)y = - x^2$$

se verifica, como puede comprobarse, para $y = x$ é $y = x^2$.

Entonces la solución general en todo intervalo que excluya los puntos $x = 0$, $x = 1$, es

$$y = C(x^2 - x) + x .$$

En efecto, $x^2 - x$ es solución de la ecuación incompleta, y entonces $C(x^2 - x)$ es la solución general de la ecuación incompleta.

4. Integración de la ecuación completa a partir de la solución de la homogénea. — *a) Método de variación de los parámetros* (LAGRANGE, 1774). — Si se conoce la solución general

$$[107\text{-}12] \qquad y = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \ldots + C_n u_n(x) \quad , \quad (C_i \text{ constantes}) \quad ,$$

de la ecuación homogénea [107-2], entonces la solución general de la ecuación completa [107-10] puede obtenerse por cuadraturas reemplazando en [107-12] las *constantes* C_i *por funciones de* x, $G_i = G_i(x)$ a determinar:

$$[107\text{-}13] \quad y = G_1(x)\,u_1(x) + G_2(x)\,u_2(x) + \ldots + G_n(x)\,u_n(x).$$

DEM. Como hay n funciones $G_i(x)$ a determinar y una sola condición [107-10] a verificar, podemos imponer a las G_i otras $n - 1$ condiciones. Sean éstas:

$$[107\text{-}14] \quad \begin{cases} G'_1 . u_1 + G'_2 . u_2 + \ldots + G'_n . u_n = 0 \\ G'_1 . u'_1 + G'_2 . u'_2 + \ldots + G'_n . u'_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G'_1 . u_1^{(n-2)} + G'_2 . u_2^{(n-2)} + \ldots + G'_n . u_n^{(n-2)} = 0 . \end{cases}$$

Se obtiene entonces de [107-13] derivando n veces:

$$\begin{aligned} y' &= \Sigma G'_i u_i + \Sigma G_i u'_i = \Sigma G_i u'_i \\ y'' &= \Sigma G'_i u'_i + \Sigma G_i u''_i = \Sigma G_i u''_i \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)} &= \Sigma G'_i u_i^{(n-2)} + \Sigma G_i u_i^{(n-1)} = \Sigma G_i u_i^{(n-1)} \\ y^{(n)} &= \Sigma G'_i u_i^{(n-1)} + \Sigma G_i u_i^{(n)} \end{aligned}$$

Las expresiones de estas derivadas coinciden con las que se tendrían si las G_i fueran constantes, salvo la primera suma en $y^{(n)}$; si se reemplaza en la ecuación [107-10] a verificar y se tiene en cuenta que las $u_i(x)$ son soluciones de la ecuación homogénea [107-2], queda:

[107-14$_n$] $$G'_1 u_1^{(n-1)} + G'_2 u_2^{(n-1)} + \ldots + G'_n u_n^{(n-1)} = f(x).$$

Las n ecuaciones [107-14] y [107-14$_n$], lineales en las G'_i y con determinante no nulo, por ser el wronskiano de un sistema fundamental de soluciones, tienen solución única:

[107-15] $$G'_1(x), \quad G'_2(x), \quad \ldots, \quad G'_n(x).$$

De aquí se obtienen por cuadraturas:

[107-16] $$G_1(x), \quad G_2(x), \quad \ldots, \quad G_n(x)$$

cada una con una constante aditiva de integración, y así se obtiene la solución de [107-10] en la forma [107-13].

NOTAS: 1. La solución [107-13], así hallada, puede llevarse fácilmente a la forma [107-11] $y = Y + z$, sin más que agrupar los términos en las constantes de integración de las $G_i(x)$.

2. La ecuación diferencial

[107-17] $$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n & y \\ u'_1 & u'_2 & \ldots & u_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & & u_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

tiene el mismo sistema fundamental de soluciones $y = u_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ que la [107-2], y siendo el coeficiente de $y^{(n)}$ el wronskiano $W \neq 0$ en todo $[a, b]$ (§ 107-2, nota), podrá dividirse por él. La ecuación diferencial así obtenida deberá tener coeficientes idénticamente iguales a los de [107-2], pues en otro caso la diferencia de ambas, lineal de orden $< n$, tendría n soluciones linealmente independientes, lo que es absurdo (§ 107-1, teor. 4).

El coeficiente de $y^{(n-1)}$ en [107-17] es $-W'$ (§ 68-4, teor. 1), por lo que deberá ser

[107-18] $$-W'(x)/W(x) = f_1(x) \quad ,$$

es decir

[107-19] $$W(x) = a_0 e^{-\int_{x_0}^{x} f_1(x)\,dx} \quad ,$$

donde a_0 depende del particular sistema fundamental de soluciones considerado. Será $a_0 = W(x_0)$.

Si se designa por $V_i(x)$ el determinante obtenido sustituyendo en W la columna i por $(0, 0, \ldots, 0, f(x))$, la solución del sistema [107-14], [$107\text{-}14_n$] por la regla de CRAMER (§ 15-4) da

$$[107\text{-}20] \qquad G'_i(x) = \frac{V_i}{W} = V_i e^{\int f_1 dx},$$

y en definitiva

$$[107\text{-}21] \qquad G_i(x) = \int_{x_0}^{x} V_i(\alpha) e^{\int_{a_0}^{\alpha} f_1 d\alpha} d\alpha + C_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

3. La integral particular [107-13], mediante [107-21] puede darse en la forma

$$[107\text{-}22] \qquad y = \Sigma u_i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{V_i(\alpha)}{W(\alpha)} d\alpha =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left(\Sigma \frac{V_i(\alpha)}{W(\alpha)} u_i(x) \right) d\alpha = \int_{x_0}^{x} \psi(x, \alpha) d\alpha \quad ,$$

donde $\psi(x, \alpha)$ *es la función obtenida sustituyendo en* [107-12] *los parámetros* C_i *por las soluciones* $G_i'(x)$ *del sistema* [107-14], [$107\text{-}14_n$] *cuando en éste se sustituye* x *por* α.

Obsérvese que el sistema [107-14], [$107\text{-}14_n$] puede escribirse

$$\psi(\alpha, \alpha) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x} \psi(\alpha, \alpha) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(\alpha, \alpha) = 0 \quad ; \quad \quad ;$$

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \psi(\alpha, \alpha) = f(\alpha) \quad ,$$

condiciones que en los casos prácticos ayudan a determinar rápidamente la función $\psi(x, \alpha)$. Este método se debe a CAUCHY, y en realidad es equivalente al de LAGRANGE.

b) Método de la solución fundamental. — Veremos cómo una solución particular de [107-10] puede expresarse explícitamente en términos del segundo miembro $f(x)$, pudiéndose estudiar así su dependencia con respecto a $f(x)$. Nos limitaremos para mayor sencillez a una ecuación de segundo orden:

$$[107\text{-}23] \qquad L(y) = y'' + f_1(x) y' + f_2(x) y = f(x) \quad ,$$

donde indicamos con $L(y)$ la expresión $y'' + f_1 y' + f_2 y$, lineal en y y sus derivadas.

Diremos que $\Gamma(x, \xi)$ es una *solución fundamental* (GRUNDLÖSUNG) de la ecuación homogénea $L(y) = 0$, correspondiente al punto $\xi (a < \xi < b)$, si $\Gamma(x, \xi)$ verifica $L(y) = 0$ en $a \leqslant x \leqslant b$ con excepción de $x = \xi$, donde es continua pero con un salto unidad para la derivada (fig. 353):

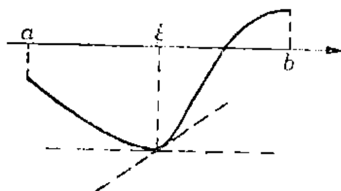


Fig. 353.

$$[107\text{-}24] \qquad \left(\frac{d}{dx} \Gamma(x, \xi) \right)_{x = \xi + 0} - \left(\frac{d}{dx} \Gamma(x, \xi) \right)_{x = \xi - 0} = 1.$$

Si $u_1(x)$, $u_2(x)$ forman un sistema fundamental de soluciones de $L(y) = 0$, una solución fundamental es

[107-25] $$\Gamma(x,\xi) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sg}(x-\xi)\,\frac{u_2(\xi)u_1(x) - u_1(\xi)u_2(x)}{u_2(\xi)u'_1(\xi) - u_1(\xi)u'_2(\xi)}\,.$$

TEOR. *Para toda función continua* $f(x)$, *la función*

[107-26] $$g(x) = \int_a^b \Gamma(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi$$

es solución de la ecuación [107-23].

En efecto, es

$$g'(x) = \int_b^a \frac{d\Gamma(x,\xi)}{dx}\,f(\xi)\,d\xi \quad ,$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x + \int_x^b \frac{d\Gamma(x,\xi)}{dx}\,f(\xi)\,d\xi\right] = \int_a^x \frac{d^2\Gamma(x,\xi)}{dx^2}\,f(\xi)\,d\xi\ +$$

$$+\left(\frac{d\Gamma(x,\xi)}{dx}\right)_{\xi = x-0} f(x) + \int_x^b \frac{d^2\Gamma(x,\xi)}{dx^2}\,f(\xi)\,d\xi - \left(\frac{d\Gamma(x,\xi)}{dx}\right)_{\xi = x-0} f(x) =$$

$$= \int_a^b \frac{d^2\Gamma(x,\xi)}{dx^2}\,f(\xi)\,d\xi + f(x)\left[\left(\frac{d\Gamma}{dx}\right)_{\xi = x-0} - \left(\frac{d\Gamma}{dx}\right)_{\xi = x+0}\right] ,$$

y como el paréntesis cuadrado es igual al primer miembro de [107-24], y por tanto a 1, $\left[\text{pues}\left(\quad\right)_{\xi = x\mp 0} = \left(\quad\right)_{x = \xi\pm 0}\right]$ se tiene reemplazando en [107-23]: $L(g(x)) = f(x)$.

5. **Reducción mediante una solución de la ecuación homogénea.** — *a*) *Si se conoce una solución particular* $u = u(x)$ *de la ecuación lineal homogénea* [107-2], *poniendo*

[107-27] $$y = u\,.\,w$$

la ecuación completa [107-10] *conduce a una ecuación lineal de orden* $n-1$ *en* $w' = dw/dx$.

DEM. Nos limitaremos a una ecuación de segundo orden [107-23], suponiendo entonces que $L(u) = 0$. De [107-27] resulta

$$y' = uw' + u'w \quad , \quad y'' = uw'' + 2u'w' + u''w \quad ,$$

y reemplazando en [107-23] se obtiene por ser $L(u) = 0$:

[107-28] $$uw'' + (2u' + f_1u)w' = f(x)$$

ecuación lineal de *primer* orden en w'.

b) En el caso de una ecuación de *segundo* orden, considerado en la demostración anterior, la ecuación [107-28] que resulta, por ser lineal de primer orden en $w' = v$, puede resolverse por cuadraturas (§ 101-4) en v, y entonces resulta w mediante una nueva cuadratura

$$w = \int_a^x v(t)\,dt + C_2 .$$

Ejemplo. Verificar que $y = x$ es solución de

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0 \quad ,$$

y hallar la solución general.

Poniendo $y = xw$, resulta la ecuación en $w' = v$:

$$x(x-1)v' + (2x - x^2 - 2)v = 0 \quad ,$$

cuya solución es $v = C_1 e^x (x-1)/x^2$, y entonces:

$$w = C_1 \int_1^x \frac{t-1}{t^2} e^t dt + C_0 = C_1 \left[\int_1^x \frac{e^t}{t} dt + \int_1^x e^t dt^{-1} \right] + C_0 =$$

$$= C_1 \left(\frac{e^x}{x} - e \right) + C_0 = C_1 \frac{e^x}{x} + C_2 \quad ,$$

con lo que $y = C_1 e^x + C_2 x$. (Cfr. ejercicio 3).

6. Método de desarrollo en serie. — Los métodos de coeficientes indeterminados, o de aplicación de la serie de Taylor, vistos en § 104-1 para la resolución por series de ecuaciones de primer orden, se aplican también a las de orden mayor, y resultan especialmente indicados para las ecuaciones lineales, sobre todo si los coeficientes son funciones racionales de x (cfr. § 104-1, nota 2).

a) Coeficientes indeterminados. — Si la solución puede expresarse en serie de potencias

[107-29] $$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots \quad ,$$

al derivar y sustituir en la ecuación diferencial de orden n, se obtienen por igualación de coeficientes, condiciones para determinar los coeficientes de [107-29] a partir de n de ellos, que pueden fijarse arbitrariamente, y así resulta la solución general, con n constantes arbitrarias.

Nota 1. Sobre la justificación de este procedimiento, confrontar § 104-1, nota 1.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación lineal (cfr. § 106-6)

[107-30] $$y'' - xy = 0 \quad \text{ó} \quad y'' = xy.$$

Pongamos

[107-31] $$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

con coeficientes a determinar. En virtud de la ecuación diferencial se tiene

$$2a_2 + 3.2a_3 x + 4.3a_4 x^2 + \dots = a_0 x + a_1 x^2 + \dots \quad ,$$

$$2a_2 = 0 \quad ; \quad 3.2a_3 = a_0 \quad ; \quad 4.3a_4 = a_1 \quad ; \quad 5.4a_5 = a_2 \quad ; \quad \dots \quad .$$

Entonces $a_2 = a_5 = a_8 = a_{11} = \dots = 0$ y los demás coeficientes pueden expresarse en base a a_0 y a_1 obteniéndose

[107-32] $$y = a_0 \left(1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} + \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9} + \dots \right) +$$

$$+ a_1 \left(x + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.6.7} + \frac{x^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \dots \right).$$

Esta expresión es de la forma $y = a_0 u + a_1 v$. Las funciones $u(x)$ y $v(x)$ no son de las que ya conocíamos, pero están perfectamente definidas por las series, y sus valores pueden calcularse tan perfectamente como los de $\operatorname{sen} x$ y x^n.

NOTA 2. Sólo en casos excepcionales la solución de una ecuación lineal con coeficientes variables, de orden 2 ó mayor, se podrá expresar mediante funciones elementales. Por el contrario, ciertos tipos de ecuaciones diferenciales definen ciertas clases de *nuevas funciones*, y resolver tales ecuaciones significa estudiar el comportamiento y propiedades de las correspondientes funciones especiales (muchas de las cuales, como las de BESSEL, ver nota I, son de gran importancia en problemas de física e ingeniería), y en particular, expresarlas mediante series u otros algoritmos indefinidos.

b) Uso de la fórmula de TAYLOR. — El desarrollo de la solución puede obtenerse cuando existe (nota 1) escribiéndolo en la forma de serie de TAYLOR

[107-33] $$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + (y''_0/2!)(x - x_0)^2 + \\ + (y'''_0/3!)(x - x_0)^3 + \ldots$$

y calculando los coeficientes a partir de valores arbitrariamente prefijados a $y_0, y'_0, \ldots, y^{(n-1)}_0$, mediante la ecuación diferencial de orden n.

EJEMPLO 2. De la ecuación $y'' = xy$ del ejemplo 1 resulta

$$y^{(n)} = (n-2)y^{(n-3)} + xy^{(n-2)}, \quad \text{para} \quad n > 2.$$

Suponiendo entonces $x_0 = 0$ en [107-33], a partir de $y_0 = a_0$, $y'_0 = a_1$, $y''_0 = 0$ pueden calcularse los demás $y^{(n)}_0$ por la relación anterior, y resulta así la misma expresión [107-32] ya hallada.

NOTA 3. El método de integración mediante desarrollo en serie fué el usado, de modo puramente formal, por I. NEWTON (*Methodus Fluxionum et serierum infinitarum*, escrito alrededor de 1671, publicado en 1736), a quien conjuntamente con G. W. LEIBNIZ se debe el estudio de las primeras ecuaciones diferenciales. Este último integró en 1675 la ecuación $yy' = b/y$, reduciéndola a la forma $b\,dx = y^2 dy$ (*Die Briefwechsel von* G. W. LEIBNIZ *mit Mathematikern*, Berlín, 1899, pág. 161). La integración de la ecuación $y^{(n)} = f(x)$, con la observación de que la solución queda determinada a menos de un polinomio de grado $n-1$, fué explicada por NEWTON en su *Tractatus de quadratura curvarum*, redactado hacia 1676 y publicado por primera vez como apéndice de su *Optica* en 1704.

NEWTON clasificaba las ecuaciones diferenciales de primer orden, llamadas entonces ecuaciones fluxionales, en tres clases. La primera clase estaba formada por aquellas ecuaciones en dos derivadas (llamadas fluxiones e indicadas con punto encima $\dot{x}$ é $\dot{y}$ (Cap. VIII, nota I), y una variable (fluente) x ó y, como por ejemplo

$$\dot{y}/\dot{x} = f(x) \quad ; \quad \dot{y}/\dot{x} = f(y) \quad ;$$

o como escribiríamos actualmente

$$dy/dx = f(x) \quad ; \quad dy/dx = f(y).$$

La segunda clase comprendía las ecuaciones en dos fluxiones y dos fluentes:

$$\dot{y}/\dot{x} = f(x, y).$$

La tercera clase estaba formada por ecuaciones con más de dos fluxiones; éstas se conocen actualmente como ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Ejercicios

1. a) Verificar que

$$u_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad , \quad u_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

son soluciones de

$$y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2+\beta^2)y = 0 \quad ;$$

b) Probar que la solución general es

$$y = e^{\alpha x}[C_1\cos\beta x + C_2\operatorname{sen}\beta x] .$$

2. a) Verificar que $u_1 = e^x$, $u_2 = \operatorname{sen} x$, $u_3 = \cos x$ son soluciones de $y''' - y'' + y' - y = 0$;

b) Probar que forman un sistema fundamental de soluciones.

3. Probar que $u_1 = x$, $u_2 = e^x$ son linealmente independientes.

4. Probar que $1, x, x^2, \ldots, x^n$ son linealmente independientes.

5. a) Probar que

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \quad ,$$

a_i constantes (ecuación de Cauchy), tiene soluciones de la forma $y = x^r$;

b) Aplicar a $6x^2y'' - 5xy' + 4y = 0$.

6. Resolver $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + px + q$.

7. Resolver $x^3y''' - 12x^2y'' + 60xy' - 120y = 2x^6$.

8. La ecuación de Riccati (§ 101-5, b)

$$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

se transforma en ecuación de segundo orden lineal y homogénea poniendo $y = -u'/(Au)$ (cfr. § 101-5, ejemplo 3). Aplicar a

$$y' = x^2y^2 + (2/x)y + (6/x^4)$$

y resolverla.

9. Verificar que $u(x) = x$ es solución de $y'' + xy' - y = 0$, y expresar la solución general.

10. a) Probar que la ecuación diferencial de segundo orden

$$f_0(x)y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x)$$

es *exacta*, es decir, su primer miembro es la derivada de una expresión lineal $F_0(x)y' + F_1(x)$, si y sólo si se verifica la condición $f''_0 - f'_1 + f_2 = 0$, y en tal caso la ecuación dada se reduce a

$$\frac{d}{dx}[f_0y' + (f_1 - f'_0)y] = g(x) \quad ;$$

b) Aplicar a $(x^2+2)y'' + (2x + x^3)y' + 3x^2y = 1$.

11. Resolver $y'' + y = 0$ mediante desarrollo en serie.

12. Integrar la *ecuación hipergeométrica*

$$x(x-1)y'' + (ax+b)y' + cy = 0 \quad ,$$

mediante una serie de la forma:

$$y = A_0x^{\mu} + A_1x^{\mu+1} + A_2x^{\mu+2} + \dots$$

§ 108. Ecuaciones lineales de coeficientes constantes

1. Ecuación homogénea de segundo orden. Sustitución de D'Alembert. — La ecuación lineal de primer orden $ay' + by = 0$ es de variables separables, y si los coeficientes son constantes la solución es una función exponencial $y = e^{-(b/a)x}$. También son de tipo exponencial las soluciones de la ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes de segundo orden

[108-1] $$ay'' + by' + cy = 0 \quad ,$$

y se obtienen con la *sustitución de* D'Alembert (también llamada impropiamente de Euler):

[108-2] $$y = e^{rx}.$$

En efecto, derivando y reemplazando en [108-1] se obtiene $(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$, y como el segundo factor no se anula, resulta la llamada *ecuación característica*

[108-3] $$ar^2 + br + c = 0$$

que puede formarse a partir de [108-1] reemplazando cada derivada $y^{(n)}$ por la correspondiente r^n (é $y = y^{(0)}$ por $r^0 = 1$).

Cada raíz de [108-3], reemplazada en [108-2], da una solución de [108-1]. Distinguiremos varios casos según sean estas raíces r_1, r_2.

a) Raíces distintas: $r_1 \neq r_2$. — Las soluciones $u_1(x) = e^{r_1x}$, $u_2(x) = e^{r_2x}$, forman un sistema fundamental, pues el wronskiano es

[108-4] $$W(x; u_1, u_2) = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0.$$

Entonces la solución general es:

[108-5] $$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}.$$

Ejemplo 1. Resolver $y'' - 3y' + 2y = 0$, siendo para $x = 0$: $y = 0$, $y' = -1$.

La ecuación característica $r^2 - 3r + 2 = 0$ tiene las raíces 1 y 2, luego:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} \quad \therefore \quad y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x}.$$

Reemplazando las condiciones iniciales resulta $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, y entonces: $y = e^x - e^{2x}$.

a_1) *Raíces reales.* — La solución es por [108-5] una suma de exponenciales reales.

a_2) *Raíces complejas.* — Si los coeficientes de la ecuación diferencial son reales como supondremos, las raíces complejas de la ecuación característica deben ser conjugadas: $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, y entonces [108-5] toma la forma:

[108-6] $$y = e^{\alpha x}(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}) \quad ,$$

expresión que sólo es real cuando C_1 y C_2 son reales e iguales o complejos conjugados, y a la que daremos una forma más apta para operar en el campo real.

Por las relaciones de EULER (§ 45-3) se tiene:

$$C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x} =$$
$$= C_1(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x) + C_2(\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x) =$$
$$= (C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen}\beta x .$$

Reemplazando en [108-6] y poniendo

$$C_1 + C_2 = A \quad , \quad i(C_1 - C_2) = B \quad ,$$

se obtiene:

[108-7] $$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\operatorname{sen}\beta x) .$$

NOTAS: 1. Obsérvese que cuando C_1 y C_2 son reales e iguales o complejos conjugados, A y B son reales.

2. Para dar otra forma aún a la solución, observemos que para todo par de números reales A y B se pueden determinar ϱ y φ tales que (cfr. § 9-4, *c*):

$$A = \varrho \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad B = \varrho\cos\varphi \quad , \quad (0 \leqslant \varrho \quad , \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi).$$

En efecto, las ecuaciones pueden invertirse obteniéndose fácilmente $\varrho = +\sqrt{A^2 + B^2}$; $\varphi = \operatorname{arc\,tg} A/B$ en el cuadrante determinado por los signos de A y B.

Reemplazando en [108-7] se obtiene

[108-8] $$y = \sigma e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x + \varphi) .$$

Ahora las constantes arbitrarias son ϱ y φ. En general la forma [108-7] de la solución es más apta para la determinación de las constantes mediante condiciones iniciales.

EJEMPLO 2. Solución particular de la ecuación $y'' + 4y = 0$ con las condiciones iniciales $y = 1$, $y' = 3$ para $x = 0$. Es

$$r^2 + 4 = 0 \quad \therefore \quad r = \pm 2i \quad , \quad (\alpha = 0, \ \beta = 2).$$

[108-9] $$\therefore \quad y = A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x \quad ,$$
$$y' = -2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x .$$

Por las condiciones iniciales se obtiene $1 = A$, $3 = 2B$, de donde $B = 3/2$, y reemplazando en [108-9] se llega a la solución particular

$$y = \cos 2x + \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x .$$

b) *Raíces iguales.* — Si las raíces de la ecuación característica son iguales $r_1 = r_2$, sólo tenemos una solución particular $u_1(x) = e^{r_1 x}$. Otra solución es

[108-10] $$u_2(x) = xe^{r_1 x} \quad ,$$

pues derivando dos veces y reemplazando en la ecuación se verifica

$$(ar_1^2 + br_1 + c)\, xe^{r_1 x} + (2ar_1 + b)\, e^{r_1 x} = 0$$

ya que por ser r_1 una raíz doble de [108-3], no sólo anula su primer miembro, sino también su derivada respecto de r.

Como el wronskiano es $W(x; u_1, u_2) = e^{2r_1 x} \neq 0$, la solución general es

[108-11] $$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} = (C_1 + C_2 x)\, e^{r_1 x}.$$

Ejemplo 3. Resolver, siendo $y = 1$, $y' = -1$ para $x = 0$:

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

La ecuación característica tiene la raíz doble —3, luego la solución general es

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-3x}.$$

De las condiciones iniciales resulta

$$1 = C_1 \quad ; \quad -1 = C_2 - 3C_1 \quad \therefore \quad C_2 = 2 \quad .$$

y reemplazando:

$$y = (1 + 2x)\, e^{-3x}.$$

2. **Ecuación de los movimientos vibratorios.** — *a*) Estudiemos el movimiento de un punto sometido a una fuerza atractiva, desde un punto fijo O, cuando la fuerza es proporcional a la distancia. Tal sucede, por ejemplo, con un punto sujeto a O por una goma o un resorte análogo, cuya tensión, entre ciertos límites de elasticidad, puede considerarse proporcional a la distancia.

La ecuación del movimiento es:

$$y'' = -k^2 y \quad \text{o sea:} \quad y'' + k^2 y = 0 \quad ,$$

llamando k^2 a la constante de proporcionalidad.

La ecuación característica es: $r^2 + k^2 = 0$ y la integral general:

$$y = e^{ikt} + e^{-ikt} = A \cos kt + B \operatorname{sen} kt \cdot$$

Si en el momento inicial el punto tiene la abscisa a y la velocidad nula, tenemos las condiciones iniciales:

$$A = a \quad , \quad Bk = 0 \quad \text{de donde} \quad B = 0 \quad ,$$

y la ecuación del movimiento es: $y = a \cos kt$.

Luego el movimiento es vibratorio armónico (§ 28-4, *b*) con período $2\pi/k$ y fase inicial nula.

b) Estudiemos ahora el caso general. Si hay razonamiento: $2hy'$ proporcional a la velocidad, con un factor de proporcionalidad $2h$ (como sucede, por ejemplo, aproximadamente, con el movimiento en el aire o en otro medio resistente cualquiera), la ecuación del movimiento es:

$$y'' = -k^2 y - 2hy' \quad \text{o sea:}$$

[108-12] $$y'' + 2hy' + k^2y = 0 \quad ,$$

la ecuación característica es:

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0 \quad \therefore \quad r = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}.$$

b_1) ***Raíces imaginarias***: $0 \leqslant h < k$.

Llamando

$$\Delta = k^2 - h^2 \quad , \quad r = -h \pm i\sqrt{\Delta} \quad ,$$

la integral general es:

$$y = e^{-ht}[\mathrm{A} \cos t \sqrt{\Delta} + \mathrm{B} \operatorname{sen} t \sqrt{\Delta}]$$

Si las condiciones iniciales son: $t = 0$, $y = 0$, $y' = 0$, como sucede en el caso del punto abandonado a la atracción de un resorte tenso, resulta como antes:

$$\mathrm{B} = 0 \quad , \quad \mathrm{A} = a \quad , \quad y = e^{-ht} a \cos t \sqrt{\Delta} \quad ,$$

que representa un movimiento *amortiguado*, cuya amplitud inicial a disminuye y tiende a cero al crecer t. Se llama *decrecimiento logarítmico* a h; cuando es $h = 0$ volvemos al caso a.

b_2) ***Raíces reales distintas***: $h > k$. — La ecuación característica tiene dos raíces reales r_1, r_2 y la ecuación del movimiento es:

$$y = \mathrm{C} \cdot e^{r_1 t} + \mathrm{C}' \cdot e^{r_2 t}$$
$$y' = r_1\mathrm{C} \cdot e^{r_1 t} + r_2\mathrm{C}' \cdot e^{r_2 t}$$

Las condiciones iniciales exigen que sea:

$$\mathrm{C} + \mathrm{C}' = a \quad ; \quad \mathrm{C}r_1 + \mathrm{C}'r_2 = 0 \quad ,$$

de donde se despejan C y C'; y según los valores de h y k resultará una curva distinta, pero siempre *aperiódica* y que para $t \to \infty$ se aleja indefinidamente.

b_3) ***Raíces iguales***: $h = k$. — Entonces es: $r_1 = r_2 = -h$.

La integral general es:

$$y = \mathrm{C}e^{-ht} + \mathrm{C}'te^{-ht} = e^{-ht}(\mathrm{C} + \mathrm{C}'t) \quad ,$$

del mismo tipo aperiódico anterior.

3. **Descarga de un condensador.** — La descarga de un condensador de capacidad C a través de un circuito de resistencia R y autoinducción L (fig. 354), conduce a una ecuación diferencial de la forma [108-12] para la carga del mismo. Llamemos Q a la carga en una placa y tomemos como sentido del circuito, para determinar el signo de la intensidad I, el de salida de dicha placa por el cable. Si a la diferencia de potencial Q/C entre las placas se agrega la fuerza electromotriz de inducción $-L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$, se tiene la fuerza electromotriz total, que por la ley de Ohm es igual a IR:

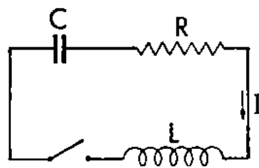


Fig. 354.

[108-13] $$\frac{Q}{C} - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = IR.$$

Como $I = -\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, se obtiene la ecuación diferencial en $Q(t)$

[108-14] $$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}Q = 0 \quad ,$$

que puede identificarse con [108-12] si $2h = R/L$, $k^2 = 1/(LC)$. Se tie-

nen entonces, en correspondencia con b_1 y b_2-b_3 de § 108-2, los casos siguientes:

1º) $R/(2L) < 1/\sqrt{LC}$ o sea $R^2 < 4L/C$. Descarga oscilante:

[108-15] $$Q = e^{-(R/2L)t}\operatorname{sen}(\Omega t + \varphi) \quad ,$$

siendo

[108-16] $$\Omega = \sqrt{\Delta} = \sqrt{k^2 - h^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \; .$$

Cuando R es muy pequeña, la pulsación se acerca a

[108-17] $$\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ,$$

correspondiente a la descarga sinusoidal en un circuito ideal de resistencia nula.

2º) $R^2 \geqslant 4L/C$. Descarga aperiódica.

4. Ecuación completa. Método de los coeficientes indeterminados. — Para resolver la ecuación completa o no homogénea

[108-18] $$ay'' + by' + cy = \mathrm{f}(x)$$

puede aplicarse el método de Lagrange de variación de los parámetros (§ 107-5,a).

También puede hallarse una solución particular $\mathrm{z}(x)$ por el método de coeficientes indeterminados (§ 16-7) cuando $\mathrm{f}(x)$ es una función de ciertos tipos que enumeraremos, y que se presentan con frecuencia en las aplicaciones. En general se ensaya para $\mathrm{z}(x)$ una función de igual forma que $\mathrm{f}(x)$, con coeficientes que luego se determinan. Hallada $\mathrm{z}(x)$ basta sumarla a la solución Y de la ecuación homogénea (§ 107-4): $y = \mathrm{Y} + z$.

Los teoremas de § 108-9 justificarán la forma de la función ensayada en cada caso para la solución.

a) *Tipo polinomio*: $\mathrm{f}(x) = \mathrm{P}_k(x)$.

a_1) Si la ecuación característica no tiene la raíz $r = 0$, ningún término de Y tiene la forma de un término de $\mathrm{P}_k(x)$, y se ensaya para $\mathrm{z}(x)$ un polinomio de igual grado, $\mathrm{Q}_k(x)$, con coeficientes a determinar.

Ejemplo 1. $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$.

Es $\mathrm{Y} = \mathrm{C}_1e^x + \mathrm{C}_2e^{2x}$. Se ensaya $z = \alpha x + \beta$.

Derivando dos veces y reemplazando en la ecuación resulta $\alpha = 1$, $\beta = 0$, luego $z = x$, y la solución general es $y = \mathrm{C}_1e^x + \mathrm{C}_2e^{2x} + x$.

a_2) Si la ecuación característica tiene la raíz $r = 0$ de orden h, ya figuran en Y términos de la forma $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2x, \ldots, \mathrm{C}_hx^{h-1}$; se ensaya (ver § 108-9, a, 2º), $x^h\mathrm{Q}_k(x)$.

EJEMPLO 2. $y'' + 4y' = 8x + 10.$

Es $Y = C_1 + C_2e^{-4x}$. Como $r = 0$ es raíz simple de la ecuación característica, se ensaya $z = x(\alpha x + \beta) = \alpha x^2 + \beta x$, obteniéndose $z = x^2 + 2x$, y entonces

$$y = Y + z = C_1 + C_2e^{-4x} + x^2 + 2x.$$

b) *Tipo* $f(x) = e^{ax}P_k(x)$, *con* $P_k(x)$ *polinomio de grado* k *en* x.

b_1) Si a no es raíz de la ecuación característica se ensaya $z = e^{ax}Q_k(x)$, (§ 108-9, *b*, 1º).

b_2) Si a es raíz de orden h se ensaya $z = e^{ax}x^hQ_k(x)$, (§ 108-9, *b*, 2º).

c) *Tipo sinusoidal*: $f(x) = a\cos\omega x + b\,\text{sen}\,\omega x$. Se ensaya $z(x) = \alpha\cos\omega x + \beta\,\text{sen}\,\omega x$, pero si $r = i\omega$ es raíz *h-ple*:

$$z = x^h(\alpha\cos\omega x + \beta\,\text{sen}\,\omega x).$$

d) *Tipos* $f(x) = P_ke^{ax}\cos\omega x$; $f(x) = P_ke^{ax}\,\text{sen}\,\omega x$. Se reducen a *b*) con exponentes imaginarios (ver § 108-9, *c*).

e) Si el segundo miembro es suma de funciones de los tipos anteriores, se ensaya una suma de funciones con la forma correspondiente a cada una.

EJEMPLOS: 3. $y'' + 2y' + y = e^{-x}.$

Solución general: $y(C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2)e^{-x}$.

4. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + e^{3x}$;
$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (e^{-x}/6) + (e^{3x}/2).$

5. $y'' + 3y' + 2y = 20\,\text{sen}\,2x.$
$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} - \text{sen}\,2x - 3\cos 2x.$

Obsérvese que no basta ensayar $\alpha\,\text{sen}\,2x$.

6. $y'' - y = e^x + \text{sen}\,x$;
$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}\text{sen}\,x.$

Obsérvese que por no haber derivadas de orden impar, no es necesario ensayar un término en $\cos x$.

7. $y'' + y = \text{sen}\,x$; $y = A\cos x + B\,\text{sen}\,x - \frac{1}{2}x\cos x.$

Obsérvese que es inútil ensayar $z = \alpha\cos x + \beta\,\text{sen}\,x$.

5. **Oscilaciones forzadas. Resonancia.** — *a*) Veamos si en el caso de oscilaciones amortiguadas (§ 108-2, b_1) se puede mantener la oscilación alimentando el sistema mecánico con una fuerza exterior periódica $F\,\text{sen}\,\omega t$, y análogamente para el circuito de § 108-3.

a_1) En lugar de [108-12] tendremos la ecuación *completa*

[108-19] $$y'' + 2hy' + k^2y = F\,\text{sen}\,\omega t.$$

Una solución particular es de la forma (§ 108-4, *c*)

[108-20] $$z = \alpha\cos\omega t + \beta\,\text{sen}\,\omega t.$$

Derivando y reemplazando en [108-19] se obtienen para α y β las ecuaciones

$$-2h\omega\alpha + (k^2 - \omega^2)\beta = F \quad ; \quad (k^2 - \omega^2)\alpha + 2h\omega\beta = 0 \quad ;$$

que dan

$$\alpha = \frac{-2h\omega F}{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2} \quad ; \qquad \beta = \frac{(k^2-\omega^2)\,F}{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2} \quad ,$$

y tendremos (§ 108-1, nota 2) para z la sinusoide

[108-21] $$z = a \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad ,$$

de amplitud y fase inicial dadas por

[108-22] $$a = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{F}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}} \quad ; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-2h\omega}{k^2-\omega^2} \quad ,$$

con φ en el cuadrante determinado por los signos de α y β, es decir de F y h.

Como la solución general de [108-19] es $y = Y + z$, siendo Y una oscilación amortiguada, despreciable al cabo de un cierto tiempo, sólo subsiste [108-21], que así representa el estado de régimen límite. En él desaparece la *oscilación libre* y sólo subsiste la *oscilación forzada*, cuya frecuencia es igual a la de la fuerza exterior. Así la frecuencia de la oscilación forzada puede variar con la fuerza exterior que se considere, en cambio en la oscilación libre la pulsación del movimiento vibratorio depende sólo de los coeficientes k y h dados por las características internas del sistema, cualesquiera sean las condiciones iniciales externas al mismo.

a_2) Si se alimenta el circuito eléctrico de § 108-3 con una fuerza electromotriz sinusoidal $E = E_0 \operatorname{sen} \omega t$, la ecuación diferencial para la carga Q se identifica con [108-19] si $2h = R/L$, $k^2 = 1/(LC)$, y $F = -E_0/L$ *, y entonces el estado de régimen límite está dado por [108-21] siendo (cfr. § 101-4, ej. 3)

[108-23] $$a = \frac{E_0}{\sqrt{(C^{-1}-L\omega^2)^2+R^2\omega^2}} \quad ; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{RC\omega}{LC\omega^2-1} \; .$$

b) *Resonancia.* — b_1) El máximo de la amplitud a dada por [108-22] como función de ω se obtiene para

$$\omega_0 = \sqrt{k^2-2h^2} \quad ,$$

a la que corresponde

$$a_{máx} = \frac{F}{2h\sqrt{k^2-h^2}} = \frac{F}{2h\sqrt{\Delta}} \; .$$

La obtención de esta amplitud mucho mayor para la frecuencia ω_0, constituye el llamado fenómeno de *resonancia*, y a él se debe que la amplitud de las oscilaciones de un péndulo pueda alcanzar valores considerables dando a aquél pequeños impulsos con un ritmo adecuado. Para el caso ideal de rozamiento nulo o desdeñable ($h = 0$), si la pulsación de F se acerca o coincide con la correspondiente a la de la oscilación libre ($\sqrt{\Delta} \to k$), se hará $a_{máx}$ infinita, aún para valores pequeños de F.

b_2) Análogamente en el circuito eléctrico de a_2, la amplitud a dada

---

* En efecto, agregar E al primer miembro de [108-13] equivale a agregar $-E$ al segundo de [108-14] y hay que dividir por L para identificar con [108-12]. El signo — puede omitirse al reemplazar estos valores en [108-22], pues el cambio de signo se logra incrementando φ en π lo que no altera su tangente.

por [108-23] es una función de ω (fig. 355) cuyo máximo se obtiene para el valor llamado *pulsación de resonancia*:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{2L^2}},$$

que para R/L pequeño está *muy próximo al valor* Ω_0 dado por [108-17] para el circuito de resistencia nula oscilando libremente.

Reemplazando este valor en [108-23] se obtiene la *amplitud máxima de las oscilaciones forzadas*

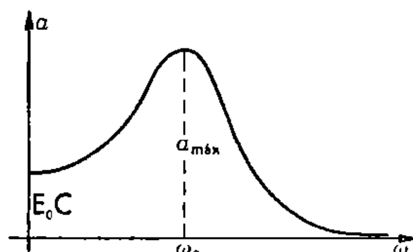


Fig. 355.

$$a_{máx} = \frac{E_0}{R}\left(\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{E_0}{R\Omega},$$

estando Ω dado por [108-16]. Para R/L muy pequeño es aproximadamente $a_{máx} = (E_0/R)\sqrt{CL}$, y puede ser *muy grande con respecto a* E_0/R, *y a la amplitud* E_0 *de la fuerza electromotriz exterior*. Este fenómeno de aumento de amplitud es el que hemos llamado *resonancia*, y aún en un circuito ideal de resistencia nula, si fuera $\omega = \Omega_0$, se produciría un aumento indefinido de la amplitud.

El carácter más o menos pronunciado del máximo de la curva de figura 355 da idea de la *selectividad del circuito*, o sea, de la rapidez con que disminuye la amplitud de sus oscilaciones al apartarse la frecuencia excitante ω de la frecuencia de resonancia ω_0.

El fenómeno de resonancia se aprovecha para la amplificación en radiotelefonía, pero debe evitarse en otros problemas técnicos, por ejemplo, vibraciones de estructuras elásticas.

NOTA. Si en un circuito ideal de resistencia nula es $\omega \neq \Omega_0$ pero la diferencia $\omega - \Omega_0$ es muy pequeña, se encuentra el fenómeno de *batido*, ya considerado en § 28-4, nota 2. La amplitud varía rítmicamente, teniendo la *onda diferencial* pulsación $\frac{1}{2}|\omega - \Omega_0|$, o sea período $4\pi/|\omega - \Omega_0|$.

6. **Ecuaciones de orden superior.** — Los resultados de § 108-1 se generalizan de inmediato a ecuaciones (lineales de coeficientes constantes) de orden superior al segundo. Dada la ecuación

[108-24] $$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

poniendo $y = e^{rx}$, se obtiene

$$(r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n) e^{rx} = 0.$$

Para que e^{rx} satisfaga a la ecuación será entonces necesario y suficiente que r sea raíz de la *ecuación característica*

[108-25] $$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

a) Si las n raíces $r_1, \ldots, r_n$ son distintas,

[108-26] $$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}$$

es la *solución general* (§§ 107-1 y 2), pues el wronskiano de

las soluciones $u_1 = e^{r_1 x}, \ldots, u_n = e^{r_n x}$ es, como es dácil de calcular, igual al determinante de VANDERMONDE (§ 13-7, *b*) de $r_1, \ldots, r_n$, por una exponencial en x.

Para cada par de raíces complejas conjugadas $\alpha \pm \beta i$, los dos términos correspondientes de [108-26] se transforman como en § 108-1, a_2, dando origen a un término de la forma [108-7]:

$$e^{\alpha x}(\mathrm{A} \cos \beta x + \mathrm{B} \operatorname{sen} \beta x).$$

b) Si r_1 es *raíz múltiple* de orden k, no sólo $e^{r_1 x}$ es solución, sino también $xe^{r_1 x}$, $x^2 e^{r_1 x}$, ..., $x^{k-1} e^{r_1 x}$ (ver § 108-8, *c*). Por tanto: cada raíz múltiple da k soluciones particulares, el número total es n, y además forman un sistema fundamental (ver § 108-8, d_2).

NOTA. Si por ejemplo $\alpha \pm \beta i$ son dos raíces dobles, entre ambas dan un término de la forma

$$e^{\alpha x}[(\mathrm{A} + \mathrm{B}x) \cos \beta x + (\mathrm{C} + \mathrm{D}x) \operatorname{sen} \beta x] \quad ,$$

con cuatro constantes. Aún ahora la ecuación homogénea puede dar resonancia (§ 108-5, nota) en las oscilaciones.

7. **Ecuación de la viga apoyada en toda su longitud.** — Si se admite que la reacción del suelo es proporcional al hundimiento y, es decir, igual a $-4h^4 y$, siendo h^4 un coeficiente positivo que depende de la naturaleza del suelo, en la ecuación diferencial aproximada de la línea elástica (§ 106-2, *b*) en la forma [106-26] $y^{\mathrm{IV}} = k\mathrm{p}(x)$, debemos agregar a la densidad lineal de carga (función de cargas) $\mathrm{p}(x)$ el nuevo término $-4h^4 y$. Suponiendo $k = 1$ resulta:

$$y^{\mathrm{IV}} + 4h^4 y = \mathrm{p}(x).$$

La ecuación característica es

$$n^4 + 4h^4 = 0 \quad \text{de donde} \quad r = h\sqrt{2}\,.\sqrt[4]{-1} \quad ,$$

y como el número -1 tiene 4 raíces cuartas, se tienen los siguientes valores de r:

$$r_1 = h(1+i) \quad ; \quad r_2 = h(1-i) \quad ;$$
$$r_3 = h(-1+i) \quad ; \quad r_4 = h(-1-i) \quad ;$$

luego la integral general de la ecuación incompleta es

$$y = (\mathrm{A} \,.\, \cos hx + \mathrm{B} \,.\, \operatorname{sen} hx)\, e^{hx} + (\mathrm{C} \,.\, \cos hx + \mathrm{D} \,.\, \operatorname{sen} hx)\, e^{-hx}.$$

Si la función de carga es de primero, segundo o tercer grado en x, la integral de la ecuación completa es evidentemente $y = \mathrm{p}(x)/4h^4$, que sumada a la expresión anterior da la integral general de la ecuación completa. Con las condiciones iniciales $y'' = 0$, $y''' = 0$, en ambos extremos, quedan determinadas las cuatro constantes A, B, C, D.

8. **Método simbólico para la ecuación homogénea.** — La resolución de ecuaciones linales homogéneas de coeficientes constantes, se ha hecho sin cuadraturas, con métodos algebraicos. Ello se debe a las propiedades algebraicas del operador D de derivación, consecuencia de su linealidad: $\mathrm{D}[\sum a_i \mathrm{u}_i(x)] = \sum a_i \mathrm{Du}_i(x)$, (§ 32-1).

a) *Operador* $\mathrm{p}(\mathrm{D})$. — a_1) Si $\mathrm{p}(x)$ es un polinomio en x

[108-27] $$\mathrm{p}(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \quad ,$$

consideraremos a

[108-28] $$p(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n \quad ,$$

como un símbolo de operación aplicable a funciones $y = y(x)$ con el significado siguiente:

[108-29] $$p(D)y = D^n y + a_1 D^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} Dy + a_n y .$$

Si $p(D) = 1$ es $p(D)y = y$, es decir, $p(D) = 1$ indica una *operación sin efecto modificante.*

a_2) Si $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son polinomios, se tiene

[108-30] $$p_1(D)y + p_2(D)y = [p_1(D) + p_2(D)]y \quad ,$$

siendo $p_1(D) + p_2(D)$ el operador correspondiente al polinomio $p_1(x) + p_2(x)$. Con análoga definición de $p_1(D) . p_2(D)$, resulta de la linealidad de la derivación (§ 32-1):

[108-31] $$p_1(D)[p_2(D)y] = [p_1(D) . p_2(D)]y = p_2(D)[p_1(D)y] .$$

a_3) En consecuencia, si r_1, r_2, r_3, ... son los ceros de $p(x)$, y h, k, l, ... los órdenes de multiplicidad, la operación,

[108-32] $$p(D) = (D - r_1)^h (D - r_2)^k (D - r_3)^l \ldots$$

resulta de realizar sucesivamente las operaciones que corresponden a cada potencia, en un orden arbitrario.

b) *Expresión de* $(D - r)^h$. — De la relación

$$e^{-rx}(D - r)y = e^{-rx} Dy - e^{-rx} ry = D[e^{-rx} y]$$

resulta, reemplazando y por $(D - r)y$:

$$e^{-rx}(D - r)^2 y = D[e^{-rx}(D - r)y] = D^2[e^{-rx} y] .$$

Reiterando el procedimiento se tiene:

[108-33] $$e^{-rx}(D - r)^h y = D^h[e^{-rx} y] .$$

c) *Integración de la ecuación simple.* — La ecuación diferencial

[108-34] $$y^{(h)} + a_1 y^{(h-1)} + \ldots + a_h y = 0$$

se llama *simple* si su ecuación característica tiene una sola raíz r (de orden h). En tal caso [108-34] se escribe: $(D - r)^h y = 0$, que en virtud de [108-33] equivale a la ecuación

$$D^h[e^{-rx} y] = 0 \quad ,$$

de integración inmediata: $e^{-rx} y = P_{h-1}(x)$, polinomio de grado $h - 1$, con h coeficientes arbitrarios. Entonces la solución general de [108-34] es

[108-35] $$y = P_{h-1}(x) . e^{rx} = (C_0 + C_1 x + \ldots + C_{h-1} x^{h-1}) e^{rx} .$$

d) *Integración de* [108-24]. — Esta ecuación se escribe en virtud de [108-29]: $p(D)y = 0$, o bien por [108-32]

[108-36] $$(D - r_1)^h (D - r_2)^k (D - r_3)^l \ldots y = 0 .$$

Probaremos que su integral general es igual a la suma de las integrales generales de cada una de las ecuaciones simples

[108-37] $$(D - r_1)^h y = 0 \quad , \quad (D - r_2)^k y = 0 \quad ,$$

o sea por [108-35]:

[108-38] $$y = P_{h-1}(x) . e^{r_1 x} + Q_{k-1}(x) . e^{r_2 x} + \ldots$$

donde $P_{h-1}(x)$, $Q_{k-1}(x)$, ... son polinomios de grados indicados por los subíndices, con coeficientes arbitrarios.

d_1) Cada término indicado en [108-38] es solución, pues al aplicar [108-32] podemos por a_3 comenzar por la potencia simbólica que lo anule en virtud de *c*. Por consiguiente [108-38] es solución.

d_2) Como en [108-38] hay $h + k + l \ldots = n$ constantes arbitrarias, para probar que [108-38] es la solución general, bastará demostrar (§ 107-2) que *si es idénticamente*

[108-39] $$P_{h-1}(x)e^{r_1 x} + Q_{k-1}(x)e^{r_2 x} + \ldots \equiv 0 \quad ,$$

los polinomios $P_{h-1}(x)$, $Q_{k-1}(x)$, $\ldots$, *son idénticamente nulos.*

Supongamos, por el absurdo, que sea r_1 la raíz de módulo mayor de entre las correspondientes a polinomios no idénticamente nulos, o una de ellas si hay raíces de igual módulo. Reemplazando x por x/r_1 la identidad [108-39] toma la forma

$$P_{h-1}e^{x} + Q_{k-1}e^{(r_2/r_1)x} + \ldots \equiv 0.$$

Como por la hipótesis r_2/r_1, r_3/r_1, $\ldots$, distintos de 1, son de módulo $\leqslant 1$, tendrán todas sus partes reales < 1, de donde resulta una contradicción para $x \to +\infty$, pues el primer término es un infinito de orden superior a todos los otros. Para el caso en que [108-39] se reduzca al primer término, el teorema es evidente.

9. **Aplicación del método simbólico a la ecuación completa.** — El método simbólico (§ 108-8) nos permitirá justificar los tipos de soluciones ensayados en § 108-4 al aplicar el método de coeficientes indeterminados, dándonos a la vez otra manera, en ocasiones más conveniente, de hallar la solución particular.

a) *Si el segundo miembro de la ecuación completa*

[108-40] $$p(D)y = f(x)$$

es un polinomio $P_k(x)$ *de grado* k, *entonces*:

1º) *Si* $p(0) \neq 0$, [108-40] *tiene por solución particular un polinomio* determinado, *de grado* k;

2º) *Si* 0 *es un cero de orden* h *de* $p(x)$, *la ecuación* [108-40] *admite una solución particular* $x^h Q_k(x)$, *donde* $Q_k(x)$ *es un polinomio* determinado *de grado* k.

Dem. 1º) Si $p(0) \neq 0$, se obtiene por división

$$\frac{1}{p(x)} = b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k + x^{k+1}\frac{R(x)}{p(x)} \quad ,$$

siendo $b_0 \neq 0$ y $R(x)$ un polinomio en x. De

$$1 = p(x)(b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k) + x^{k+1}R(x)$$

resulta la identidad

$$1 = p(D)(b_0 + b_1 D + \ldots + b_k D^k) + R(D)D^{k+1} \quad .$$

que expresa que el segundo miembro define una operación sin efecto modificante. Aplicándola a $f(x) = P_k(x)$ y observando que $D^{k+1}P_k(x) = 0$ resulta

$$p(D)[(b_0 + b_1 D + \ldots + b_k D^k)P_k(x)] = P_k(x) \quad ,$$

es decir, la solución particular z de $p(D)y = P_k(x)$ es

$$z = (b_0 + b_1 D + \ldots + b_k D^k)P_k(x) \quad ,$$

polinomio de grado k por ser $b_0 \neq 0$. Los números b_i pueden calcularse también desarrollando $1/p(x)$ por la serie de Mac-Laurin.

2º) Si 0 es cero de orden h de $p(x)$, es $p(x) = x^h p_1(x)$, y la ecuación [108-40] se escribe $p_1(D)D^h y = P_k(x)$, de modo que tomando $D^h y$ como nueva incógnita nos situamos en el caso 1º. Así resulta $D^h y$ un polinomio de grado k [calculable mediante desarrollo de $1/p_1(x)$], y con h cuadraturas, resulta la solución particular de la forma indicada.

b) Si la ecuación es de la forma

[108-41] $$p(D)y = P_k(x)e^{ax}$$

siendo P_k *un polinomio de grado k, entonces:*

1º) *Si* $p(a) \neq 0$, *una solución particular es* $Q_k(x)e^{ax}$, *donde* Q_k *es un polinomio determinado de grado* k;

2º) *Si* a *es un cero de orden* h *de* $p(x)$, [108-41] *tiene una solución particular* $e^{ax} x^h Q_k(x)$, *donde* Q_k *es un polinomio determinado de grado* k.

Haciendo $y = e^{ax} z$ y aplicando a z la identidad [108-33] con $r = -a$ resulta

$$e^{ax}(D+a)^\lambda z = D^\lambda y.$$

Aplicando esta relación a cada término de $p(D)$ resulta por [108-41]

$$e^{ax} p(D+a)z = p(D)y = P_k(x)e^{ax}$$
$$\therefore \quad p(D+a)z = P_k(x)$$

con lo que nos situamos (para la solución particular z a reemplazar en $y = e^{ax} z$) en el caso a, y así queda probado el teorema.

c) Si el segundo miembro $f(x)$ es de una de las formas:

$$P_k(x)e^{ax}\cos\omega x \quad , \quad P_k(x)e^{ax}\operatorname{sen}\omega x \quad ,$$

caemos en los casos anteriores mediante exponenciales imaginarias.

Si los datos son reales es más cómodo integrar la ecuación

$$p(D)z = P_k e^{(a+i\omega)x} \quad , \quad (z = u + iv) \quad ,$$

y separar partes reales e imaginarias, pues ellas satisfacen a

$$p(D)u = P_k e^{ax}\cos\omega x \quad , \quad p(D)v = P_k e^{ax}\operatorname{sen}\omega x .$$

Ejercicios

1. Resolver:
   a) $y'' - 7y' + 12y = 0$ siendo para $x = 0$, $y = y' = 1$;
   b) $y'' - y' - 6y = 0$ siendo para $x = 0$, $y = 3$, $y' = -1$;
   c) $(d^2s/dt^2) - 3(ds/dt) = 0$ siendo para $t = 0$, $s = 1$, $s' = 4$.

2. Resolver, siendo para $x = 0$, $y = 1$, $y' = 2$:
   a) $4y'' + y = 0$;
   b) $4y'' + 25y = 12y'$;
   c) $y'' - 4y' + 5y = 0$.

3. Resolver $y'' + 4y' + 4y = 0$ siendo para $x = 0$, $y = 1$, $y' = -1$.

4. Expresar la solución general de la ecuación del tipo de Cauchy (§ 107, ejercicio 5) $x^2y'' + axy' + by = 0$ en los casos
   1º) $\Delta = (a-1)^2 - 4b > 0$;
   2º) $\Delta < 0$;
   3º) $\Delta = 0$.

5. Resolver:
   a) $6x^2y'' - 5xy' + 4y = 0$;
   b) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$.

6. Resolver:

a) $y'' + y = 3x^2 + 2$ siendo para $x = 0$, $y = 1$, $y' = 2$;
b) $y'' - 3y' = 2 - 6x$ siendo para $x = 0$, $y = 1$, $y' = 3$;
c) $y'' - 5y' + 6y = e^x(x^2 - 3)$;
d) $y'' + 8y' + 25y = e^{2x}$.

7. Resolver:

a) $(\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2) - 6(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t) + 8x = \cos t$;
b) $y'' + 4y = 2\cos 2x$;
c) $y'' + y = \operatorname{sen} x$ siendo para $x = \pi/2$, $y = 3$, $y' = (\pi/4) - 1$.

8. Resolver:

a) $y'' + 10y' + 25y = x \operatorname{sen} 2x$;
b) $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + x^2$.

9. Integrar:

1º) $y^{IV} - a^4 y = 0$;
2º) $y^{IV} + 4a^4 y = 0$.

10. Integrar:

1º) $y''' - 7a^2 y' + 6a^3 y = x^2$;
2º) $y^{V} + y'' = x$;
3º) $y^{IV} + 2a^2 y'' + a^4 y = \cos ax$.

§ 109. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1. **Sistemas de ecuaciones de primer orden.** — a) *Significado geométrico.* — Así como la solución general de una ecuación diferencial representa una familia de curvas *planas,* la de un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

[109-1] $$\begin{cases} \varphi(x; y, y', y'', \ldots; z, z', z'', \ldots) = 0 \quad ; \\ \psi(x; y, y', y'', \ldots; z, z', z'', \ldots) = 0 \end{cases}$$

representa una familia de curvas *alabeadas,* pues cada solución está dada por un par de ecuaciones $\Phi(x, y, z) = 0$, $\Psi(x, y, z) = 0$ de una tal curva referida a los ejes x, y, z.

En particular, un sistema de ecuaciones de primer orden, de la *forma normal,* es decir, resuelto en las derivadas:

[109-2] $$y' = \mathrm{f}(x, y, z) \quad ; \quad z' = \mathrm{g}(x, y, z) \quad ;$$

puede y suele escribirse en la *forma simétrica*

[109-3] $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{X}(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{Y}(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{Z}(x, y, z)} \quad ,$$

pues de ésta se pasa a la anterior poniendo

[109-4] $$\mathrm{f} = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} \quad , \quad \mathrm{g} = \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{X}} \, .$$

Considerando a X, Y, Z como componentes de un vector variable, esas funciones definen un campo vectorial, y el sistema

escrito en la forma [109-3] expresa que las curvas integrales son las *líneas de fuerza* del campo vectorial, es decir, son en cada punto tangentes al vector correspondiente. En efecto, los cosenos directores de la tangente son (§ 72-6, b) proporcionales a dx, dy, dz, y entonces por [109-3], a X, Y, Z.

Ahora bien, dado arbitrariamente el campo vectorial, ¿existen estas líneas de fuerza, envolventes de sus vectores? Si f y g cumplen condiciones muy generales (por ejemplo las de § 105-3), por cada punto del espacio pasa una curva integral y sólo una. Una familia con esta propiedad se llama *congruencia de curvas*.

En efecto, por el teorema de existencia y unicidad (§ 105-3), sea

[109-5] $$y = \mathrm{u}(x; x_0, y_0, z_0) \quad , \quad z = \mathrm{v}(x; x_0, y_0, z_0)$$

la solución unívoca de [109-2] que pasa por (x_0, y_0, z_0), cumpliendo $y_0 = \mathrm{u}(x_0; x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = \mathrm{v}(x_0; x_0, y_0, z_0)$. Por el punto (x, y, z) de la *trayectoria* [109-5] correspondiente al entorno de x_0 donde exista unívoca, pasa también una trayectoria:

$$\eta = \mathrm{u}(\xi; x, y, z) \quad , \quad \zeta = \mathrm{v}(\xi; x, y, z)$$

que por el teorema de unicidad (§ 105-3) debe coincidir con [109-5]. Así pues, para $\xi = x_0$, debe ser $\eta = y_0$, $\zeta = z_0$, de donde:

$$y_0 = \mathrm{u}(x_0; x, y, z) \quad , \quad z_0 = \mathrm{v}(x_0; x, y, z)$$

representan todas las posibles trayectorias que pasan por el entorno de (x_0, y_0, z_0). Por tanto el par de ecuaciones

[109-6] $$\mathrm{u}(x, y, z) = \alpha \quad , \quad \mathrm{v}(x, y, z) = \beta$$

representa la integral general del sistema [109-2].

Debe observarse que esta representación es unívoca sólo para valores (x, y, z) de un pequeño entorno de (x_0, y_0, z_0). Acaso "en grande", no se pueda conservar una tal representación unívoca.

Observemos que por [109-4] las funciones X, Y, Z quedan determinadas, salvo un factor de proporcionalidad que puede ser variable. Por eso el sistema de primer orden [109-2] no representa propiamente hablando un campo vectorial sino un campo de direcciones en el espacio.

Resumiendo: *Un sistema de dos ecuaciones de primer orden* [109-2]

α) *representa geométricamente un campo espacial de direcciones;*

β) *tiene por solución general una congruencia espacial de curvas* (en las condiciones muy generales de § 105-3, sobre las funciones f, g).

Recíprocamente: una familia de curvas doblemente infinita, es decir, con dos parámetros α, β, es una congruencia si por cada punto pasa una, es decir, si a cada terna x, y, z, corresponde un solo par α, β, que determina por tanto una sola curva; es decir: si se pueden despejar α, β, en la forma

$$\mathrm{u}(x, y, z) = \alpha \quad , \quad \mathrm{v}(x, y, z) = \beta.$$

El sistema de ecuaciones diferenciales que representa esta congruencia se deduce inmediatamente diferenciando

$$u_x \,.\, \mathrm{d}x + u_y \,.\, \mathrm{d}y + u_z \,.\, \mathrm{d}z = 0 \quad ,$$
$$v_x \,.\, \mathrm{d}x + v_y \,.\, \mathrm{d}y + v_z \,.\, \mathrm{d}z = 0 \quad ,$$

de donde se despeja:

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_y \,.\, v_z - u_z\, v_y} = \frac{\mathrm{d}y}{u_z\, v_x - u_x\, v_z} = \frac{\mathrm{d}z}{u_x\, v_y - u_y\, v_x} \,.$$

EJEMPLOS: 1. Todas las rectas que pasan por el origen y no están en el plano xy, tienen las ecuaciones

$$x = \alpha z \quad , \quad y = \beta z \quad ,$$

de donde

$$\mathrm{d}x = \alpha\, \mathrm{d}z \quad , \quad \mathrm{d}y = \beta\, \mathrm{d}z \quad ,$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z} \,.$$

La eliminación de los parámetros entre las ecuaciones y sus diferenciales, que arriba quedó hecha por la sola diferenciación, a causa de estar despejados α, β, se ha hecho aquí por división.

2. Todas las rectas paralelas a la $x = az$, $y = bz$, tienen las ecuaciones

$$x = az + \alpha \quad , \quad y = bz + \beta \quad ,$$

de donde

$$\mathrm{d}x = a\, \mathrm{d}z \quad , \quad \mathrm{d}y = b\, \mathrm{d}z \quad ,$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{a} = \frac{\mathrm{d}y}{b} = \frac{\mathrm{d}z}{1} \,.$$

La eliminación ha quedado hecha por la diferenciación. He aquí, pues, las ecuaciones diferenciales de la congruencia de rectas paralelas.

NOTA. En la misma forma se interpreta un sistema de n ecuaciones de primer orden, pero en un espacio de $n + 1$ dimensiones E_{n+1}; el sistema representa un campo de direcciones en E_{n+1}, y su solución general es una congruencia de curvas en E_{n+1}. ◆

b) *Integración.* — En el sistema [109-2], cada ecuación no puede resolverse por separado, por contener las dos funciones incógnitas. El procedimiento práctico de integración directa, aparte de los de aproximación (§ 104) o por desarrollo en serie (§ 104-1), consiste en obtener una sola ecuación con una sola función incógnita (*ecuación eliminante*), que resulta de orden 2 ó menor. En efecto, derivando la primera resulta:

[109-7] $$y'' = \mathrm{f}_x - \mathrm{f}_y \,.\, y' - \mathrm{f}_z \,.\, z' \quad ,$$

y eliminando z y z' entre las tres ecuaciones [109-2] y [109-7] resulta la ecuación eliminante

$$y'' = \mathrm{h}(x, y, y')$$

que integrada da y en función de x. Reemplazando en una de

las ecuaciones [109-2] resulta otra ecuación para z. El mismo procedimineto es aplicable a sistemas de más de dos ecuaciones.

A veces la eliminación se hace sin necesidad de derivar, como muestran los ejemplos 5 y 6.

EJEMPLOS: 3. $y' = y + 4z$, (a) ; $z' = 2y - z$, (b).
Derivando (a) y reemplazando z' por (b) resulta:

$$y'' = y' + 4z' = y' + 8y - 4z \quad ,$$

aquí todavía figura z pero por (a) $4z = y' - y$, y reemplazando se llega a la ecuación con la única incógnita y (ecuación eliminante):

[109-8] $$y'' - 9y = 0$$

cuya solución general es:

[109-9] $$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}.$$

Conocida y resulta z de (a):

$$z = \frac{y' - y}{4} = \frac{1}{2} C_1 e^{3x} - C_2 e^{-3x}.$$

4. Hallar las líneas de fuerza del campo vectorial

$$X = 1 \quad , \quad Y = z \quad , \quad Z = x^2 - 4y$$

y en particular la que pasa por $P_0(0, 7/8, 2)$.
El sistema es:

$$y' = z \quad ; \quad z' = x^2 - 4y$$

y de él resulta la ecuación eliminante

$$y'' + 4y = x^2 \quad ,$$

que es lineal de coeficientes constantes con solución:

$$y = A\cos 2x + B \operatorname{sen} 2x + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \quad ,$$

de donde

$$z = y' = -2A \operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x + \frac{x}{2} \ .$$

Estas dos ecuaciones representan las líneas de fuerza. Para la que pasa por $P_0(0, 7/8, 2)$ se obtiene $A = B = 1$.

5. Resolver el sistema

$$y' + z' = 2x \quad ; \quad y' - z' = 3x^2$$

siendo para $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

Sumando y restando resultan dos ecuaciones eliminantes de primer orden

$$y' = \frac{2x + 3x^2}{2} \quad , \quad z' = \frac{2x - 3x^2}{2}$$

con lo que la solución general es

$$y = \frac{x^2 + x^3}{2} + C_1 \quad ; \quad z = \frac{x^2 - x^3}{2} + C_2$$

y la particular

$$y = \frac{x^2 + x^3}{2} - 1 \quad ; \quad z = \frac{x^2 - x^3}{2} + 1 .$$

6. Resolver el sistema

$$y' = z + w \quad ; \quad z' = y + w \quad ; \quad w' = y + z .$$

Tampoco ahora necesitamos derivar. Sumando resulta

$$(y + z + w)' = 2(y + z + w)$$

[109-10] $$\therefore \quad y + z + w = Ae^{2x}.$$

Sumando las dos primeras y restando la tercera resulta

$$(y + z - w)' = 2w$$

y como $(y + z - w)' = 2Ae^{2x} - 2w'$ resulta la ecuación lineal

$$w' + w = Ae^{2x}$$

que da w. Análogamente se calcula, por ejemplo, z y luego y por [109-10], se obtiene así la solución general:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \quad ; \quad z = C_1 e^{2x} + C_3 e^{-x} \quad ;$$
$$w = C_1 e^{2x} - (C_2 + C_3) e^{-x}.$$

2. **Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden.** — Nos limitaremos a sistemas de dos ecuaciones, por brevedad, y porque todo se extiende de inmediato a sistemas de más ecuaciones (y también a sistemas de ecuaciones lineales de órdenes superiores, como veremos en § 109-4).

a) *Sistemas homogéneos.* — Son los de la forma:

[109-11] $$\begin{cases} y' = p_{11}(x) y + p_{12}(x) z \\ z' = p_{21}(x) y + p_{22}(x) z . \end{cases}$$

Diremos que las dos soluciones:

[109-12] $$\begin{cases} y = u_1(x) \\ z = v_1(x) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y = u_2(x) \\ z = v_2(x) \end{cases}$$

son *linealmente independientes* o que forman un *sistema fundamental*, si no existe ningún par (C_1, C_2) de constantes no simultáneamente nulas, tales que sea simultáneamente y para todo x:

[109-13] $$C_1 u_1 + C_2 u_2 = 0 \quad , \quad C_1 v_1 + C_2 v_2 = 0 .$$

Como en § 107-1, se demuestra que si [109-12] es un sistema fundamental de soluciones, la solución general es:

[109-14] $$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 \quad , \quad z = C_1 v_1 + C_2 v_2 .$$

Esta solución suele hallarse directamente por el método de eliminación de § 109-1, *b*.

EJEMPLOS: 1. El sistema de tres ecuaciones

$$x_i' = \Sigma p_{ik}(t) x_k \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \quad ,$$

en las funciones incógnitas de t: x_1, x_2, x_3, representa una congruencia de curvas en forma paramétrica. Con cada curva $x_i = u_i(t)$, $(i = 1, 2, 3)$, pertenecen también a la congruencia, sus homotéticas respecto del origen $x_i = Cu_i(t)$.

Derivando respecto de t dos veces, resultan otras seis ecuaciones lineales; si eliminamos entre las nueve ecuaciones las variables:

$$x_2,\ x_3,\ x_2',\ x_3',\ x_2'',\ x_3'',\ x_2''',\ x_3''',$$

resulta una ecuación lineal en x_1 de tercer orden:

$$Ax_1''' + Bx_1'' + Cx_1' = D;$$

sustituída la función calculada x_1 en las ecuaciones segunda y tercera tenemos un sistema de dos ecuaciones que determinan: x_2, x_3.

2. Caso particular del anterior es el sistema

$$[109\text{-}15] \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\varrho(s)}\,n; \quad \frac{dn}{ds} = -\frac{1}{\tau(s)}\,b - \frac{1}{\varrho(s)}\,t; \quad \frac{db}{ds} = \frac{1}{\tau(s)}\,n,$$

donde $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$, son las funciones incógnitas y $\varrho(s)$, $\tau(s)$ son funciones continuas dadas, que determinan intrínsecamente una curva alabeada (§ 73-9).

Por el teorema de existencia y unicidad (§ 105-3) existen * unívocamente determinadas tres ternas de funciones $\mathbf{t}_i(s)$, $\mathbf{n}_i(s)$, $\mathbf{b}_i(s)$, $(i = 1, 2, 3)$ que en $s = s_0$ cumplen las condiciones iniciales $\mathbf{t}_1(s_0) = 1$, $\mathbf{n}_1(s_0) = 0$, $\mathbf{b}_1(s_0) = 0$; $\mathbf{t}_2(s_0) = 0$, $\mathbf{n}_2(s_0) = 1$, $\mathbf{b}_2(s_0) = 0$; $\mathbf{t}_3(s_0) = 0$, $\mathbf{n}_3(s_0) = 0$, $\mathbf{b}_3(s_0) = 1$.

Estas condiciones iniciales cumplen $t^2 + n^2 + b^2 = 1$, integral primera del sistema [109-15] por cumplirse

$$t\,\frac{dt}{ds} + n\,\frac{dn}{ds} + b\,\frac{db}{ds} = 0.$$

Análogamente cumplen $t_i\,t_j + n_i\,n_j + b_i\,b_j = 0 \quad (i \neq j)$, condición que se conservará al variar s, pues dos soluciones de [109-15] cumplen:

$$t_i\,\frac{dt_j}{ds} + t_j\,\frac{dt_i}{ds} + n_i\,\frac{dn_j}{ds} + n_j\,\frac{dn_i}{ds} + b_i\,\frac{db_j}{ds} + b_j\,\frac{db_i}{ds} = 0.$$

En estas condiciones, las funciones $\mathbf{t}_i(s)$, $\mathbf{n}_i(s)$, $\mathbf{b}_i(s)$, $(i = 1, 2, 3)$, serán las componentes de tres versores $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, formando una terna ortonormal que por continuidad conservará también su orientación o sentido. Determinado así el triedro intrínseco (a menos de una rotación de su posición inicial), la curva se obtiene a menos de una traslación, como se dijo en § 73-9.

b) *Sistemas no-homogéneos.* — Son los de la forma:

$$[109\text{-}16] \qquad \begin{cases} y' = p_{11}(x)\,y + p_{12}(x)\,z + q_1(x) \\ z' = p_{21}(x)\,y + p_{22}(x)\,z + q_2(x). \end{cases}$$

Como se demuestra que si (Y, Z) es la solución general del sistema homogéneo [109-11] y (η, ζ) una solución particular del sistema [109-16], la solución general de éste es:

$$[109\text{-}17] \qquad y = Y + \eta \quad , \quad z = Z + \zeta.$$

También se obtiene una solución particular de [109-16] por el método de LAGRANGE como en § 107-5, *a*. Se reemplazan en [109-17] C_1 y C_2 por funciones de x, $G_1(x)$ y $G_2(x)$ a determinar de modo que

* Prácticamente la integración del sistema [109-15] se reduce a la de una ecuación de RICCATI (§ 101-5, *b*). Véase G. VALIRON, II, pág. 320.

[109-18] $y = G_1(x)u_1 + G_2(x)u_2 \quad , \quad z = G_1(x)v_1 + G_2(x)v_2$

sea solución de [109-16]. Esto conduce al sistema de ecuaciones lineales en $G_1'(x)$, $G_2'(x)$:

$$G_1' u_1 + G_2' u_2 = q_1(x) \quad , \quad G_1' v_1 + G_2' v_2 = q_2(x) \quad ,$$

y como el determinante del sistema es $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$, por ser [109-12] un sistema fundamental de soluciones de [109-11], quedan determinados G_1, G_2 mediante cuadraturas. Agrupando en [109-18] los términos en las constantes de integración, se lleva [109-18] a la forma [109-17].

c) *Sistemas homogéneos de coeficientes constantes.* — El *sistema*

[109-19] $y' = p_{11}\, y + p_{12}\, z \quad , \quad z' = p_{21}\, y + p_{22}\, z \quad ,$

donde los coeficientes p_{ik} son constantes, se resuelve con la sustitución de D'ALEMBERT (§ 108-1), es decir, ensayando soluciones del tipo

[109-20] $y = \alpha e^{rx} \quad , \quad y = \beta e^{rx}$

que sustituídas en el sistema conducen, después de simplificar, al sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\begin{aligned} \alpha r &= p_{11}\,\alpha + p_{12}\,\beta \\ \beta r &= p_{21}\,\alpha + p_{22}\,\beta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (p_{11} - r)\alpha + p_{12}\,\beta &= 0 \\ p_{21}\,\alpha + (p_{22} - r)\beta &= 0 \end{aligned}$$

Condición de compatibilidad es (§ 15-6) la anulación del determinante de los coeficientes, o sea

$$(p_{11} - r)(p_{22} - r) = p_{12}\, p_{21} \quad ,$$

ecuación característcia, que determina uno o dos valores de r; suponiendo que sean distintos, cada uno determina un sistema de soluciones y la suma de ambos es la integral general.

El caso de raíces iguales se resuelve obteniendo la segunda solución del tipo xe^{rx}.

EJEMPLOS: 3. Sea el sistema de ecuaciones homogéneas:

$$y' = y + 4z \quad , \quad z' = 2y - z .$$

El sistema de ecuaciones algebraicas características es:

$$\begin{aligned} \alpha r &= \alpha + 4\beta \\ \beta r &= 2\alpha - \beta \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} 1 - r & 4 \\ 2 & -1 - r \end{vmatrix} = 0 \quad ;$$

como las raíces de esta ecuación $r^2 - 9 = 0$, son $+3$ y -3, las soluciones correspondientes son $\beta = \frac{1}{2}\alpha$, $\beta = -\alpha$. Para $\alpha = 1$ en cada caso, se tienen dos soluciones

$$\begin{aligned} y &= e^{3x} \\ z &= \tfrac{1}{2}e^{3x} \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} y &= e^{-3x} \\ z &= - e^{-3x} \end{aligned}$$

que forman un sistema fundamental, y entonces la solución general del sistema propuesto es:

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} \\ z &= \tfrac{1}{2}C_1 e^{3x} - C_2 e^{-3x} \end{aligned}$$

4. $\frac{dx}{dt} = x \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \quad , \quad \frac{dz}{dt} = -x + 5y + 2z.$

Haciendo $x = \alpha e^{rt}$, $y = \beta e^{rt}$, $z = \gamma e^{rt}$, se tiene para determinar r, la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 1-r & 0 & 0 \\ 2 & 3-r & 0 \\ -1 & 5 & 2-r \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Raíces: } r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ r_3 = 3.$$

Resulta la solución general:

$$x = C_1 e^t \quad , \quad y = -C_1 e^t + C_3 e^{3t} \quad , \quad z = 6C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 5C_3 e^{3t}.$$

3. **Sistemas de ecuaciones de órdenes superiores.** — *a*) Estos sistemas pueden reducirse a sistemas de ecuaciones *de primer orden*, introduciendo incógnitas auxiliares como se hizo en § 105-2 en el caso de una sola ecuación. Por ejemplo, el sistema

[109-21] $\quad y'' = f(x, y, z, y', z') \quad , \quad z'' = g(x, y, z, y', z')$

equivale al sistema

[109-22] $\quad y' = u \quad , \quad z' = v \quad , \quad u' = f(x, y, z, u, v) \quad ,$
$\quad v' = g(x, y, z, u, v).$

En general esta transformación no es conveniente para la resolución de un sistema, por el elevado número de ecuaciones que resultan, pero nos será útil para las consideraciones que siguen, en las que nos limitaremos a sistemas *normales* (es decir, resueltos en las derivadas de orden más alto) de *dos* ecuaciones de *segundo* orden [109-21], por brevedad y porque todo se extiende de inmediato a sistemas de más ecuaciones de órdenes mayores.

b) La forma equivalente [109-22] nos permite trasladar al sistema [109-21] las condiciones suficientes vistas en § 105-3, para la existencia y unicidad de la solución de [109-21] con las condiciones iniciales $y = y_0$, $y' = y'_0$, $z = z_0$, $z' = z'_0$ para $x = x_0$. La integral general contiene, por tanto, cuatro constantes arbitrarias, y en general tantas como las sumas de los órdenes de las ecuaciones del sistema, suma que se llama *orden del sistema*. Recíprocamente, una familia con n parámetros, de curvas del espacio, se puede representar por un sistema de orden n, con dos ecuaciones, que para $n = 4$ *podrá* ser del tipo [109-21]. También puede resultar un sistema con ecuaciones de orden distinto, por ejemplo, si la familia de curvas viene dada por un par de ecuaciones finitas tales que una contenga un parámetro y la otra tres.

EJEMPLOS: 1. Las ecuaciones de todas las rectas no paralelas al plano y, z son: $y = ax + b$, $z = cx + d$; derivando dos veces resulta el sistema:

$$y'' = 0 \quad , \quad z'' = 0.$$

2. Todas las circunferencias horizontales (es decir, situadas en planos paralelos al x, y) de radio fijo, vienen expresadas así:

$$z = c \quad , \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad ,$$

derivando una vez la primera y dos veces la segunda, resulta el sistema:

$$z' = 0 \quad , \quad r^2 = (1 + y'^2)^3 / y''^2 .$$

NOTA. La solución general de [109-21] puede considerarse también, en virtud de [109-22] y § 109-1, nota, como una congruencia de curvas en un espacio de cinco dimensiones.

c) El método indicado en § 109-1, *b*, para obtener una ecuación eliminante, con una sola función incógnita, es aplicable a sistemas de ecuaciones de órdenes superiores, para lo cual, en general, habrá que derivar cada ecuación un número suficiente de veces.

EJEMPLO. 3. En la teoría del péndulo de FOUCAULT se presenta el sistema siguiente, donde las derivadas son respecto de la variable independiente t (tiempo):

$$x'' - 2ay' + bx = 0, \ (\alpha); \qquad y'' + 2ax' + by = 0, \ (\beta).$$

En él es $a = \omega \operatorname{sen} \varphi$, $b = g/l$, representando ω la velocidad de rotación de la tierra (de valor $\frac{2\pi}{24 \,.\, 60^2 - 4 \,.\, 60}$ rad/s), φ la latitud, g el valor de la gravedad del lugar y l la longitud del péndulo.

Derivando dos veces la ecuación (α) y una sola vez la ecuación (β), tenemos:

$$x^{\text{IV}} - 2ay''' + bx'' = 0 \quad ; \quad y''' + 2ax'' + by' = 0 .$$

Eliminando y''' entre estas ecuaciones resulta:

$$x^{\text{IV}} + (4a^2 + b)x'' + 2aby' = 0 \quad ,$$

y eliminando ahora y' entre ésta y (α) se obtiene la ecuación eliminante:

$$x^{\text{IV}} + (4a^2 + 2b)x'' + b^2 x = 0 \quad ,$$

lineal de cuarto orden sin segundo miembro y con coeficientes constantes.

Resuelta esta ecuación mediante la ecuación característica, que es bicuadrada y da cuatro raíces: r_1, $-r_1$, r_2, $-r_2$, se tiene:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{-r_1 t} + C_3 e^{r_2 t} + C_4 e^{-r_2 t} .$$

El valor de y se despeja de (β):

$$y = -\frac{y''}{b} - \frac{2ax'}{b} = -\frac{1}{2ab} x''' - \left(\frac{1}{2a} + \frac{2a}{b}\right) x' \quad ,$$

sustituyendo y'' por su valor sacado de la ecuación que se obtiene derivando (α).

4. Sistemas de ecuaciones lineales de órdenes superiores. — Todas las propiedades vistas en § 109-2 dependen del carácter lineal de las ecuaciones, y subsisten cuando éstas son de órdenes superiores. Esto se ve pasando al sistema equivalente [109-22], pues las nuevas ecuaciones resultan también lineales y son de primer orden.

En ocasiones es más cómodo aplicar el método de LAGRANGE

(§ 109-2, *b*), o la sustitución de D'ALEMBERT (§ 109-2, *c*), directamente al sistema dado.

EJEMPLO. Resolver el sistema:

$$y'' + 2y' - 3z' = 0 \quad , \quad z'' - 8z' - 3z + 10y' = 0 .$$

Poniendo $y = \alpha e^{rx}$, $z = \beta e^{rx}$, resulta:

$$\alpha(r^2 + 2r) + \beta(-3r) = 0 \quad , \quad \alpha . 10r + \beta(r^2 - 8r - 3) = 0 .$$

Para que haya soluciones fuera de la trivial $\alpha = \beta = 0$, debe verificarse la *ecuación característica*:

$$\begin{vmatrix} r^2 + 2r & -3r \\ 10r & r^2 - 8r - 3 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

cuyas raíces son $r_1 = 0$; $r_2 = 1$; $r_3 = 2$; $r_4 = 3$. Para cada uno de estos valores de r resulta de una u otra de las ecuaciones en α y β, que $\beta/\alpha = 0$; 1; 4/3; 5/3, respectivamente. Entonces la solución general del sistema es:

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{3x} \; ; \; z = C_2 e^x + \frac{4}{3} C_3 e^{2x} + \frac{5}{3} C_4 e^{3x} .$$

5. **Aplicaciones a la dinámica.** — Hasta ahora hemos considerado problemas de mecánica en una sola dimensión, que nos conducían a una sola ecuación diferencial, pero en general conducirán a sistemas de dos o tres según se trate de problemas del plano o del espacio. En efecto; considerando como funciones incógnitas las coordenadas variables $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ del punto móvil, la ecuación fundamental de la dinámica

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

escrita en componentes, nos da el sistema

[109-23]
$$\begin{cases} mx'' = X(t; x, y, z, x', y', z') \\ my'' = Y(t; x, y, z, x', y', z') \\ mz'' = Z(t; x, y, z, x', y', z') \end{cases}$$

cuando se conocen las componentes X, Y, Z de la fuerza en función del tiempo, de la posición, y también de la velocidad, por ejemplo, cuando hay una resistencia del medio que dependa de la velocidad.

En muchos casos las ecuaciones son *independientes*, es decir, en cada una figura una sola función incógnita y entonces *se integran por separado*. Tal ocurre con el primero de los problemas que siguen.

EJEMPLOS: 1. *Tiro en el vacío.* — Ley del movimiento y ecuación de la trayectoria de un proyectil disparado con velocidad v_0, de inclinación α sobre la horizontal.

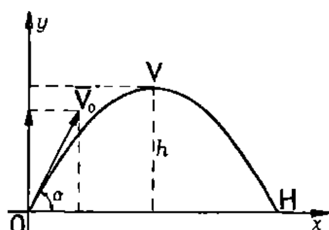


Fig. 356.

Eligiendo los ejes como indica la figura 356 y poniendo $t = 0$ en el instante del disparo se tiene:

$$x'' = 0 \quad , \quad y'' = -g$$

siendo para $t = 0$:

$$x_0 = 0 \quad , \quad y_0 = 0 \quad ,$$
$$x_0' = v_0 \cos\alpha \quad , \quad y_0' = v_0 \operatorname{sen}\alpha .$$

Una primera integración nos da, determinando C_1 y C_2 mediante las dos últimas condiciones iniciales:

$$x' = C_1 = v_0 \cos\alpha \quad , \quad y' = -gt + C_2 = -gt + v_0 \operatorname{sen}\alpha .$$

Integrando otra vez y aplicando las dos primeras condiciones iniciales, se tienen las ecuaciones que dan la ley del movimiento:

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t + C_3 = v_0 \cos\alpha \, . \, t \\ y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 \operatorname{sen}\alpha \, . \, t + C_4 = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 \operatorname{sen}\alpha \, . \, t \end{cases}$$

Éstas son además ecuaciones paramétricas de la trayectoria. Eliminando el parámetro t se obtiene la ecuación de la trayectoria parabólica en la forma

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \operatorname{tg}\alpha .$$

2. *Movimiento de los planetas.* — Adoptando un sistema de coordenadas con origen en el sol (supuesto fijo), la fuerza que actúa sobre un planeta tiene módulo

$$F = k\frac{Mm}{r^2} \text{ y cosenos directores } \quad -\frac{x}{r} \; , \; -\frac{y}{r} \; , \; -\frac{z}{r}$$

(k: constante de gravitación; M: masa del sol; m: masa del planeta, x, y, z: sus coordenadas funciones del tiempo t; r: su distancia al sol). Entonces las ecuaciones de la dinámica nos dan:

$$x'' = -kM\frac{x}{r^3} \; ; \; y'' = -kM\frac{y}{r^3} \; ; \; z'' = -kM\frac{z}{r^3} .$$

De las dos primeras resulta:

$$xy'' - yx'' = 0$$

y como $\dfrac{d}{dt}(xy' - yx') = xy'' - yx''$ se tiene

[109-24] $$xy' - yx' = C_1 \quad ,$$

y análogamente

$$yz' - zy' = C_2 \quad , \quad zx' - xz' = C_3 .$$

De aquí resulta $C_2 x + C_3 y + C_1 z = 0$ con lo que: *el planeta se mueve en un plano que pasa por el sol.*

Tomando (x, y) como plano del movimiento, [109-24] nos dice que la velocidad areolar A respecto del sol es constante (ley de las áreas de KEPLER). En efecto

[109-25] $$A = \tfrac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)\frac{d}{dt}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \frac{xy' - yx'}{2} = \frac{C_1}{2} .$$

Utilizando coordenadas polares $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, y letras acentuadas para indicar derivación respecto de t, de [109-25] se obtiene

$$r' = \frac{dr}{d\varphi}\varphi' = \frac{dr}{d\varphi}\frac{C_1}{r^2} = -C_1\frac{d(1/r)}{d\varphi} ,$$
$$r'' = -C_1\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2}\varphi' = -\frac{C_1^2}{r^2}\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} .$$

Si el punto $P(t)$ de la trayectoria se expresa en forma vectorial exponencial $P(t) = re^{i\varphi}$, el vector derivado será $P'(t) = r'e^{i\varphi} + r\varphi' ie^{i\varphi}$, donde el primer término da la componente radial y el segundo la perpendicular a ésta. Volviendo a derivar

$$P''(t) = (r'' - r\varphi'^2)e^{i\varphi} + (2r'\varphi' + r\varphi'')ie^{i\varphi} ,$$

el primer paréntesis del segundo miembro da la componente radial de la aceleración

$$a_r = r'' - r\varphi'^2 = \frac{C_1^2}{r^2}\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} - r\frac{C_1^2}{r^4}$$

que debe coincidir, por la ley de NEWTON, con $-kM/r^2$.

Si introducimos la constante $p = C_1^2/(kM)$, resulta así:

$$\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} ,$$

que integrada da:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d(1/r)}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1/r}{p} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{1-e^2}{2p^2}$$

con la constante de integración adecuadamente expresada.

Si la anterior se escribe, separando variables,

$$\frac{d(1/r)}{-\sqrt{\frac{e^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2}} = d\varphi ,$$

una inmediata cuadratura da para la trayectoria

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

ecuación focal de una cónica de parámetro p y excentricidad e, en coordenadas polares. Por tanto, la trayectoria del planeta es una cónica con el foco en el sol (KEPLER).

EJERCICIOS

1. Hallar el sistema de ecuaciones diferenciales de la familia de circunferencias (a, b, c constantes dadas):

$$ax + by + cz = \alpha \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 = \beta .$$

2. Hallar los sistemas de ecuaciones diferenciales de las siguientes familias de curvas, e integrarlos:

1º) $z = ax^2$, $z = by^2$;
2º) La radiación de rectas de centro (x_0, y_0, z_0).

3. *a*) Probar que las curvas ortogonales a una familia de superficies $F(x, y, z) = C$ satisfacen al sistema de ecuaciones $dx/F_x = dy/F_y = dz/F_z$;

b) Hallar los sistemas de ecuaciones de las trayectorias ortogonales de: *b*₁) Las esferas con centro en el origen; *b*₂) Los paraboloides $z = x^2 + Cy^2$; *b*₃) Las esferas de radio 1 con centro en el eje x.

4. Resolver los sistemas:

$a)$ $(dx)/y = (dy)/(-x) = (dz)/3$;

$b)$ $(dx)/(xz) = (dy)/(yz) = (dz)/(4xy)$;

$c)$ $y' + 1 = 0, \quad z' = x \operatorname{sen}(x + y)$.

5. Hallar la superficie engendrada por las curvas integrales del sistema $(dx)/(yz) = (dy)/(xz) = (dz)/(4xy)$ que cortan a la elipse $4y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0$.

6. Resolver el sistema $3y' + 2y + z' = 1, \quad y' + 4z' + 3z = 0$, con las condiciones iniciales $y = z = 0$ para $x = 0$.

7. Resolver: $2y' + z' + 5y + z = e^{3x}, \quad 3y' + 2z' + 9y + z = -2e^{3x}$.

8. Resolver: $y' - 2z + 3y = 12 - 3e^x, \quad z' + 5z + y = 7e^x - 27$.

9. Hallar el sistema de ecuaciones diferenciales de todas las circunferencias situadas en planos paralelos al xy.

10. Resolver el sistema: $y'' = 2y + 3z, \quad z'' = 2y + z$, siendo para $x = 0$: $y = 5, \quad y' = 7, \quad z = 0, \quad z' = 3$.

11. Resolver el sistema: $y'' + z' - 2z = 0, \quad z'' + y' - 2y = 0$.

12. Resolver: $y'' + 5y + z = \cos 2x, \quad z'' - y + 3z = 0$.

13. Un bombardero vuela horizontalmente con velocidad v a la altura h. ¿A qué distancia de la vertical del objetivo debe soltar una bomba?

14. En el problema del tiro en el vacío, hallar la mayor altura h y el alcance horizontal OH del proyectil; probar que éste es máximo para inclinación $\alpha = 45°$ y calcular el máximo.

15. Con referencia al ejercicio anterior, probar que variando la inclinación del cañón: $a)$ Los puntos no alcanzables son los exteriores a una parábola (*parábola de seguridad*) envolvente de las parábolas de tiro, y hallar su ecuación; $b)$ El lugar de los vértices de las parábolas de tiro es una elipse, dar su ecuación.

16. En un cometa de órbita hiperbólica, expresar la velocidad v en función del radio vector r conociendo la masa M del sol, su distancia d a las asíntotas y la constante de áreas α.

NOTAS AL CAPÍTULO XXVII

I. **Ecuaciones y funciones de Bessel.** — $a)$ *La ecuación diferencial de* BESSEL. — Hemos visto (§ 107-6, nota 2) que la resolución de ecuaciones diferenciales conduce a definir nuevas funciones. Entre las funciones especiales de este tipo, que se presentan con frecuencia en las aplicaciones están las funciones de BESSEL o soluciones de la *ecuación diferencial de* BESSEL (considerada por F. W. BESSEL en 1824, en el estudio de las órbitas de los planetas y sus perturbaciones por el movimiento del sol):

$$[\text{XXVII-1}] \qquad y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{r^2}{x^2}\right) y = 0 \quad , \quad r \text{ real} \geqslant 0.$$

Para cada valor del parámetro r se obtiene una ecuación diferencial *.

* Para $r = 0$, se tiene la ecuación diferencial considerada por primera vez por DANIEL BERNOULLI en 1733, al estudiar pequeñas oscilaciones de una cadena pesada, de densidad uniforme.

Un sistema fundamental de soluciones es el formado por las llamadas *funciones de* BESSEL *de orden* r: una finita para $x = 0$, se llama de *primera especie*, otra infinita para $x = 0$, de *segunda especie*.

b) *Funciones de* BESSEL *de primera especie*. — El método de coeficientes indeterminados (§ 107, *a*) puede aplicarse a una solución de [XXVII-1] en forma de serie de potencias, sólo si r es entero; de lo contrario puede aplicarse a una solución de la forma

[XXVII-2] $$y = x^p(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = a_0x^p + a_1x^{p+1} + a_2x^{p+2} + \dots ,$$

con $a_0 \neq 0$. Al reemplazar en [XXVII-1] resulta, anulando el coeficiente del término de menor grado, en x^{p-2}:

$$p(p-1)a_0 + p\,a_0 - r^2a_0 = (p^2 - r^2)a_0 = 0$$

de donde

[XXVII-3] $$p = r \quad \text{ó} \quad p = -r.$$

Consideremos primero el caso $p = r$. Resulta entonces, anulando los demás coeficientes al reemplazar en [XXVII-1]:

[XXVII-4] $$[(r-1)^2 - r^2]\,a_1 = 0$$

[XXVII-5] $$[(r+h)^2 - r^2]\,a_h + a_{h-2} = 0 \quad , \quad h = 2, 3, 4, \dots$$

De [XXVII-4], por ser $r \geqslant 0$, sigue $a_1 = 0$, y entonces por [XXVII-5]: $a_3 = a_5 = \dots = a_{2k+1} = \dots = 0$. Los coeficientes de subíndice par se obtienen sucesivamente por [XXVII-5] a partir de un valor fijado para a_0:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2r+2)} \;,\quad a_4 = -\frac{a_2}{4(2r+4)} =$$

$$= \frac{a_0}{2.4(2r+2)(2r+4)} \;,\quad \dots$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}\,k!(r+1)(r+2)\dots(r+k)} = \frac{(-1)^k a_0\Gamma(r+1)}{2^{2k}\,k!\Gamma(r+k+1)} \;,\quad \dots$$

La función de BESSEL $J_r(x)$ se obtiene eligiendo

$$a_0 = \frac{1}{2^r\,\Gamma(r+1)} .$$

Resulta, entonces, por reemplazo en [XXVII-2]

[XXVII-6] $$J_r(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{r+2k}}{2^{r+2k}\,k!\Gamma(r+k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{r+2k}}{k!\Gamma(r+k+1)} \;,\quad r \geqslant 0.$$

En particular es

[XXVII-6$_0$] $$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \frac{x^8}{2^8(4!)^2} - \dots$$

c) *Funciones de* BESSEL *de segunda especie*. — La ecuación diferencial [XXVII-1] no altera cambiando r por $-r$, de modo que al considerar el otro caso de [XXVII-3]: $p = -r$, se obtiene análogamente la solución

[XXVII-7] $$J_{-r}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{-r+2k}}{2^{-r+2k}\,k!\Gamma(-r+k+1)} \;,\quad r > 0, \text{ no entero.}$$

Todo ello suponiendo r no entero, pues en caso contrario se anula el denominador de a_{2k} para k suficientemente grande. En el caso r no en-

tero, es inmediato ver que las funciones [XXVII-6] y [XXVII-7] son linealmente independientes, y entonces

[XXVII-8] $y = C_1 J_r(x) + C_2 J_{-r}(x)$, (r *no entero*)

es la solución general de [XXVII-1].

Para $r = n$ entero, teniendo presente que la función $1/\Gamma(x)$ se anula (Cap. XXIX, nota VII) para $x = 0, -1, -2, -3, \ldots$, la serie [XXVII-7] comienza con $k = n$, y se obtiene fácilmente con el cambio de índice $h = k - n$, la relación

[XXVII-9] $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, (n *entero*).

El problema de hallar una solución de [XXVII-1], linealmente independiente de [XXVII-6] cuando $r = n$ es entero, puede resolverse por el método de § 107-5. En efecto, la sustitución

[XXVII-10] $y = J_n(x) \cdot w$

conduce a la ecuación de primer orden en $w' = v$:

$$J_n(x) \frac{dv}{dx} + \left[2J'_n(x) + \frac{J_n(x)}{x} \right] v = 0 ,$$

que se resuelve por separación de variables, dando

$$v(x) = \frac{C_2}{xJ^2_n(x)} \quad \therefore \quad w = \int_a^x v(t)\,dt + C_1 = C_1 + C_2 \int_a^x \frac{dt}{tJ^2_n(t)}$$

Se tiene entonces por [XXVII-10]

[XXVII-11] $y = C_1 J_n(x) + C_2 J_n(x) \displaystyle\int_a^x \frac{dt}{tJ^2_n(t)}$,

que expresa la solución general de la ecuación de Bessel como combinación lineal de dos soluciones particulares, que son linealmente independientes, pues como veremos, la segunda:

[XXVII-12] $J_n(x) \displaystyle\int_a^x \frac{dt}{tJ^2_n(t)}$

es infinita para $x \to 0$.

Por [XXVII-6] el integrando tiene un desarrollo en serie de la forma

$$\frac{1}{tJ^2_n(t)} = b_0 t^{-2n-1} + b_1 t^{-2n} + \ldots + b_{2n} t^{-1} + \ldots$$

La primitiva de esta serie comenzará con un término en t^{-2n} y el término en t^{-1} da uno en $\ln t$; por consiguiente la solución [XXVII-12] será de la forma

[XXVII-13] $y = cJ_n(x) \ln x + x^{-n}(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)$.

Conocida la forma [XXVII-13] de la segunda solución [XXVII-12], los coeficientes se calculan como en § 107-6, *a*, por reemplazo en la ecuación. Limitémonos a indicar que se obtienen así, con una elección conveniente de c y c_0 las *funciones de* Bessel $Y_n(x)$ *de segunda especie*:

[XXVII-14]
$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}[\gamma + \ln(\tfrac{1}{2}x)] J_n(x) - $$
$$- \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-j-1)!}{j!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j-n} -$$
$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \left[1 + \frac{1}{2} + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k+n} \right] ,$$

donde γ es la constante de Euler (§ 22-3, *b*).

Se llama en general *función de* BESSEL *de segunda especie* a toda solución de la ecuación de BESSEL [XXVII-1] infinita para $x = 0$. Un ejemplo es toda combinación lineal

[XXVII-15] $y = C_1 J_r(x) + C_2 Y_r(x)$, ($r > 0$, *entero o no*).

Por otra parte, la elección de las constantes c y c_0 es tal que [XXVII-14] verifica

[XXVII-16] $Y_r(x) = \dfrac{J_r(x)\cos r\pi - J_{-r}(x)}{\operatorname{sen} r\pi}$, $r > 0$, *no entero*;

por consiguiente puede tomarse como *forma normal* de las funciones de BESSEL de segunda especie:

[XXVII-17] $\begin{cases} Y_n(x) & \textit{para} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ J_{-r}(x) & \textit{para} \quad r > 0 \textit{ no entero.} \end{cases}$

d) *Funciones cilíndricas* $Z_r(x)$; *relación con la ecuación de* LAPLACE. — d_1) Indicaremos con $Z_r(x)$ toda solución de [XXVII-1], o lo que es lo mismo, toda combinación lineal de las funciones de BESSEL de 1ª y 2ª especie de orden r:

[XXVII-18] $Z_r(x) = \begin{cases} = C_1 J_r(x) + C_2 J_{-r}(x) & , \quad r > 0 \textit{ entero,} \\ = C_1 J_r(x) + C_2 Y_r(x) & , \quad r > 0 \textit{ no entero.} \end{cases}$

d_2) Las funciones Z_r aparecen en ciertas soluciones de la ecuación de LAPLACE, uniformes, no periódicas en z y de la forma

[XXVII-19] $U = R(\varrho) \, . \, L(\lambda) \, . \, Z(z)$

siendo ϱ, λ, z coordenadas cilíndricas (§ 84-3). La ecuación de LAPLACE se escribe entonces (§ 92-4, ejemplo 4):

$$\Delta U = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial RLZ}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 RLZ}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 RLZ}{\partial z^2} = 0$$

y conduce a

[XXVII-20] $\dfrac{1}{\varrho} \dfrac{R'}{R} + \dfrac{R''}{R} + \dfrac{1}{\varrho^2} \dfrac{L''}{L} + \dfrac{Z''}{Z} = 0.$

Busquemos soluciones con L''/L y Z''/Z constantes. Deberá ser

[XXVII-21] $L''/L = -m^2$ (m *entero*), $Z''/Z = a^2 > 0$

para que sea $L = L(\lambda)$ periódica con período 2π y $Z = Z(z)$ aperiódica. Entonces:

$$L = A\cos m\lambda + B \operatorname{sen} m\lambda \quad , \quad Z = C_1 e^{az} + C_2 e^{-az}$$

y se trata de buscar funciones armónicas de la forma

[XXVII-22] $U = R(\varrho)\,(A\cos m\lambda + B\operatorname{sen} m\lambda)\,(C_1 e^{az} + C_2 e^{-az})$.

Reemplazando [XXVII-21] en [XXVII-20] se encuentra para $R = R(\varrho)$ la ecuación diferencial

[XXVII-23] $\varrho^2 \dfrac{d^2R}{d\varrho^2} + \varrho \dfrac{dR}{d\varrho} + (a^2\varrho^2 - m^2)R = 0$

que escrita en la forma

[XXVII-24] $(a\varrho)^2 \dfrac{d^2R}{d(a\varrho)^2} + (a\varrho) \dfrac{dR}{d(a\varrho)} + [(a\varrho)^2 - m^2]R = 0$

y cotejada con [XXVII-1] muestra que tiene por solución general

[XXVII-25] $R(\varrho) = Z_m(a\varrho)$.

Como las funciones Z_m son útiles en el problema de hallar soluciones de la ecuación de LAPLACE con valores prefijados en un cilindro circular recto, se suelen llamar *armónicas cilíndricas* (al. *Zylinderfunktionen*).

e) Algunas propiedades de las funciones de BESSEL. *Funciones de* HANKEL. — e_1) Derivando respecto de x en la ecuación de BESSEL de orden cero $y'' + x^{-1}y' + y = 0$, resulta $(y')'' + x^{-1}(y')' + (1 - x^{-2})y' = 0$, que es la ecuación de BESSEL de orden 1 en $y' = dy/dx$. Entonces

$$y' = C_1J_1(x) + C_2Y_1(x) \quad ,$$

y como $y = C_3J_0(x) + C_4Y_0(x)$ de donde $y' = C_3J'_0(x) + C_4Y'_0(x)$, se expresan J_1, Y_1 como combinaciones lineales de J'_0, Y'_0. De los desarrollos en serie resulta

$$[\text{XXVII-26}] \quad J_1(x) = -J'_0(x) \quad , \quad Y_1(x) = -Y'_0(x).$$

e_2) *Funciones de orden mitad de un impar.* — En este caso las funciones de BESSEL se expresan como funciones elementales. Por ejemplo, para $r = \frac{1}{2}$ con la sustitución $y = z/\sqrt{x}$, la ecuación [XXVII-1] da $z'' + z = 0$, de donde $z = A\cos x + B\operatorname{sen} x$. Entonces $y = (A\cos x + B\operatorname{sen} x)/\sqrt{x}$ y de esta forma deben ser $J_{1/2}(x)$ y $J_{-1/2}(x)$. De los desarrollos en serie resulta

$$[\text{XXVII-27}] \quad J_{1/2}(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \quad , \quad J_{-1/2}(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}.$$

De [XXVII-16] sigue

$$[\text{XXVII-28}] \quad Y_{1/2}(x) = \frac{-1}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi} J_{-1/2}(x) = -J_{-1/2}(x) = \frac{-\cos x}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}.$$

Análogamente, para $r = (2n+1)/2$, las funciones J_r y J_{-r} son producto de $(\frac{1}{2}\pi x)^{-\frac{1}{2}}$ por combinaciones de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ con coeficientes polinomios en $1/x$. Así:

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x\right],$$

$$J_{-3/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}\left[-\operatorname{sen} x - \frac{\cos x}{x}\right].$$

e_3) *Comportamiento asintótico. Funciones de* HANKEL. — El desarrollo [XXVII-6] muestra que para $x \to 0$ es $J_r(x)$ del orden de x^r. Se demuestra que para $x \to \infty$ valen las siguientes equivalencias (§ 24-3, c_3), casos particulares de *desarrollos asintóticos* que pueden verse en las obras citadas en nota IV, 7:

$$[\text{XXVII-29}] \quad \begin{matrix} J_r(x) \\ Y_r(x) \end{matrix} \sim (\tfrac{1}{2}\pi x)^{-\frac{1}{2}} \begin{matrix} \cos \\ \operatorname{sen} \end{matrix} [x - \tfrac{1}{2}\pi(r + \tfrac{1}{2})].$$

En algunas cuestiones las funciones de BESSEL (en la figura 357 se representan las de orden cero) se comportan en forma semejante a las funciones sinusoidales *. Serán igualmente semejantes a e^{ix} y e^{-ix} las combinaciones

$$[\text{XXVII-30}] \quad H_r^{(1)}(x) = J_r(x) + iY_r(x) \quad , \quad H_r^{(2)}(x) = J_r(x) - iY_r(x) \quad ,$$

llamadas *funciones de* BESSEL *de tercera especie* o *funciones de* HANKEL de orden r. Para $x \to \infty$ es:

$$[\text{XXVII-31}] \quad H_r^{(1)}(x) \sim \frac{e^{i[x - \frac{1}{2}\pi(r+\frac{1}{2})]}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \quad , \quad H_r^{(2)}(x) \sim \frac{e^{-i[x - \frac{1}{2}\pi(r+\frac{1}{2})]}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}}.$$

---

* Todas las gráficas de $J_n(x)$ é $Y_n(x)$ tienen aspecto de sinusoide amortiguada, todos los ceros son reales y simples y forman sucesión creciente aunque no progresión aritmética, pero las ondas tienen longitudes que se aproximan indefinidamnete a π. Así, el sexto cero 18,071 de J_0 difiere del séptimo cero 21,212 en 3,141. Todos los desarrollos en series de potencias tienen radio infinito.

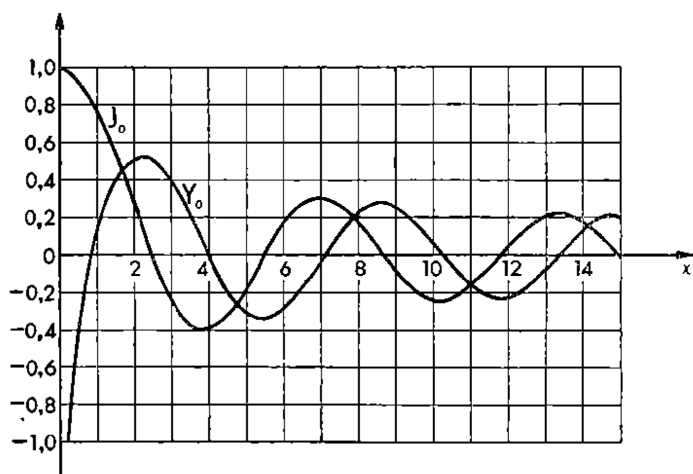


Fig. 357.

f) *Funciones de* BESSEL *modificadas*. — La solución de la ecuación diferencial

[XXVII-32] $$x^2y'' + xy' - (x^2 + r^2)y = 0$$

es (cfr. [XXVII-23] con $a = i$) $Z_r(ix)$. Como forma normal de la solución finita para $x \to 0$ ó *función de* BESSEL *modificada de primera especie* de orden r tomaremos:

[XXVII-33] $$I_r(x) \equiv i^{-r} J_r(ix)$$

donde el factor i^{-r} tiene por objeto hacer que $I_r(x)$ sea real para x real.

La forma normal de la solución infinita para $x \to 0$ ó *función de* BESSEL *modificada de segunda especie* de orden r se define generalmente (cfr. [XXVII-16]) por:

[XXVII-34] $$K_r(x) = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\operatorname{sen} r\pi} \left[I_{-r}(x) - I_r(x) \right] \quad ,$$

pues si bien para $r = n$ entero es $I_{-n}(x)$ también de primera especie, no lo es en el límite para $r \to n$ de $K_r(x)$, que se toma como "verdadero valor" para completar la definición [XXVII-34].

Para $x \to \infty$ estas funciones (en la figura 358, se representan con distintas escalas las de orden cero) se comportan, salvo un factor en $x^{-\frac{1}{2}}$,

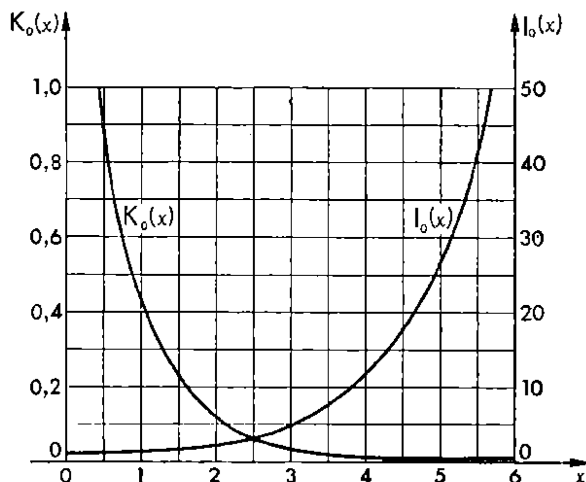


Fig. 358.

como exponenciales reales. Por ejemplo, es:

$$I_0(x) \sim e^x/\sqrt{2\pi x} \quad , \quad K_0(x) \sim e^{-x}\sqrt{\pi/(2x)}.$$

g) *Notaciones.* — Como las notaciones no son uniformes conviene relacionar entre sí las más usuales:

g_1) Las funciones de BESSEL de primera especie se definen e indican de la misma manera por casi todos los autores.

g_2) Las funciones de BESSEL $Y_\nu(x)$ fueron introducidas e indicadas así por H. WEBER. JAHNKE-EMDE (citado en Cap. VII, nota II, *d*) las indica $N_\nu(x)$ = *funciones de* NEUMANN, y algunos autores alemanes llaman así (siguiendo a HANKEL, 1869) a *toda* función de BESSEL de segunda especie. K. NEUMANN introdujo (1867) la solución de 2ª especie que en nuestras notaciones es $\frac{1}{2}\pi Y_\nu(x) - (\gamma - \ln 2)J_\nu(x)$, indicada por algunos autores como MAC LACHLAN (citado en nota IV, 7) por $\mathbf{Y}_\nu(x)$ y por otros como WATSON (citado en nota IV, 7 y WHITTAKER y WATSON (citado en Cap. XI, nota IV, 2) por $Y^{(\nu)}(x)$. En GRAY, MATHEWS y MAC ROBERT (citado en nota IV, 7) se indica con Y_ν la forma de NEUMANN de modo que nuestra Y_ν de WEBER es en su notación $(2/\pi)Y_\nu + (\gamma - \ln 2)J_\nu$.

g_3) Tampoco son unánimes ni las definiciones ni las notaciones para las funciones de BESSEL modificadas. Los autores alemanes (por ejemplo JAHNKE-EMDE) no usan la palabra *modificada* y las denotan por los *segundos miembros* de [XXVII-33] y

$$K_\nu(x) = \tfrac{1}{2}\pi i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) \quad , \qquad \text{[XXVII-35]}$$

considerándolas simplemente como funciones de BESSEL o de HANKEL (de argumento imaginario).

II. **Puntos singulares de ecuaciones diferenciales de primer orden.** — Un punto $P(x_0, y_0)$ se llamará *singular* de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, cuando por P no pasa ninguna curva integral, o bien por lo menos dos que no coindican en ningún entorno de P. En caso contrario el punto P se llama *regular*, tal ocurre por ejemplo (§ 104-4, *a*) cuando $f(x, y)$ cumple en P la condición de LIPSCHITZ.

En especial, son puntos singulares de la ecuación diferencial

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

las intersecciones de las curvas $P(x,y) = 0$, $Q(x,y) = 0$. Si $x = y = 0$ es una de ellas, y suponemos $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ desarrollables en series de potencias de x é y, la ecuación anterior puede aproximarse por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2x + b_2y}{a_1x + b_1y} \quad , \quad con \quad a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0 \quad , \qquad \text{[XXVII-36]}$$

a cuyo estudio nos limitaremos en *a*), señalando casos más generales en *b*).

a) La ecuación [XXVII-36] puede escribirse

$$dx/(a_1x + b_1y) = dy/(a_2x + b_2y) = dt \quad ,$$

obteniéndose así el sistema

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y. \qquad \text{[XXVII-37]}$$

La ecuación característica (§ 109-2, *c*) es

$$(a_1 - r)(b_2 - r) - b_1a_2 = 0 \quad , \qquad \text{[XXVII-38]}$$

y pueden presentarse los siguientes casos:

a_1) *Raíces r_1, r_2 reales y del mismo signo.* — Si $r_1 \neq r_2$ las curvas integrales son (cfr. § 109-2, c):

[XXVII-39] $\quad x = C_1\alpha_1 e^{r_1 t} + C_2\alpha_2 e^{r_2 t} \quad , \quad y = C_1\beta_1 e^{r_1 t} + C_2\beta_2 e^{r_2 t}$

siendo C_i constantes arbtirarias y α_i, β_i constantes dadas con $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$.

Si $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_2)$, se obtienen, si $b_1 \neq 0$, las soluciones

$$\begin{cases} x = 2b_1 e^{r_1 t} \\ y = (b_2 - a_1) e^{r_1 t} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = 2b_1 t e^{r_1 t} \\ y = [(b_2 - a_1)t + 2] e^{r_1 t} \end{cases}$$

y entonces la solución general es

[XXVII-40] $$x = (2C_1 b_1 t + 2C_2 b_1) e^{r_1 t} \quad ,$$
$$y = [C_1(b_2 - a_1)t + 2C_1 + C_2(b_2 - a_1)] e^{r_1 t} .$$

En el mismo caso $r_1 = r_2$ se tiene si $b_1 = 0$, $r_1 = a_1 = b_2$, y el sistema [XXVII-37] cuya primera ecuación es eliminante, tiene la solución

[XXVII-41] $\quad x = C_1 e^{a_1 t} \quad , \quad y = (C_1 a_2 t + C_2) e^{a_1 t} .$

En las tres circunstancias estudiadas, el punto de la curva integral tiende hacia el origen cuando $t \to (-\mathrm{sg}\, r_i)\infty$. La tangente en el origen es la misma para todas las curvas integrales menos una (por ejemplo, la correspondiente a $C_1 = 0$ en [XXVII-39] si es $|r_1| > |r_2|$). Esto no ocurre en cambio en el caso [XXVII-41] si además $a_2 = 0$, pues entonces las curvas integrales son las rectas por el origen $y/x = C_2/C_1$. El punto singular se llama *nodo* (al. *Knotenpunkt*; in. *node* = *nodal point*; fr. *nœud*), *nodo cualquiera* en la primera alternativa general (fig. 359) y *nodo isotropo* en la segunda excepcional (fig. 360).

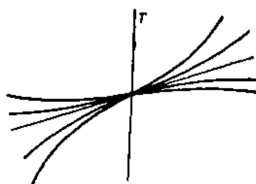


Fig. 359. — Nodo cualquiera.

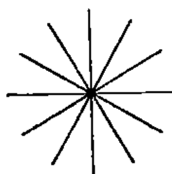


Fig. 360. — Nodo isotropo.

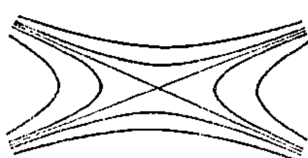


Fig. 361. — Punto de ensilladura.

a_2) *Raíces r_1, r_2 reales y de signos contrarios.* — Las únicas curvas integrales que pasan por el origen son las rectas $y = (\beta_i/\alpha_i)x$, $(i = 1, 2)$, que resultan de [XXVII-39] para $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$ respectivamente y son distintas por ser $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Las otras curvas integrales tienen la disposición indicada en la figura 359, con las rectas $y = (\beta_i/\alpha_i)x$ por asíntotas. Considerándolas como curvas de nivel de una superficie, ésta tiene el aspecto de una silla de montar o del paso entre dos montañas. El punto singular (fig. 361) se llama *punto de ensilladura* (al. *Sattelpunkt*; in. *saddle-point*; fr. *col*).

a_3) *Raíces imaginarias $a \pm bi$. — Si es* $a = 0$, las curvas integrales [XXVII-37], que pueden escribirse en la forma

$$x = C(\alpha' \cos bt - \alpha'' \operatorname{sen} bt) \quad ; \quad y = C(\beta' \cos bt + \beta'' \operatorname{sen} bt) \quad ,$$

son elipses homotéticas con centro en el origen. Éste se llama *centro* (fig. 362) o *punto vorticoso* (*Wirbelpunkt*; *vortex point*; *centre*).

Si es $a \neq 0$, las ecuaciones [XXVII-39] pueden llevarse a la forma

$$x = Ce^{at}(\alpha' \cos bt + \alpha'' \operatorname{sen} bt) \quad ; \quad y = Ce^{at}(\beta' \cos bt + \beta'' \operatorname{sen} bt) \quad ,$$

y cada punto M de la curva integral resulta del punto P de la elipse anterior situado en el mismo radio vector poniendo $OM = e^{at}OP$. Las curvas integrales se arrollan alrededor del origen, que es punto asintó-

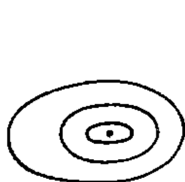


Fig. 362. — Centro.



Fig. 363. — Foco.

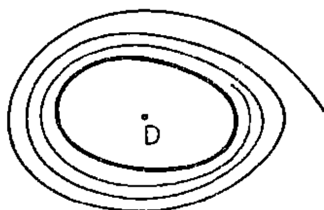


Fig. 364. — Ciclo límite.

tico para $t \to (-\text{sg}\, a)\infty$; si las elipses son circunferencias, se tienen espirales logarítmicas. El punto singular (fig. 363) se llama *punto espiral* o *foco* (*Strudelpunkt*; *spiral point*; *foyer*).

b) En el caso más general de la ecuación

$$[\text{XXVII-42}] \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_2x + b_2y + g(x,y)}{a_1x + b_1y + f(x,y)}$$

con $a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$ y $f(x,y)$, $g(x,y)$ funciones continuas que verifican: 1º) una condición de LIPSCHITZ en un círculo con centro el origen, 2º) $f(x,y) = o(|x| + |y|)$, $g(x,y) = o(|x| + |y|)$; se presentan, en otro orden, casos que designaremos con los mismos nombres anteriores porque las curvas integrales presentan el mismo comportamiento cualitativo [en un nodo cualquiera la recta r (fig. 359) se reemplaza por un nuevo haz de curvas tangentes entre sí; en un nodo isótropo se tienen curvas con tangente variable en el origen; para un centro no se tienen elipses, pero sí curvas cerradas alrededor del origen, etc].

El caso análogo a a_3) puede dar lugar a una singularidad cualitativamente diferente de las anteriores. Las curvas integrales al dar vueltas alrededor del origen pueden ni cerrarse (como en un centro), ni tener el origen como punto asintótico (como en un foco), sino tener como asíntota una curva cerrada, simple y continua, que rodea el origen (fig. 362). Esta curva, que corta una sola vez a cada semirrecta que parte del origen, y es también curva integral, se llama *ciclo límite*. La existencia de un ciclo límite da lugar a diversos casos según lo que acontezca en el recinto D que limita (fig. 364).

b_1) Existe en D un punto M tal que la curva integral por él tiene el origen como punto asintótico. El origen es entonces un *foco*;

b_2) Existe en D un punto M tal que la curva integral que pasa por él es cerrada y limita un recinto D' donde todas las curvas integrales son cerradas. El origen es entonces un *centro*;

b_3) No se presenta ninguno de los casos anteriores, y existen en D infinitas curvas integrales cerradas Γ, e infinitas curvas integrales no cerradas que tienen por asíntotas un número infinito de curvas Γ, las que son entonces nuevos ciclos límites que convergen hacia el origen O, entonces éste se llama *centro impropio* o *no verdadero*. En virtud de un teorema de BENDIXSON, este caso b_3 no puede presentarse si las funciones $f(x,y)$, $g(x,y)$ son *analíticas* (§ 114).

III. Problemas de contorno del tipo de Sturm-Liouville. — *a) Problemas lineales.* — Hemos estudiado con detenimiento las ecuaciones y sistemas de ecuaciones *lineales* (§§ 107 a 109), y la *estructura lineal del conjunto de soluciones* (§§ 107-1 y 3, 109-2). La determinación de aquellas soluciones que cumplan no ya ciertas condiciones *iniciales*, sino *de contorno* (condiciones en los extremos de un intervalo), conduce, en los casos más importantes para las aplicaciones, al concepto de *problema lineal* (homogéneo o no homogéneo) que, por presentarse en diversos capítulos del Análisis como expresiones matemáticas distintas de una misma estructura abstracta, conviene formular en la siguiente forma general:

DEF. 1. *Problema lineal homogéneo* es la determinación de un elemento y de un espacio vectorial o lineal E (sobre un cuerpo R de escalares, por ejemplo números reales, Cap. II, nota III, *b*; Cap. XVII, nota I), mediante ciertas condiciones, cuyo conjunto designaremos por Γ, tales que:

1º) Si y verifica Γ, también cy, $(c \in \mathrm{R})$;

2º) Si y_1 é y_2 verifican Γ, también $y_1 + y_2$.

Como consecuencia, toda combinación lineal $C_1 y_1 + C_2 y_2$ satisface a Γ.

En los tipos más importantes, y es una función o conjunto de funciones u_j, y las condiciones englobadas bajo el símbolo Γ vienen expresadas por ecuaciones funcionales lineales homogéneas $\mathrm{L}_i[u_j] = 0$, y algebraicas lineales homogéneas $\mathrm{l}_i(u_j, u'_j) = 0$, que ligan los valores de u_j, u'_j en el contorno.

Se tiene un *problema lineal no homogéneo* cuando estas ecuaciones son en cambio del tipo: $\mathrm{L}_i[u_j] = \mathrm{h}_i(x)$, $\mathrm{l}_i(u_j, u'_j) = k_i$, cuyos segundos miembros son funciones conocidas $\mathrm{h}_i(x)$ y números conocidos k_i, no todos nulos.

Las y pueden ser vectores de E_n, o sea conjuntos de n números reales, como en los sistemas lineales algebraicos, o pueden ser funciones de una variable, como en las ecuaciones diferenciales ordinarias, o en las ecuaciones integrales (Apéndice II), o funciones de varias variables, como en las ecuaciones en derivadas parciales (Cap. XXVIII).

La condición lineal Γ puede ser de tipos muy diversos, que abarcan multitud de problemas físicos y de algoritmos matemáticos. He aquí los tres tipos más importantes de problemas lineales:

I) Si las y son vectores de E_n, un sistema de ecuaciones algebraicas lineales homogéneas o no homogéneas, define por sí solo un problema lineal.

II) Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$\text{[XXVII-43]} \qquad \mathrm{L}(y) \equiv \mathrm{r}(x)y'' + \mathrm{p}(x)y' + \mathrm{q}(x)y = 0 \quad ,$$

no define por sí sola un problema lineal, aunque esta condición satisface a las exigencias 1º) y 2º) de Def. 1, pues necesita para la determinación de y condiciones complementarias.

Si éstas son las condiciones iniciales $\mathrm{y}(a) = \alpha$, $\mathrm{y}(b) = \beta$, (también llamadas de CAUCHY), queda determinada y, pero el problema no es homogéneo, salvo si $\alpha = \beta = 0$, caso trivial de solución $y \equiv 0$.

La novedad interesante aparece ya cuando las condiciones son *de contorno*, por ejemplo, $\mathrm{y}(a) = 0$, $\mathrm{y}(b) = 0$; el lector verá sin dificultad, partiendo de la expresión $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ de la integral general, que debe ser

$$\text{[XXVII-44]} \qquad \mathrm{y}_1(a)\mathrm{y}_2(b) = \mathrm{y}_1(b)\mathrm{y}_2(a) \quad ,$$

condición que podrá satisfacerse si la ecuación tiene un parámetro, como veremos en d_1).

III) Como límites de los sistemas lineales algebraicos:

	homogéneo	no homogéneo
[XXVII-45]	$\sum k_{rs} x_s = 0$	$\sum k_{rs} x_s = h_r$

cuando la matriz $\{k_{rs}\}$ formada por n^2 números se sustituye por una función continua $\mathrm{k}(r, s)$ definida en el cuadrado $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, resultan las llamadas *ecuaciones integrales de primera especie* (Apéndice II):

	homogénea	no homogénea
[XXVII-46]	$\int_0^1 \mathrm{k}(r, s)\mathrm{x}(s)\mathrm{d}s = 0$	$\int_0^1 \mathrm{k}(r, s)\mathrm{x}(s)\mathrm{d}s = \mathrm{h}(r)$,

que por sí solas definen problemas lineales, sin condiciones complementarias.

b) *Teorema de la alternativa.* — Recordemos el teorema básico de los sistemas de ecuaciones lineales (§ 15-5), en forma tal que no exija el algoritmo de los determinantes, por no existir concepto análogo en los problemas de Análisis mencionados en II y III, haciendo así posible la generalización del teorema a estos y a otros problemas lineales sin tropezar con ese escollo. Con esta salvedad que algo menoscaba su alcance, el teorema de ROUCHÉ-FROBENIUS se resume así, después de observar que sólo cuando la característica h de la matriz del sistema iguala al número m de incógnitas, no puede aumentar al pasar a la matriz orlada:

Dado un sistema de ecuaciones lineales y su correspondiente sistema homogéneo, sólo caben dos casos:

CASO REGULAR: *El sistema homogéneo carece de solución (fuera de la trivial* $y_1 = \ldots = y_m = 0$) *y el sistema no homogéneo tiene solución única;*

CASO SINGULAR: *Si el sistema homogéneo tiene soluciones (no triviales), el no homogéneo no es determinado (en general incompatible, pero puede ser indeterminado).*

Llamando *imposible* al problema homogéneo cuando sólo admite solución trivial (cfr. § 15-6), esta alternativa puede esquematizarse así:

Problema homogéneo	*Problema no homogéneo*
imposible	determinado
posible	imposible o indeterminado.

Veremos (c_2, Cap. XXVIII, notas VI, a_{23}; IX, f; Ap. II — 2b) que esta alternativa subsiste en todos los problemas lineales que hemos de estudiar. En ellos conservaremos la nomenclatura introducida de casos regular y singular, etc. En el caso singular, para que el problema no homogéneo sea posible (y entonces indeterminado), los términos independientes de las incógnitas o de la función incógnita deben cumplir ciertas condiciones (en el caso algebraico, deben verificar las relaciones lineales que ligan a los primeros miembros).

Muchas importantes cuestiones físicas conducen a problemas homogéneos de tipo regular, es decir, sin solución; pero eligiendo convenientemente un parámetro λ, se logra hacerlos posibles (ver d_1). Tales valores de λ, cuyo cálculo es relativamente fácil en los sistemas algebraicos I (§ 63-5; Ap. II-2), y muy difícil en los de tipo II y III, son los *valores propios* o *autovalores*, y las soluciones y_n que determinan, se llaman *funciones propias* o *autofunciones.*

c) *Problemas de contorno para ecuación diferencial sin parámetros.* — *c_1*) *Problema homogéneo.* — c_{11}) Consideremos la ecuación lineal general de segundo orden [XXVII-43] con coeficientes funciones continuas de x

en $[a, b]$, y como condiciones de contorno en los extremos del intervalo $[a, b]$ adoptemos las más generales de tipo lineal homogéneo (a, Def. 1). Las clasificaremos así:

Problemas puros de contorno:

[XXVII-47] Tipo A. *Ordenadas nulas*: $y(a) = 0 \quad , \quad y(b) = 0.$

[XXVII-48] Tipo B. *Pendientes nulas*: $y'(a) = 0 \quad , \quad y'(b) = 0.$

Problemas mixtos de contorno:

[XXVII-49] Tipo C: $\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0.$

Formada la solución general mediante dos soluciones y_1, y_2, independientes, veamos si las condiciones [XXVII-49] determinan la integral:

[XXVII-50] $$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad ,$$

es decir, si están determinados los coeficientes C_1, C_2 por las ecuaciones:

[XXVII-51] $$\begin{aligned} C_1[\alpha y_1(a) + \beta y_1'(a)] + C_2[\alpha y_2(a) + \beta y_2'(a)] &= 0, \\ C_1[\gamma y_1(b) + \delta y_1'(b)] + C_2[\gamma y_2(b) + \delta y_2'(b)] &= 0. \end{aligned}$$

Condición necesaria y suficiente es (§ 15-6) $\Delta = 0$; siendo:

[XXVII-52] $$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha y_1(a) + \beta y_1'(a) & \alpha y_2(a) + \beta y_2'(a) \\ \gamma y_1(b) + \delta y_1'(b) & \gamma y_2(b) + \delta y_2'(b) \end{vmatrix} .$$

En el tipo A esta condición es [XXVII-44], y en el tipo B:

[XXVII-53] $$y_1'(a) y_2'(b) = y_1'(b) y_2'(a).$$

De otro modo: *La razón de valores (o derivadas) de dos integrales independientes debe ser igual en ambos extremos.* Para el caso general C, que comprende ambos, la conclusión es ésta:

TEOR. 1. *El problema lineal homogéneo de la ecuación de segundo orden* [XXVII-43], *con condición de contorno* [XXVII-49], *es, en general, imposible. Necesario y suficiente para que sea posible es* $\Delta = 0$, *y entonces hay una solución (salvo un factor numérico arbitrario), o lo son todas las de la ecuación.*

En el tipo A sucede esto último si y_1 é y_2 se anulan en a y b, pues entonces se anula en ellos toda y. En el tipo B, si y_1', y_2', son nulas en a y b, también lo es toda y'.

c_{12}) *Discusión gráfica*. — Para los tipos A y B es inmediata la discusión sin cálculo ninguno. Las figuras 365 a 370 se refieren al tipo A. Por

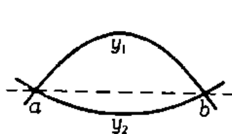


Fig. 365.
∞^1 soluciones.

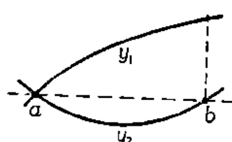


Fig. 366.
1 solución.

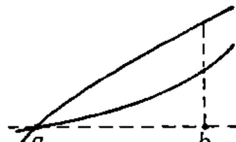


Fig. 367.
1 solución.

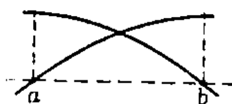


Fig. 368.
0 solución.

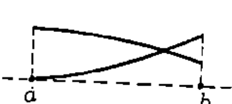


Fig. 369.
0 solución.

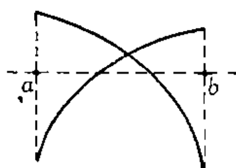


Fig. 370.
0 solución ó 1 solución.

ejemplo en el caso de la fig. 366 toda solución del problema de contorno es $C_2y_2(x)$ y entonces hay *una* (salvo un factor numérico constante). En la fig. 370 puede haber solución o no, pues las cuatro ordenadas extremas pueden o no verificar [XXVII-44].

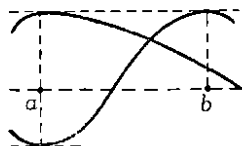


Fig. 371.
1 solución.

Análogamente se discute el tipo B y hay seis casos correlativos; el correspondiente a la fig. 366 está ilustrado en la fig. 371.

$c_{(1)}$) DEF. 2. En el problema de contorno correspondiente a un intervalo $[a, b]$, un *extremo* de éste (por ejemplo a) se llama *regular* o ***singular*** según sea $r(a) \neq 0$ ó $r(a) = 0$.

Si a es regular, en un semientorno de a se cumplen las condiciones del teor. 1 de § 107-1, y entonces hay una integral con valores prefijados $y(a)$, $y'(a)$, y sólo una. Lo mismo para el extremo b.

Obsérvese que en el tipo A de problema lineal, los casos en que *todas* las integrales se anulan en un extremo (p. ej. a, figs. a, b, c), exigen que éste sea ***singular***, pues de lo contrario habría una integral con valores prefijados $y(a) \neq 0$, $y'(a) = 0$. Lo mismo en el tipo B si *todas* las integrales tienen $y'(a) = 0$, pues si a fuera regular se podría elegir una integral con $y'(a) \neq 0$.

c_2) *Problema no homogéneo. Teorema de la alternativa.* — Si en [XXVII-43] se pone en el segundo miembro una función conocida $h(x)$ y en los segundos miembros de [XXVII-49] números conocidos μ, ν, la integral general de la ecuación no homogénea será (§ 107-3):

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + z(x),$$

donde $z(x)$ es una integral particular cualquiera de dicha ecuación no homogénea; y al formar el sistema lineal [XXVII-51] aparecen en los segundos miembros los números conocidos:

[XXVII-54] $$\mu - \alpha z(a) - \beta z'(a) \quad , \quad \nu - \gamma z(b) - \delta z'(b).$$

En el caso $\Delta \neq 0$ (problema homogéneo *imposible*, cfr. b) resulta problema no homogéneo *determinado*; y en el caso $\Delta = 0$, es decir, de proporcionalidad de los corchetes en [XXVII-51], es condición necesaria y suficiente para que el problema no homogéneo sea posible, que esa razón sea la misma de los números [XXVII-54]. Si esos cuatro corchetes son nulos (sistema homogéneo indeterminado), también deben serlo los [XXVII-54], y *toda* integral satisface al problema de contorno.

d) ***Ecuaciones con un parámetro.*** — d_1) *Autovalores y autofunciones. Ortogonalidad.* — Se logra que formen la derivada del producto $r(x).y'$ los dos primeros términos de la ecuación general homogénea:

[XXVII-55] $$y'' + p(x)y' + [u(x) + \lambda v(x)]y = 0,$$

multiplicándola por la función $r = r(x) > 0$ tal que $rp = r'$, o sea, $\ln r = P$ (primitiva de p), es decir $r = e^P$.

La ecuación así obtenida es del tipo:

[XXVII-56] $$[r(x)y']' + [q(x) + \lambda\varrho(x)]y = 0.$$

Si agregamos las condiciones [XXVII-49] de contorno, el problema lineal se llama *de tipo* STURM-LIOVILLE (cfr. Cap. XXVIII, nota V, a).

Si y_1, y_2 son dos soluciones correspondientes a los valores λ_1, λ_2:

[XXVII-57] $$(ry_1')' + (q + \lambda_1\varrho)y_1 = 0 \quad , \quad (ry_2')' + (q + \lambda_2\varrho)y_2 = 0,$$

restando después de multiplicar por y_2 é y_1 respectivamente:

$$y_2(ry_1')' - y_1(ry_2')' = (\lambda_2 - \lambda_1)\varrho y_1 y_2 \quad ,$$

pero el primer miembro es la derivada de

$$y_2(ry_1') - y_1(ry_2') = r(y_1'y_2 - y_1y_2'),$$

luego integrando en $[a, b]$ resulta:

$$\text{[XXVII-58]} \qquad r(y_1'y_2 - y_1y_2')\Big|_a^b = (\lambda_2 - \lambda_1)\int_a^b \varrho y_1 y_2\, dx.$$

El primer miembro desarrollado es:

$$r(b)[y_1'(b)y_2(b) - y_1(b)y_2'(b)] - r(a)[y_1'(a)y_2(a) - y_1(a)y_2'(a)] = 0,$$

pues siendo y'/y constante en b, vale igual para y_1 como para y_2, luego es nulo el primer corchete, y análogamente el segundo. Como es $\lambda_1 \neq \lambda_2$, resulta:

TEOR. 2. *Las autofunciones del problema de* STURM-LIOUVILLE, *correspondientes a dos autovalores distintos, son ortogonales respecto del núcleo* ϱ (§ 97-8), *es decir:*

$$\text{[XXVII-59]} \qquad \int_a^b \varrho(x) y_1(x) y_2(x)\, dx = 0.$$

TEOR. 3. *Si algún extremo es regular* (def. 2), *los autovalores del problema de* STURM-LIOUVILLE *son simples.*

Pues si al valor λ correspondiesen las soluciones independientes $y_1(x)$, $y_2(x)$, toda solución $y = C_1y_1 + C_2y_2$ satisfaría a la misma ecuación [XXVII-56] y a las dos condiciones [XXVII-49], lo que exigiría, como vimos en c_{13}, que ambos extremos fueran singulares.

d_2) *Propiedades en el caso* $\varrho(x) \geqslant 0$. — Todo lo dicho vale para valores complejos λ y sus correspondientes autofunciones. Si y_1 corresponde a λ_1 y en [XXVII-57] se pone la función conjugada y_2 y el número λ_2 conjugado de λ_1, es claro que también se satisfará la ecuación; luego, *si un autovalor es complejo, también el número conjugado es autovalor, con autofunción conjugada de la primera.*

Pero si $\varrho(x) \geqslant 0$, la ortogonalidad expresada por teor. 2 muestra que tales funciones propias conjugadas significan contradicción, pues siendo positivo y continuo el integrando, debe ser positiva la integral. Por tanto:

TEOR. 4. *Los autovalores y autofunciones de todo problema de* STURM-LIOUVILLE *con* $\varrho(x) \geqslant 0$, *son todos reales.*

Desde ahora supondremos $\varrho(x) \geqslant 0$, hipótesis que nada limita el alcance de la teoría, pues esa función representa en las aplicaciones magnitudes esencialmente positivas: masa, densidad, ... Es obvio que el caso $\varrho(x) \leqslant 0$ se reduce a éste cambiando el signo de r. El caso $\varrho(x) \equiv 0$ queda excluído.

Dividiendo cada y_n por la raíz cuadrada de su norma respecto del núcleo ϱ, $\int \varrho y_n^2\, dx > 0$, resultan autofunciones $\varphi_n(x)$ que forman un sistema ortonormal respecto de dicho núcleo en $[a, b]$:

$$\text{[XXVII-60]} \qquad \int_a^b \varrho(x)\varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\, dx = \delta_{mn}.$$

TEOR. 5. *Si* $q(x) \leqslant 0$, $r(x) \geqslant 0$, *los autovalores* λ *son todos positivos.*

Si es $q(x) = 0$, caso el más importante, y suponemos que las autofunciones φ están normalizadas, cada autovalor λ puede expresarse así:

$$\lambda = \lambda\int_a^b \varrho\varphi^2\, dx = -\int_a^b (r\varphi')'\varphi\, dx = -r\varphi'\varphi\Big|_a^b + \int_a^b r\varphi'^2\, dx,$$

y como $r\varphi'\varphi = 0$ en a y b (tipos A y B) y es $r(x) > 0$, resulta $\lambda > 0$.

En el caso $q(x) < 0$ aparece en el integrando un nuevo término

$-q\varphi^2 > 0$ que produce un sumando positivo, y la conclusión subsiste. También en el tipo C.

e) *Desarrollos en serie de autofunciones.* — Por analogía con lo visto en § 97 cabe preguntarse si, en general, en un problema lineal de STURM-LIOUVILLE (*d*), con autofunciones $\varphi_n(x)$ que suponemos normalizadas, toda función derivable $f(x)$ que cumpla esas mismas condiciones [XXVII-49] de contorno será desarrollable en serie uniformemente convergente en $[a, b]$, del tipo:

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots .$$

La respuesta es afirmativa; omitimos la complicada demostración limitándonos a observar que la ortogonalidad de las funciones φ_n respecto de ϱ permite demostrar que tal desarrollo, si es legítimo, está unívocamente determinado, siendo (cfr. § 97-1):

$$c_n = \int_b^a \varrho(x) f(x) \varphi_n(x) dx.$$

IV. Bibliografía. — 1. La mayor parte de los cursos y tratados generales de Análisis matemático traen capítulos sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales. En particular, contienen excelentes exposiciones del tema, con gran amplitud y abarcando ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales los tratados (citados en Cap. VI, nota VI, 5) de GOURSAT (vols. II y III) y VALIRON (vol. II) y sobre ecuaciones ordinarias el vol. III de SEVERI (citado en Cap. IV, nota III, 1). También traen secciones sobre ecuaciones diferenciales el volumen II de VALLÉE-POUSSIN (citado en Cap. VI, nota VI, 4) y los tratados (citados en Cap. XVIII, nota III, 1) de DUSCHEK (vol. III) y v. MANGOLDT (vol. III).

2. Dan una adecuada introducción a la teoría general de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales los dos breves manuales:

G. HOHEISEL: *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (W. de Gruyter, Berlín y Leipzig; 2ª ed., 1930);

G. HOHEISEL: *Partielle Differentialgleichungen* (W. de Gruyter, Berlín y Leipzig, 1928);

complementados con la colección de ejercicios:

G. HOHEISEL: *Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen* (W. de Gruyter, Berlín y Leipzig, 1933).

Breve introducción al estudio de tipos resolubles de ecuaciones diferenciales es:

K. H. WEISE: *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (Wolfenbütteler Verlag., Hannover, 1948).

Exposición clara y rigurosa sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, especialmente indicada para los lectores interesados en el tema por sus aplicaciones a la física y a la ingeniería, da el primero de los prestigiosos libros:

J. HORN: *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (W. de Gruyter, Berlín; 5ª ed., 1948);

J. HORN: *Partielle Differentialgleichungen* (W. de Gruyter, Berlín; 4ª ed., 1949).

En el marco de un volumen de 400 páginas contiene lo más esencial de los conocimientos modernos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales la magnífica obra:

L. BIEBERBACH: *Theorie der Differentialgleichungen* (Springer, Berlín, 1930; reimpreso por Dover, Nueva York, 1944).

Orientado hacia el campo real y también sobre ecuaciones ordinarias y en derivadas parciales es el valioso y profundo libro, de gran precisión y rigor, conteniendo interesantes ejemplos y ejercicios con respuestas al final:

E. KAMKE: *Differentialgleichungen reeller Funktionen* (Akademische Verlag., Leipzig, 1930; reproducción fotográfica: Chelsea, Nueva York, 1947).

También al campo real se refiere:

L. BIEBERBACH: *Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen in reellen Gebiet* (Springer, Berlín, 1956).

Fué clásico en Inglaterra el libro útil para integración de muchos tipos de ecuaciones diferenciales, pero actualmente superado por otros textos:

A. R. FORSYTH: *A treatise on differential equations* (Macmillan, Londres; 6ª ed., 1929; reimpreso en 1933 y 1943),

que puede considerarse como introducción a la obra en 4 volúmenes:

A. R. FORSYTH: *Theory of differential equations* (Cambridge Univ. Press, 1906).

Tratado general destinado a servir de libro de texto para estudiantes de ciencias puras y aplicadas que no pretende agotar ningún tema, sino sólo orientar al lector, conteniendo ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales de 1º y 2º orden, ecuaciones integrales y cálculo de variaciones es:

D. MARÍN TOYOS: *Ecuaciones diferenciales* (3ª ed., V. Suárez, Madrid, 1950).

Excelente y claro, de nivel elemental pero con enfoque preciso de sus temas es:

L. R. FORD: *Differential equations* (McGraw-Hill, Nueva York; 1ª ed., 4ª impr., 1933).

Aunque con limitado rigor lógico, trata en forma completa y madura los temas incluídos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, cálculo de variaciones y funciones de BESSEL, el libro adecuado para ingenieros, con referencias bibliográficas en cada capítulo e interesantes ejemplos pero sin ejercicios:

CH. BLANC: *Les équations différentielles de la technique* (Éditions du Griffon, Neuchâtel; Dunod, París, 1947).

También dirigido a técnicos, en tratamiento correcto, breve y asequible, está

P. PUIG ADAM: *Curso de Análisis matemático para Ingenieros*: I. *Cálculo integral* (2ª ed.; 1954); II. *Ecuaciones diferenciales* (1955); (Biblioteca matem. JRP-PPA, Madrid).

Las ecuaciones analíticas son estudiadas con originalidad por:

B. LEVI: *Sistemas de ecuaciones analíticas en términos finitos, diferenciales y en derivadas parciales* (Univ. del Litoral, Rosario, 1944).

3. De rico contenido siguiendo moldes clásicos, sobre ecuaciones diferenciales ordinarias en los campos real y complejo, es la obra con numerosos ejemplos y ejercicios que amplían el texto:

E. L. INCE: *Ordinary differential equations* (Longmans-Green, Londres, 1927; reproducido por Dover, Nueva York, 1944).

Valioso tratado, escrito con mucho cuidado y precisión, sobre ecuaciones diferenciales ordinarias en el campo real, orientado hacia la teoría general pero con secciones dedicadas a algunas de las ecuaciones de importancia en la física matemática, es el libro que presta especial atención a los problemas de contorno y contiene acertadas referencias:

G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale* (Zanichelli, Bolonia; vol. I, 1948; vol. II, 1949).

Una exposición clara y bien planeada sobre temas de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, con énfasis sobre funciones especiales cuyas propiedades se estudian partiendo de las ecuaciones diferenciales, y que aunque no contiene problemas trae numerosas aplicaciones muy ilustrativas a las ecuaciones que se presentan en la Física matemática, es el libro de orientación moderna:

F. G. TRICOMI: *Equazioni differenziali* (Einaudi, Torino; 2ª ed., 1953).

Una adecuada exposición sobre ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas, con un apéndice sobre ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, es la obra traducida del ruso (4ª ed., 1952):

I. G. PETROWSKI: *Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen* (Teubner, Leipzig, 1954).

Orientado hacia los temas de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden tratarse usando métodos e ideas de la teoría de funciones analíticas, está el excelente libro que junto con material clásico contiene cuestiones que no se encuentran en otros textos:

L. BIEBERBACH: *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt* (Springer, Berlín, 1953).

Caracterizado por la presentación elegante y lúcida aunque breve por el uso exclusivo de notaciones con vectores y matrices, conteniendo numerosos temas de interés actual, tales como comportamiento asintótico de sistemas lineales y no-lineales, problemas de contorno, estabilidad, perturbaciones y teoría de POINCARÉ-BENDIXSON, es el excelente libro con numerosos ejercicios muchos de los cuales amplían el texto, e indicaciones para su resolución:

E. A. CODDINGTON y N. LEVINSON: *Theory of ordinary differential equations* (McGraw-Hill, Nueva York, 1955).

4. Notable tanto por la riqueza de su contenido que la hace de gran utilidad para ingenieros, físicos y matemáticos, como por el cuidado y precisión con que ha sido escrita, es la voluminosa obra en varios tomos de los cuales el primero, sobre ecuaciones ordinarias, se divide en tres partes, consistiendo la primera en los métodos generales aplicables para resolver una ecuación diferencial o para estudiar las propiedades de sus soluciones, la segunda en problemas de contorno y valores propios y la tercera de una tabla de soluciones de unas 1600 ecuaciones diferenciales:

E. KAMKE: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen.* Band I. *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (Akademische Verlag., Leipzig; 3ª ed., 1944). Band II. *Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für eine gesuchte Funktion* (Akad. Verlag., Leipzig, 1944; Edwards, Ann Arbor, 1946).

5. Sobre resolución numérica de ecuaciones diferenciales tratan:

H. LEVY y E. A. BAGGOTT: *Numerical solutions of differential equations* (Dover, Nueva York, 1950), originariamente editada en 1934 por Watts, Londres, con el título: *Numerical studies in differential equations*;

H. VON SANDEN: *Praxis der Differentialgleichungen. Eine Eiführung* (W. de Gruyter, Berlín, 4ª ed., 1955).

Más reciente es el tratamiento elemental de técnicas modernas y excelente fuente de información para resolución numérica de las ecuaciones ordinarias y en derivadas parciales

W. E. MILNE: *Numerical solution of differential equations* (Wiley, Nueva York, 1953).

Pero el tratamiento más completo publicado hasta hoy sobre resolución numérica de ecuaciones diferenciales, con discusión detenida del fundamento teórico de cada procedimiento descripto, cuidadosa atención al contralor de los cálculos, con interesantes ejemplos numéricos elaborados en forma completa, es la magnífica obra:

L. COLLATZ: *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen* (Springer, Berlín; 2ª ed., 1955).

Sobre métodos numéricos en problemas de contorno para ecuaciones ordinarias y en derivadas parciales, y problemas de valores propios, trata el libro de COLLATZ citado en Cap. XVII, nota V, 6.

6. Sobre teoremas de existencia y unicidad de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales, y propiedades de las soluciones, trata:

F. MURRAY y K. S. MILLER: *Existence theorems for ordinary differential equations* (New York Univ. Press, Nueva York, 1954).

Incluye un capítulo sobre teoremas de existencia, continuidad y analiticidad de las soluciones, tratándose también el caso de sistemas con parámetros, la obra de orientación moderna, con uso sistemático de la terminología y propiedades de espacios vectoriales, matrices, ecuaciones diferenciales de matrices, etc., que permite al autor operar en situaciones muy generales sin complicar indebidamente el simbolismo:

S. LEFSCHETZ: *Lectures on differential equations* (Annals of Math. Studies, nº 14; Princeton Univ. Press, 1946).

Dedicada a estudiar el comportamiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales en el campo real cuando la variable independiente tiende a infinito, destacando muy bien los métodos y técnicas por sobre el cúmulo de resultados conocidos, está la obra escrita en lúcido y atractivo estilo, con numerosos ejercicios y referencias:

R. BELLMAN: *Stability theory of differential equations* (McGraw-Hill, Nueva York, 1953).

Del mismo autor es:

R. BELLMAN: *A survey of the theory of the boundedness, stability, and asymptotic behaviour of solutions of linear and nonlinear differential and difference equations* (Office of Naval Research, Washington, 1949).

7. Sobre funciones de BESSEL y funciones conexas tratan extensamente algunos tratados generales ya citados, en especial WHITTAKER y WATSON (citado en Cap. XI, nota IV, 2) y con orientación más moderna el volumen 2 de ERDÉLYI, MAGNUS, OBERHETTINGER y TRICOMI (citado en Cap. XV, nota III, 3). También tratan este tema COURANT y HILBERT (citado en Cap. XVI, nota IV, 4), VALIRON (citado en Cap. VI, nota VI, 5), y con aplicaciones y desarrollos de FOURIER-BESSEL, MAC ROBERT (citado en Cap. XXIII, nota V, 6).

Las funciones de BESSEL y sus aplicaciones se tratan en la obra de orientación moderna sobre variadas cuestiones de Matemática que encuentren aplicación en la Física:

H. JEFFREYS y B. S. JEFFREYS: *Methods of mathematical physics* (Univ. Cambridge; 2ª ed., 1950);

y se introducen por sus representaciones integrales que pueden interpretarse como la generación de ondas cilíndricas mediante superposición de ondas planas, en el libro que enfoca los temas tratados desde el punto de vista del físico, pero resulta muy adecuado en su aspecto matemático:

A. SOMMERFELD: *Partielle Differentialgleichungen der Physik* (*Vorlesungen über theoretische Physik*, Band VI) (Akademische Verlag., Leipzig, 1947); traducido al inglés por E. G. STRAUSS: *Partial differential equations in physics* (Academic Press, Nueva York, 1949).

Es clásica la exposición de

A. GRAY, G. B. MATHEWS y T. M. MAC ROBERT: BESSEL *functions and their applications to physics* (Macmillan, Londres; 2ª ed., 1922).

Adecuados para ingenieros, con numerosos ejercicios, son:

N. W. MCLACHLAN: BESSEL *functions for engineers* (Clarendon Press, Oxford, 1934);

F. E. RELTON: *Applied* BESSEL *functions* (Blackie, Londres y Glasgow, 1942).

También dan introducciones con aplicaciones técnicas y a la Física:

R. WEYRICH: *Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen* (Teubner, Leipzig, 1937);

G. PETIAU: *La théorie des fonctions de* BESSEL *exposée en vue de ses applications à la physique mathématique* (Centre Nat. de la Recherche Scient., París, 1955);

y el más pequeño:

G. GOUDET: *Les fonctions de* BESSEL *et leurs applications en physique* (Masson, París, 2ª ed., 1954).

Tratado enciclopédico, adecuado para un estudio más detenido o para referencia y consulta es el clásico de:

G. N. WATSON: BESSEL *functions* (Cambridge Univ. Press, 1922).

Fórmulas, tablas, curvas e interesantes gráficos en relieve para las funciones de BESSEL y conexas contiene, con referencias a otras tablas, la obra de JAHNKE y EMDE (citada en Cap. VII, nota II, *d*) en una extensa sección que abarca más de un tercio del volumen.

8. Dedica un capítulo al estudio de las curvas integrales de una ecuación diferencial de primer orden en el entorno de un punto singular, la obra con numerosos ejemplos y gráficos:

G. BOULIGAND y J. DEVISME: *Lignes de niveau. Lignes intégrales. Introduction à leur étude graphique.* (Vuibert, París, 1937).

Trata el mismo tema en un nivel más elevado VALIRON (citado en Cap. VI, nota VI, 5).

Un estudio general sobre el comportamiento de las curvas integrales, incluyendo ecuaciones de orden superior y sistemas de ecuaciones diferenciales, trae:

M. PETROVITCH: *Intégration qualitative des équations différentielles* (Mém. des Sc. Math., XLVIII; Gauthier-Villars, París, 1931).

Da una exposición (ampliada en la segunda edición) de la teoría de POINCARÉ-BENDIXSON de las propiedades cualitativas de las soluciones de ecuaciones de primer orden, y aplicaciones a la teoría de las oscilaciones no lineales, la obra de TRICOMI citada en 3. También incluye un capítulo sobre estabilidad y comportamiento de las soluciones en el entorno de un punto crítico, y basado en él otro sobre los resultados de POINCARÉ y BENDIXSON para sistemas bidimensionales la obra de LEFSCHETZ citada en 6.

9. Da una clasificación de las singularidades simples de ecuaciones diferenciales en el campo real, y ejemplos físicos ilustrativos del concepto de distintos puntos singulares como varios tipos de equilibrio de sistemas dinámicos, la excelente exposición sobre problemas no lineales, adecuada para ingenieros y físicos:

J. J. STOKER: *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems* (Interscience Publ., Nueva York, 1950).

Orientada hacia las aplicaciones y con gran riqueza de ejemplos tomados de la Mecánica y de la Teoría de la electricidad (de los cuales hay un índice) es la obra traducida del ruso y editada en inglés bajo la dirección de S. LEFSCHETZ:

A. A. ANDRONOV y C. E. CHAIKIN: *Theory of oscillations* (Princeton Univ. Press, 1949).

Destinada a ingenieros y con amplia bibliografía es:

N. W. MCLACHLAN: *Ordinary non-linear differential equations in engineering and physical sciences* (Clarendon Press, Oxford, 1950).

Rico material de resultados numéricos, gráficos y registros experimentales en circuitos eléctricos no lineales contiene:

C. HAYASHI: *Forced oscillations in non-linear systems* (Nippon Printing and Publ. Co., Osaka, 1953).

Capítulo XXVIII

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES. CALCULO DE VARIACIONES

§ 110. Ecuaciones lineales de primer orden

1. **Definiciones y notaciones.** — Se llama ecuación en derivadas parciales a toda ecuación diferencial que relaciona una o varias funciones de varias variables independientes, con sus derivadas parciales respecto de éstas (§ 100-1, *d*). Vamos a estudiar solamente las ecuaciones con una sola incógnita z, con dos variables independientes x, y; y para abreviar llamaremos p y q a las derivadas parciales:

[110-1] $$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad ; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} .$$

La ecuación diferencial en derivadas parciales *de primer orden* es del tipo

[110-2] $$f(x, y, z, p, q) = 0 .$$

La ecuación se llama *lineal* cuando lo es en p y q, es decir, cuando éstas figuran en primera potencia sin multiplicar entre sí:

[110-3] $$P(x, y, z) . p + Q(x, y, z) . q = R(x, y, z) .$$

El conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial en derivadas parciales es mucho más amplio que el de ecuaciones diferenciales ordinarias, pues depende de *funciones arbitrarias,* como muestran los ejemplos siguientes, donde las ecuaciones son lineales de primer orden.

Ejemplos: 1. La ecuación $q = 0$ se verifica para toda función $z = z(x, y)$ que no dependa de y; es decir

$$z(x, y) = \varphi(x) \quad ,$$

siendo φ una función arbitraria.

2. La ecuación $p = q$, con la transformación de variables

$$x + y = \xi \quad , \quad x - y = \eta \quad ;$$
$$z(x, y) = z[\tfrac{1}{2}(\xi + \eta) \quad , \quad \tfrac{1}{2}(\xi - \eta)] = u(\xi, \eta)$$

se transforman en $2\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, y entonces se verifica para toda función de ξ solamente, es decir para

$$z = \varphi(x + y) .$$

3. Análogamente se tiene para la ecuación

[110-4] $ap + bq = 0$, (a y b constantes),

con el cambio de variables $bx - ay = \xi$, $bx + ay = \eta$, la solución

[110-5] $z = \varphi(bx - ay)$.

4. Si $g(x, y)$ es una función dada de x é y, la ecuación

[110-6] $$p \frac{\partial g}{\partial y} - q \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad ,$$

es decir, la anulación del determinante funcional $\frac{\partial(z, g)}{\partial(x, y)}$, significa que z y g son dependientes (§ 68-3), es decir, la solución de [110-6] es

[110-7] $z = \varphi[g(x, y)]$, (φ función arbitraria).

Así como las ecuaciones diferenciales ordinarias de una sola variable independiente resultan engendradas por las familias de curvas en el plano, las ecuaciones en derivadas parciales resultan de las familias de superficies. Vamos a estudiarlas y clasificarlas.

2. **Generación de superficies mediante curvas.** — Una superficie está engendrada por una curva que se mueve; pero como al moverse varía, hay que definir lo que se entiende por movimientos de una curva. Supongamos dada una congruencia de curvas (§ 109-1, a), por dos ecuaciones $u(x, y, z) = \alpha$; $v(x, y, z) = \beta$ con dos parámetros arbitrarios α y β. Si imponemos alguna condición geométrica que ligue estos parámetros por una cierta relación $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ se tiene una familia "simplemente infinita" o "haz de curvas" y eliminando α, β, entre las tres ecuaciones resulta una ecuación

$$\varphi[u(x, y, z),\ v(x, y, z)] = 0, \quad \text{o sea:} \quad F(x, y, z) = 0$$

que contiene todos los puntos de todas las curvas de esta familia, y por lo tanto representa la superficie que engendran.

La condición más frecuente que suele imponerse, es que la generatriz corte a una curva fija, llamada *directriz*; eliminando x, y, z entre las ecuaciones de ésta y las de la generatriz, resulta la condición buscada: $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. Otras veces la condición será la de ser tangente a una superficie, etc.

EJEMPLOS: 1. *Superficies cilíndricas.* — Consideremos la recta

$$x = az + \alpha \quad , \quad y = bz + \beta.$$

Como tiene cuatro parámetros, al variar éstos se tiene una familia cuádruplemente infinita, pero si fijamos a y b, es decir, si las rectas se consideran paralelas a una dirección, la familia es doblemente infinita.

Elijamos una directriz cualquiera en el plano xy: $\varphi(x, y) = 0$, $z = 0$. La traza de cada recta sobre este plano es $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = 0$, luego la condición para que se apoye en dicha directriz es $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. Cualquiera que sea el punto de la recta es:

$$\alpha = x - az \quad ; \quad \beta = y - bz \quad ,$$

luego todos los puntos de las rectas que se apoyan en la directriz satisfacen a la ecuación:

[110-8] $$\varphi(x - az,\ y - bz) = 0.$$

Ésta es, por tanto, la ecuación del cilindro definido por aquella directriz. Al variar arbitrariamente la función φ resultan los infinitos cilindros. La ecuación [110-8] representa, pues, todos los cilindros de dirección dada (a, b) no paralela al plano xy.

2. *Superficies cónicas.* — Las ecuaciones de una recta cualquiera que pasa por el origen de coordenadas son:

[110-9] $$x = \alpha z \quad ; \quad y = \beta z.$$

Dada una directriz cualquiera, expresando que la recta [110-9] se apoya en ella, resulta una ecuación $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, y como en todos los puntos de todas las rectas [110-9] es:

$$\alpha = x/z \quad , \quad \beta = y/z$$

todas ellas satisfacen a la ecuación $\varphi(x/z,\ y/z) = 0$, que representa todos los conos de vértice O.

Obsérvese que esta ecuación es homogénea respecto de x, y, z, es decir, al multiplicar por un coeficiente λ cualquiera, sigue satisfaciéndose la ecuación. Análogamente, las superficies cónicas de vértice (a, b, c) están representadas por la ecuación

[110-10] $$\varphi\left(\frac{x - a}{z - c}\ ,\ \frac{y - b}{z - c}\right) = 0.$$

3. *Superficies de revolución.* — Una circunferencia de radio r en un plano paralelo al xy, a la distancia α viene expresada así:

$$x^2 + y^2 = \beta = r^2 \quad , \quad z = \alpha.$$

Dada una directriz cualquiera por sus dos ecuaciones, la condición para que se corten se obtiene eliminando x, y, z entre las cuatro ecuaciones y resulta $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

Sustituyendo α, β por sus expresiones, se obtiene:

[110-11] $$\varphi(z, x^2 + y^2) = 0 \quad ,$$

que representa todas las superficies de revolución de eje z.

Análogamente, una superficie de revolución cuyo eje

[110-12] $$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

pase por el origen, tiene por generatrices las circunferencias intersección de los planos normales a dicho eje con las superficies esféricas de centro el origen, expresadas así:

$$ax + by + cz = \alpha \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 = \beta.$$

Por el mismo procedimiento anterior, resulta que

[110-13] $$\varphi(ax + by + cz,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

representa todas las superficies de revolución de eje [110-12].

3. Generación de la ecuación diferencial lineal. — Veamos cómo se obtiene la ecuación diferencial lineal cuyas superficies integrales son las formadas por curvas de una convergencia dada. Sean $u = \mathrm{u}(x, y, z)$ y $v = \mathrm{v}(x, y, z)$ dos funciones dadas, y consideremos la ecuación

[110-14] $$\varphi(u, v) = 0 \quad ,$$

donde φ es una función arbitraria (derivable) que define implícitamente z como función de las variables independientes x é y. Derivando respecto de cada una de ellas, se tiene

[110-15] $$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\,p\right)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\,p\right) = 0\,, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\,q\right)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\,q\right) = 0\,. \end{cases}$$

Éste es un sistema lineal homogéneo en $\partial\varphi/\partial u$, $\partial\varphi/\partial v$. Para que φ no se reduzca a una constante, debe anularse el determinante de los coeficientes, con lo que se obtiene una ecuación de la forma [110-3] con

[110-16] $$\mathrm{P} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\,,\quad \mathrm{Q} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\,,\quad \mathrm{R} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\,.$$

La relación [110-14] es una solución de [110-3] con los coeficientes dados por [110-16], cualquiera sea φ (derivable).

Los ejemplos siguientes muestran que la ecuación diferencial de una familia [110-14] de superficies expresa una propiedad del plano tangente (o de la recta normal) de una superficie cualquiera de la familia, que tiene parámetros directores p, q, —1 (§ 66-5, a).

NOTA. Más práctico que calcular los coeficientes P, Q, R por [110-16] es formar directamente la ecuación diferencial anulando el determinante de los coeficientes de φ_u y φ_v en [110-15]. Este determinante es el jacobiano de u, v respecto de x, y, considerando que z es también función de x, y en u, v.

EJEMPLOS: 1. *Ecuación diferencial de las superficies cilíndricas* [110-8]. — Es $u = x - az$, $v = y - bz$. Resulta por [110-16] y [110-3]

[110-17] $$ap + bq = 1\,.$$

Esta ecuación expresa que el plano tangente en un punto M contiene la generatriz que pasa por M. En efecto, sus parámetros directores son respectivamente $(p, q, -1)$ y $(a, b, 1)$ y [110-17] expresa que la generatriz es normal a la normal al plano.

2. *Ecuación diferencial de las superficies cónicas* [110-10]. — Es $u = (x-a)/(z-c)$, $v = (y-b)/(z-c)$. Por [110-16] resulta

$$\mathrm{P} = \frac{x-a}{(z-c)^3}\,,\quad \mathrm{Q} = \frac{y-b}{(z-c)^3}\,,\quad \mathrm{R} = \frac{1}{(z-c)^2}\,,$$

y reemplazando en [110-3] se tiene la ecuación diferencial

[110-18] $$(x-a)p + (y-b)q = z - c\,,$$

que expresa que el plano tangente contiene la generatriz (de parámetros directores $x-a$, $y-b$, $z-c$) que pasa por el punto de contacto.

3. *Ecuación diferencial de las superficies de revolución* [110-11] ó [110-13].

Se obtiene $\mathrm{P} = -2y$, $\mathrm{Q} = 2x$, $\mathrm{R} = 0$, y de aquí la ecuación

[110-19] $$yp - xq = 0\,,$$

que expresa que la normal a la superficie $z = z(x, y)$:

[110-20] $$\frac{\mathrm{X}-x}{p} = \frac{\mathrm{Y}-y}{q} = \frac{\mathrm{Z}-z}{-1}\,,$$

[(x, y, z) punto de la superficie; (X, Y, Z) punto genérico de la normal en aquél], corta al eje z (eje de revolución). En efecto, para $X = Y = 0$ los dos primeros miembros toman por [110-19] el mismo valor λ, y entonces el punto $X = 0$, $Y = 0$, $Z = z - \lambda$, pertenece a [110-20].

Si la superficie de revolución tiene un eje [110-12], su ecuación diferencial será análogamente

[110-21] $$(bz - cy)p + (cx - az)q = ay - bx \quad ,$$

con la misma interpretación geométrica anterior, pues para que [110-20] tenga solución común con $X/a = Y/b = Z/c = \lambda$ se ha de cumplir

$$x + p\lambda_1 = a\lambda \quad , \quad y + q\lambda_1 = b\lambda \quad , \quad z - \lambda_1 = c\lambda \quad ,$$

cuya compatibilidad, dada por la eliminación λ y λ_1, viene expresada por [110-21].

4. **Integración de las ecuaciones lineales.** — La integración de la ecuación lineal

[110-22] $$Pp + Qq = R$$

en la cual P, Q, R son funciones de x, y, z, consiste en obtener *todas* las superficies $z = f(x, y)$ que satisfacen a la ecuación. Probaremos que *se reduce a la integración del sistema de dos ecuaciones ordinarias*:

[110-23] $$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \,.$$

a) En efecto, este sistema representa (§ 109-1, *a*), una congruencia de curvas que se obtendrá integrando el par de ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = \frac{R}{P}$$

(suponiendo $P \neq 0$) y así resultará

$$u(x, y, z) = \alpha \quad , \quad v(x, y, z) = \beta .$$

Esta congruencia de curvas está formada precisamente por las líneas de fuerza del campo vectorial de componentes P, Q, R (§§ 91-2, *b*, y 109-1, *a*). Tales curvas se llaman *características*; su conjunto, *congruencia característica* de [110-22], y el sistema [110-23] *sistema característico* o *adjunto* de la ecuación [110-22]. Sus ecuaciones suelen llamarse *ecuaciones subsidiarias* de [110-22].

Toda superficie formada por curvas características tiene la propiedad de que la tangente a cada curva, es decir (en virtud de [110-23]), la recta

$$\frac{x - x_0}{P} = \frac{y - y_0}{Q} = \frac{z - z_0}{R}$$

está en el plano tangente a la superficie

$$z - z_0 = (x - x_0)p + (y - y_0)q \quad ;$$

y sustituyendo en esta ecuación los numeradores de las ante-

riores por los respectivos denominadores, esa propiedad geométrica se traduce en

$$\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q = \mathrm{R} \quad ;$$

es decir: *toda superficie*

$$\varphi[\mathrm{u}(x, y, z),\ \mathrm{v}(x, y, z)] = 0$$

formada por curvas características satisface a la ecuación lineal [110-22].

b) Recíprocamente, dada una superficie cualquiera $z = \mathrm{f}(x, y)$ que satisfaga a la ecuación [110-22], si consideramos un punto cualquiera $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ tomado en dicha superficie y formamos la ecuación diferencial en x, y:

$$[110\text{-}24] \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{P}[x, y,\ \mathrm{f}(x, y)]} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{Q}[x, y,\ \mathrm{f}(x, y)]}$$

ésta define en el plano x, y una curva que pasa por el punto (x_0, y_0), la cual es proyección de una curva C_1 de la superficie, que pasa por el punto $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ y satisface a las relaciones lineales:

$$p \,.\, \mathrm{d}x + q \,.\, \mathrm{d}y = \mathrm{df}(x, y) \quad ,$$
$$p \,.\, \mathrm{P} + q \,.\, \mathrm{Q} = \mathrm{R} \quad ,$$

aplicadas éstas a la proporción [110-24], resulta una tercera razón $\mathrm{d}z/\mathrm{R}$ igual a las dos escritas. Resulta, pues, que la curva C_1 satisface al sistema [110-23], luego es la curva característica que pasa por A.

Queda así demostrado este teorema recíproco de *a*): *Toda superficie integral de la ecuación* [110-22] *está formada por curvas características.*

c) Se tiene entonces la siguiente regla: *Para integrar la ecuación* [110-22], *se integra el sistema característico* [110-23] *obteniéndose la congruencia de curvas* $\mathrm{u}(x, y, z) = \alpha$, $\mathrm{v}(x, y, z) = \beta$. *La integral general de la ecuación* [110-22] *será entonces*

$$\varphi[\mathrm{u}(x, y, z),\ \mathrm{v}(x, y, z)] = 0 \quad ,$$

siendo φ *una función arbitraria.*

d) Cada integral está determinada por una curva D que no sea característica; pues esa directriz determina una superficie formada por las curvas características que se apoyan en ella (ver ejemplo 4). Esta determinación de una superficie integral corresponde al problema de CAUCHY (ver §§ 111-1, *c*; 111-6) en el caso de ecuaciones lineales de primer orden.

NOTA 1. Más precisamente, si la curva D de ecuaciones $x = \mathrm{x}(t)$, $y = \mathrm{y}(t)$, $z = \mathrm{z}(t)$ es regular (§ 34-6) conjuntamente con su proyección

D_0 sobre el plano (x, y), y es en D, $\Delta = P(dy/dt) - Q(dx/dt) \neq 0$, o sea $Q : P \neq dy : dx$, por cada punto de D pasa una característica distinta. En cambio, si $\Delta = 0$ es D una característica cuando y sólo cuando pase por ella una superficie integral, pues si se elige t de modo que $dx/dt = P$, $dy/dt = Q$, resulta $dz/dt = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} = pP + qQ = R$. Como en este caso la superficie integral no queda determinada, se tiene en resumen: *Por una directriz* D *en la cual* $\Delta \neq 0$ *pasa una y sólo una superficie integral. Si en* D *es* $\Delta = 0$, *debe ser* D *una característica para que haya una superficie integral por ella, y en este caso hay infinitas.*

Menos fácil es determinar una superficie por una directriz que también sea superficie, a la que deben ser tangentes las curvas características.

EJEMPLOS: 1. *Superficies cilíndricas.* — El sistema característico de [110-17] es $dx/a = dy/b = dz/1$ (cfr. § 109-1, ej. 2). Resolviéndolo se obtiene la congruencia característica $x - az = \alpha$, $y - bz = \beta$, y con los *haces* de curvas de ella, las superficies cilíndricas [110-8].

Por la recta $x = at$, $y = bt$, $z = \frac{1}{2}t$, tal que $\Delta = Pb - Qa = 0$, no pasa ninguna superficie integral, pues $dz/dt = \frac{1}{2} \neq R = 1$. Obsérvese que la superficie formada por las características que pasan por los puntos de dicha recta es el plano $bx - ay = 0$, paralelo al eje z, respecto del cual [110-22] no tiene sentido.

2. *Superficies cónicas.* — El sistema característico de [110-18] es $dx/(x - a) = dy/(y - b) = dz/(z - c)$, (cfr. § 109, ej. 2, b). De aquí resulta $\ln(x - a) = \ln(z - c) + \ln\alpha$, $\ln(y - b) = \ln(z - c) + \ln\beta$, o sea $(x - a)/(z - c) = \alpha$, $(y - b)/(z - c) = \beta$. Los haces de curvas de esta congruencia engendran las superficies cónicas [110-10].

3. *Superficies de revolución.* — El sistema característico de [110-19] es $(dx)/y = (dy)/(-x) = (dz)/0$. El tercer miembro significa que $dz = 0 \therefore z = \alpha$, y de los dos primeros resulta $x^2 + y^2 = \beta$. De esta congruencia resulta la ecuación finita [110-11] de las superficies de revolución.

Análogamente, el sistema característico de [110-21] es

$$dx/(bz - cy) = dy/(cx - az) = dz/(ay - bx) \quad ,$$

de donde se obtiene

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0 \quad , \quad x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \quad ,$$

es decir, las curvas $ax + by + cz = \alpha$, $x^2 + y^2 + z^2 = \beta$, congruencia que satisface [110-13].

4. Hallar la superficie integral S de la ecuación [110-17], que pasa por la curva D: $x = 0$, $z = e^{-y}$.

La característica por (x_0, y_0, z_0) es por ejemplo 1:

$$x - az = x_0 - az_0 \quad , \quad y - bz = y_0 - bz_0 \quad ,$$

y entonces la característica por el punto $(0, y_0, e^{-y_0})$ de D es

$$x - az = -ae^{-y_0} \quad , \quad y - bz = y_0 - be^{-y_0}.$$

Al variar el parámetro y_0, estas características engendran la superficie S, cuya ecuación se obtiene eliminando y_0 entre ambas ecuaciones (por ejemplo, reemplazando en la primera la expresión de y_0 que resulta de restar de la segunda la primera por b/a). Se obtiene así:

$$x - az = -ae^{(b/a)x - y}.$$

NOTA 2. Si $R = 0$ se tiene la ecuación $Pp + Qq = 0$, llamada *homogénea*. El sistema adjunto es $dx/P = dy/Q$, $dz = 0$, que implica $z = \alpha$. Entonces: *las características se hallan en planos paralelos al* x, y. Si $dy/dx = Q(x, y, z)/P(x, y, z)$, donde $z = \alpha$ se considera como un parámetro, tiene la solución $g(x, y, z) = \beta$, las superficies integrales son de la forma $\varphi[z, g(x, y, z)] = 0$.

Si además ni P ni Q dependen de z, § 110-4, la ecuación homogénea resulta lineal en z y sus derivadas, y se la llama también *completamente* lineal (cfr. § 112-2); la solución del sistema adjunto será de la forma $h(x,y) = \beta$, y las superficies integrales estarán comprendidas por la integral general de la forma

[110-25] $$z = \psi[h(x,y)]$$

con Ψ función arbitraria.

5. **Ecuaciones en funciones de más de dos variables.** — *a*) Si $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ es la función incógnita e indicamos sus derivadas por $p_i = \partial z/\partial x_i$, el caso análogo al último tratado en § 110-4, nota 2, será el de la ecuación *homogénea completamente lineal* (es decir, lineal en z y sus derivadas), de la forma:

[110-26] $$P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n = 0$$

donde los coeficientes P_i son funciones de $x_1, \ldots, x_n$ pero no de z.

Veremos que su integración se reduce a la del sistema adjunto

[110-27] $$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} ,$$

de $n-1$ ecuaciones, con el resultado generalizado de [110-25]: *Si la solución de* [110-27] *se expresa* (despejando las constantes β_i) *en la forma*:

[110-28] $$h_i(x_1, \ldots, x_n) = \beta_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

la integral general de [110-26] *es*

[110-29] $$z = \Psi[h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)]$$

siendo Ψ *una función arbitraria.*

DEM. 1º) Toda función de la forma [110-29] verifica [110-26]. En efecto, es

[110-30] $$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n = \\ = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n = 0 \quad ,$$

pues también es (§ 67-2) en virtud de [110-29] $dz = \sum_i (\partial\Psi/\partial h_i) dh_i$ y además $dh_i = 0$ por [110-28]. Finalmente de [110-30] y [110-27] resulta [110-26].

2º) Recíprocamente, si $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ verifica [110-26], entre las funciones $h_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $h_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$, $z(x_1, \ldots, x_n)$ existe una relación funcional. En efecto, en virtud de 1º) cada una de las funciones $h_i(x_1, \ldots, x_n)$ verifica [110-26], es decir:

[110-31] $$P_1 \frac{\partial h_i}{\partial x_1} + \ldots + P_n \frac{\partial h_i}{\partial x_n} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Para que el sistema homogéneo formado por las n ecuaciones [110-26], [110-31], considerado en las n "incógnitas" $P_1, \ldots, P_n$, admita soluciones fuera de la trivial $P_1 = \ldots = P_n = 0$ es necesario y suficiente (§ 15-6, *b*)

que se anule el determinante de los coeficientes, que es el determinante funcional de las h_i, z, respecto de las x_k:

$$\frac{\partial(h_1, \ldots, h_{n-1}, z)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = 0.$$

b) Una ecuación *lineal no homogénea*, de la forma

[110-32] $$P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n = R$$

donde ahora P_i y R son funciones de $x_1, \ldots, x_n, z$, se reduce a otra homogénea y completamente lineal en una nueva función incógnita de *todas* las variables anteriores:

$$t = t(x_1, \ldots, x_n, z)$$

y entonces la integración se reduce al caso *a*.

Pues por ser

$$p_i = \partial z/\partial x_i = -(\partial t/\partial x_i) : (\partial t/\partial z) \quad ,$$

[110-32] se reduce a:

$$P_1 \frac{\partial t}{\partial x_1} + \ldots + P_n \frac{\partial t}{\partial x_n} + R \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad ,$$

ecuación homogénea y completamente lineal, pues los coeficientes dependen de $x_1, \ldots, x_n, z$, pero no de t.

Por lo visto en *a*, la integración de [110-32] se reduce a la del sistema:

[110-33] $$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{\partial x_n}{P_n} = \frac{dz}{R}.$$

EJEMPLO: Veamos qué funciones $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ verifican el teorema de EULER (§ 67-3):

$$x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n = nz \quad , \quad (n \text{ constante}).$$

El sistema [110-33] es ahora

$$\frac{dx_1}{x_1} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{nz}.$$

De la igualdad del primer miembro con cada uno de los otros sigue que son constantes los cocientes $x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1, z/x_1^n$, y entonces la integral general será, con φ arbitraria:

$$z/x_1^n = \varphi(x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1) \quad ,$$

o sea:

$$z = x_1^n \varphi(x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1) \quad ,$$

es decir, función homogénea de grado n.

6. **Factor integrante de** $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$. — Vimos en § 101-7,*b*, que todo factor integrante $\mu = \mu(x, y)$ de la ecuación $P \cdot dx + Q \cdot dy = 0$, es decir, tal que $\mu \cdot (P \cdot dx + Q \cdot dy)$ sea una diferencial total exacta, debe ser solución de la ecuación en derivadas parciales $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$, que es lineal, y escribiremos entonces en la forma:

[110-34] $$Q \cdot \mu_x - P \cdot \mu_y = (P_y - Q_x)\mu.$$

El sistema característico es

$$[110\text{-}35] \qquad \frac{dx}{Q} = \frac{dy}{-P} = \frac{d\mu}{(P_y - Q_x)\mu}.$$

Una de las ecuaciones [110-35] es precisamente la propuesta, pero con frecuencia es posible determinar μ recurriendo a otra de las ecuaciones [110-35], y además basta hallar una solución particular $\mu \not\equiv 0$ para resolver entonces la ecuación dada por cuadraturas (§ 101-7).

EJEMPLO: Para la ecuación lineal ordinaria de primer orden (§ 101-4) $y' + P(x)y = Q(x)$, o sea: $(Py - Q)dx + dy = 0$, el sistema [110-35] es

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{Q - P\,.\,y} = \frac{d\mu}{P\,.\,\mu}.$$

Los dos primeros miembros reproducen la ecuación dada, pero de la igualdad de 1º y 3º obtenemos para μ la integral $\ln \mu = \int P\,.\,dx$, o sea el factor integrante $\mu = e^{\int P\,.\,dx}$ (cuya inversa es solución de la ecuación homogénea $y' + P\,.\,y = 0$, § 101-4).

EJERCICIOS

1. Resolver: *a*) $p = 2xy^2$; *b*) $\partial^2 z/\partial y^2 = 6xy$.

2. Una *superficie conoide* es la engendrada por una generatriz rectilínea que se mueve conservándose paralela a un plano fijo (*plano director*) y apoyándose en una recta fija (*eje*) y una curva fija (*directriz*). Hallar la ecuación: *a*) Finita; *b*) Diferencial; de las superficies conoides de plano director $z = 0$ y eje $x = y = 0$.

3. *a*) Hallar las ecuaciones diferenciales de: a_1) Las esferas con centro en el eje x; a_2) Los conos circulares rectos cuyo eje es el eje x; a_3) Las superficies de revolución alrededor del eje x. Comparar los tres resultados. *b*) Probar que toda superficie a_3) puede obtenerse: b_1) Como envolvente de superficies a_2); b_2) Como envolvente de superficies a_1).

4. Hallar la ecuación diferencial de la familia de superficies $\varphi(x^2 z, y) = 0$, e integrarla.

5. Resolver: *a*) $xp + y(1 - x)q = 0$; *b*) $xp + (y + 3x^2y^2e^{x^3})q = 0$.

6. ¿Qué función es igual a la suma de sus dos primeras derivadas parciales?

7. Integrar las ecuaciones: *a*) $xp - yq = z$; *b*) $xyp - x^2q + yz = 0$; *c*) $yp + xq = 0$; *d*) $x^2p + xyq = y^2$; *e*) $z = yq - xp + 2x$.

8. En la ecuación $(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$, hallar: *a*) La solución general; *b*) La superficie integral S que pasa por la curva D: $x = 0$, $z = y^3$ (cfr. § 109, ejercicio 5).

9. *a*) Ecuación diferencial de las superficies cuyo plano tangente en cada punto $A(x, y, z)$ corta al eje z en $A'(0, 0, -z)$; *b*) Solución general; *c*) Superficie integral que contiene la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, $z = 1$.

10. *a*) Probar que las características de $yp - xq + h = 0$ son hé-

lices circulares de paso $2\pi h$, situadas en cilindros circulares de eje Oz, y entonces la integral general se compone de helicoides; *b*) Estudiar el caso $h = 0$.

11. *Superficies ortogonales a un haz de superficies.* — *a*) Ecuación diferencial de las superficies $z = z(x, y)$ que cortan ortogonalmente en cada uno de sus puntos a la superficie del haz $F(x, y, z) = C$ que pasa por él; *b*) Interpretar geométricamente las ecuaciones diferenciales de las características.

12. Aplicando el ejercicio anterior hallar: *a*) La congruencia de curvas ortogonales al haz de paraboloides $x^2 + y^2 = Cx$; *b*) Las superficies ortogonales a dichos paraboloides.

§ 111. Ecuaciones de primer orden en general

1. **Significado geométrico.** — *a*) Por analogía con el elemento lineal (§ 100-2) llamaremos *elemento plano* al conjunto formado por un punto $P(x, y, z)$ (*sostén*) y la orientación de un plano, dada por p y q, de modo que p, q, -1, sean parámetros directores del plano. Podemos representar un elemento plano de sostén P por un pequeño círculo de centro P, en el plano de orientación $(p, q, -1)$.

Al conjunto de elementos planos que verifiquen la ecuación

$$[111\text{-}1] \qquad f(x, y, z, p, q) = 0 \quad ,$$

donde f tiene derivadas parciales continuas respecto de todas sus variables, lo llamaremos *campo planar* de [111-1], pero no debe creerse que está formado (análogamente a § 100-2), por un solo elemento asociado a cada punto. Respecto de la ecuación [111-1] un elemento plano se llama *singular* si $f = f_p = f_q = 0$. Dado un punto fijo $P_0(x_0, y_0, z_0)$, si por él pasa un elemento plano no singular, entonces pasan infinitos, pues si es por ejemplo $f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$, $f_q(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) \neq 0$, se podrá (§ 68-1) despejar q:

$$[111\text{-}2] \qquad q = q(x, y, z, p) \quad ,$$

y conservando fijos x, y, z, vemos que al variar p se tienen infinitos elementos planos de sostén $P(x, y, z)$. Los correspondientes planos envuelven un cono de vértice P, que llamaremos *elemento cónico*, o *cono de* Monge, *en* P.

La ecuación del cono de Monge se obtendrá (§ 74-3, *a*) de

$$[111\text{-}3] \qquad Z - z_0 = p(X - x_0) + q(p)(Y - y_0) \quad ,$$

$$[111\text{-}4] \qquad 0 = (X - x_0) + q'(p)(Y - y_0) \quad ,$$

por eliminación de p, y como es

$$[111\text{-}5] \qquad f_p(x_0, y_0, z_0, p, q) + f_q \cdot q'(p) = 0 \quad ,$$

el cono de Monge se obtiene también de

[111-3] $Z - z_0 = p(X - x_0) + q(p)(Y - y_0)$,

[111-6] $0 = f_q \,.\, (X - x_0) - f_p \,.\, (Y - y_0)$,

probando que el elemento plano [111-3] para $p = p_0$, $q(p_0) = q_0$ toca al correspondiente cono de MONGE en P_0 a lo largo de la recta

[111-7] $$\frac{X - x_0}{f_{p_0}} = \frac{Y - y_0}{f_{q_0}} = \frac{Z - z_0}{p_0 f_{p_0} + q_0 f_{q_0}} .$$

Sin necesidad de pasar por [111-2], la ecuación del cono de MONGE puede obtenerse eliminando p, q entre las tres [111-1] y [111-7].

NOTAS: 1. Las normales a los elementos planos de [111-1] con sostén en P_0 forman el llamado *cono normal*, de ecuación

[111-8] $$f\left(x_0, y_0, z_0, -\frac{X - x_0}{Z - z_0}, -\frac{Y - y_0}{Z - z_0}\right) = 0.$$

2. Para la ecuación lineal el cono de MONGE degenera en una recta (§ 110-4; cfr. § 111-9).

b) Para que $z = G(x, y)$ sea una superficie integral de la ecuación [111-1], los parámetros directores del plano tangente p, q, -1, deben ser tales que p y q verifiquen [111-1]. Recíprocamente, toda superficie con esa propiedad es una solución. Por consiguiente:

Condición necesaria y suficiente para que una superficie $z = G(x, y)$ *sea una superficie integral de la ecuación* [111-1], *es que en cada punto* P *de ella, sea tangente al cono de* MONGE *en* P.

c) Vemos, pues, que no tan sólo no queda unívocamente determinada por cada punto una superficie integral, sino que la multiplicidad de las superficies integrales puede considerarse mucho "mayor" que la de curvas integrales de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En condiciones muy generales, es plausible decir que por una *curva arbitraria* D pasa una superficie integral de la ecuación [111-1]. Este *problema de* CAUCHY, que trataremos analíticamente en § 111-6, tiene solución intuitiva por las siguientes consideraciones geométricas: Tracemos por cada punto P de la curva D el correspondiente cono de MONGE T (fig. 372). En el caso analítico, pasará por P al menos un plano (acaso imaginario) que sea a la vez tangente a la curva D y al cono T. Así se obtiene una sucesión continua de elementos planos en-

volviendo una franja infinitesimal adherida a la curva D, superficie integral de la ecuación [111-1].

Si en dicha franja consideramos una curva D_1 próxima a la D, puede aplicarse a D_1 el mismo procedimiento e ir prolongando así la superficie integral obtenida. El procedimiento falla para las llamadas curvas características (§ 111-4, *a*).

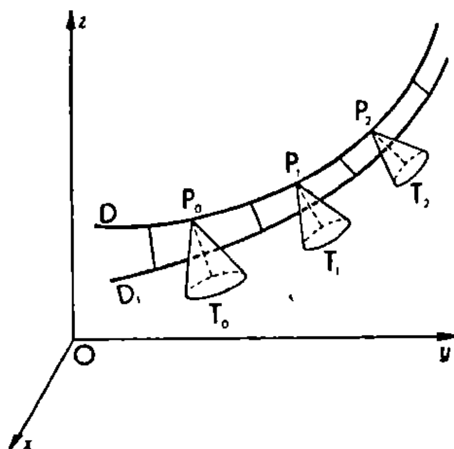


Fig. 372.

2. **Generación de la ecuación general de primer orden.** — Dada una familia de superficies con dos parámetros:

[111-9] $$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \quad ,$$

puede obtenerse una ecuación de primer orden que tenga entre sus soluciones todas las superficies de la familia. Derivando [111-9] respecto de x y respecto de y se tiene

[111-10] $$F_x + F_z \cdot p = 0 \quad , \quad F_y + F_z \cdot q = 0 \quad ,$$

y eliminando α y β entre las tres ecuaciones [111-9] y [111-10] resulta

[111-1] $$f(x, y, z, p, q) = 0 \quad ,$$

ecuación diferencial parcial de primer orden que no contiene α ni β y se verifica por [111-9] para todo par α, β. En efecto, para cada par α, β la función z obtenida de [111-9] debe tener derivadas parciales p y q que verifiquen [111-10], y entonces se verifica [111-1] que es consecuencia de [111-9] y [111-10].

Ejemplos: 1. De la familia de planos

[111-11] $$z = \alpha x + \beta y + \alpha\beta$$

derivando resulta: $p = \alpha$, $q = \beta$, y entonces la ecuación diferencial es (cfr. § 111-8, ej. 3):

[111-12] $$z = px + qy + pq .$$

2. De la familia de conos cuádricos

[111-13] $$\alpha xz + \beta yz + \alpha\beta xy = 0$$

derivando resulta

[111-14] $$\alpha(xp + z) + \beta yp + \alpha\beta y = 0, \quad \alpha xq + \beta(yq + z) + \alpha\beta x = 0.$$

Para eliminar α y β puede observarse que estas tres ecuaciones son

lineales y homogéneas en α, β y $\alpha\beta$. Anulando el determinante de los coeficientes se llega a

[111-15] $$xp + yq = z \quad ,$$

que es (§ 110-3, ej. 2) la ecuación diferencial de *todos* los conos con vértice en el origen.

3. La ecuación diferencial parcial de la familia

[111-16] $$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = 1$$

de todas las esferas de radio 1 con centros en el plano xy, resulta reemplazando en [111-16] las expresiones $x - \alpha = -zp$, $y - \beta = -zq$, que resultan de derivar, y es

[111-17] $$z^2(p^2 + q^2 + 1) = 1.$$

Esta ecuación expresa que el segmento de normal entre un punto de la superficie y el plano xy es constante $= 1$.

3. **Soluciones completa, general y singular.** — *a*) Una solución de la ecuación diferencial parcial de primer orden [111-1] que contenga dos constantes arbitrarias se llama (LAGRANGE) solución o integral *completa*:

[111-9] $$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Con ella puede reconstruirse la ecuación diferencial (§ 111-2).

Hemos visto que una solución puede depender de una *función arbitraria*. Tal solución se llama solución o integral *general*, y representa una familia más amplia de superficies (cfr. § 111-2, ej. 2).

b) Veamos cómo puede obtenerse de una solución completa [111-9] una solución general, sin más que suponer α y β no ya constantes, sino adecuadas funciones de x, y, z, tales que [111-9] verifique [111-1].

Supuestas α, β funciones de x, y, z, toda solución [111-9] verifica

$$dF \equiv F_x\, dx + F_y\, dy + F_z(p\, dx + q\, dy) + \\ + F_\alpha\, d\alpha + F_\beta\, d\beta = 0 \quad ,$$

equivalente a las [111-10] si

[111-18] $$F_\alpha\, d\alpha + F_\beta\, d\beta = 0 \quad ,$$

que en las variables independientes x, y equivale a

[111-18'] $$\begin{cases} F_\alpha\ (\alpha_x + \alpha_z\, p) + F_\beta\ (\beta_x + \beta_z\, p) = 0, \\ F_\alpha\ (\alpha_y + \alpha_z\, q) + F_\beta\ (\beta_y + \beta_z\, q) = 0. \end{cases}$$

Éstas se satisfacen para:

1º) α y β constantes, dando la integral completa [111-9] dependiente de dos parámetros;

2º) $F_\alpha = F_\beta = 0$. Por eliminación entre éstas y [111-9] de α y β resulta una superficie que no depende ni de paráme-

tro ni de función arbitraria alguna y que acaso sea solución de la ecuación [111-1]. En este caso se la llama solución *singular* (véase *d*);

3º) Si F_α y F_β no son simultáneamente nulas, querrá decir que la funciones $\alpha[x, y, z(x, y)]$, $\beta[x, y, z(x, y)]$, tienen un jacobiano nulo respecto de las variables independientes x, y, existiendo entre ellas una relación (§ 68-3) que las liga:

[111-19] $$\Phi(\alpha, \beta) = 0.$$

De ésta se deduce que habrá de ser

[111-20] $$\Phi_\alpha \, d\alpha + \Phi_\beta \, d\beta = 0 \quad ,$$

que junto con [111-18], hace que la Φ deba ser tal que se cumpla

[111-21] $$\Psi \equiv \begin{vmatrix} F_\alpha & F_\beta \\ \Phi_\alpha & \Phi_\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto, fijada previamente la función *arbitraria* [111-19], el cumplimiento de [111-21] asegura que se cumpla [111-18], es decir las [111-10], y el proceso de eliminación conduce como en § 111-2 a la misma ecuación [111-1], pues en él resulta indiferente que α y β sean constantes o variables. Para que el método lleve a una solución efectiva, tal que de [111-9], [111-19] y [111-21] pueda despejarse $z(x, y)$, por eliminación de α y β, basta que sea (§ 68-2):

[111-22] $$\frac{\partial(F, \Phi, \Psi)}{\partial(z, \alpha, \beta)} \equiv F_z \begin{vmatrix} \Phi_\alpha & \Psi_\alpha \\ \Phi_\beta & \Psi_\beta \end{vmatrix} \neq 0.$$

NOTAS: 1. Si [111-19] se expresa en la forma

[111-23] $$\beta = \varphi(\alpha) \quad ;$$

la [111-21] se convierte en

[111-24] $$F_\alpha + F_\beta \, \varphi'(\alpha) = 0.$$

Para obtener la solución general se da arbitrariamente [111-23], se despeja en [111-24] α como función de x, y, z, y se la reemplaza en

[111-25] $$F[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)] = 0.$$

2. El procedimiento seguido no es sino el de variación de los parámetros (cfr. § 107-4, *a*), al reemplazar las constantes α y β por funciones de x, y, z, pero de modo tal que subsistan las relaciones [111-10].

3. Para que [111-9] sea una integral completa es necesario que dependa esencialmente de *dos* parámetros α, β, y no de una combinación $\gamma(\alpha, \beta)$ de ellos. Para esto basta verificar que tenga característica (§ 14-3) $h = 2$ la matriz

$$M = \begin{Bmatrix} F_\alpha & F_{x\alpha} & F_{y\alpha} & F_{z\alpha} \\ F_\beta & F_{x\beta} & F_{y\beta} & F_{z\beta} \end{Bmatrix}.$$

En efecto, si fuera $F(x, y, z, \alpha, \beta) = G[x, y, z, \gamma(\alpha, \beta)]$, tendríamos

$$F_\alpha = G_\gamma \gamma_\alpha \quad , \quad F_{x\alpha} = G_{x\gamma} \gamma_\alpha \quad , \quad F_{y\alpha} = G_{y\gamma} \gamma_\alpha \quad , \quad F_{z\alpha} = G_{z\gamma} \gamma_\alpha \quad ,$$

y análogamente para β en lugar de α, y la característica de M sería 1. Recíprocamente, si la característica de M fuera 1, de

$$F_\alpha / F_\beta = F_{x\alpha} / F_{x\beta} = F_{y\alpha} / F_{y\beta} = F_{z\alpha} / F_{z\beta} \quad y \quad F = 0 \quad ,$$

eliminando x, y, z, resultaría $\beta = \varphi(\alpha)$ y [111-9] dependería de un solo parámetro α.

c) Observando que [111-24] resulta de derivar respecto del parámetro α a la ecuación [111-25], que representa un *haz* de superficies, se tiene (§ 74-3, *a*):

Toda envolvente de un haz elegido arbitrariamente entre las superficies de la familia [111-9], *solución completa, forma parte de la solución general.*

Esto explica cómo la solución completa, que sólo depende de constantes arbitrarias, puede engendrar la solución general, esencialmente más amplia.

EJEMPLOS: 1. La ecuación diferencial parcial de todos los planos (no verticales) por el origen, $z = \alpha x + \beta y$, resulta de $p = \alpha$, $q = \beta$:

[111-26] $$z = px + qy .$$

Esta ecuación representa (§ 110-3, ej. 2) todos los conos con vértice en el origen. Cada uno de estos conos es envolvente del haz de sus planos tangentes, los que pasan por el origen (cfr. § 111-2, ej. 2).

2. Si en la solución completa [111-11] de la ecuación [111-12] ponemos $\beta = 1/\alpha$, resulta el haz de planos:

[111-27] $$z = \alpha x + (y/\alpha) + 1 .$$

Derivando con respecto a α tenemos:

$$0 = x - (y/\alpha^2) \quad \therefore \quad \alpha = \sqrt{y/x} \quad ,$$

que reemplazando en [111-27] da una solución (perteneciente a la solución general pero no a la completa [111-11]):

$$z = 2 \sqrt{xy} + 1 .$$

d) Puede ocurrir que la familia completa [111-9] tenga una envolvente, que entonces resulta de eliminar α y β entre

[111-28] $$F = 0 \quad , \quad F_\alpha = 0 \quad , \quad F_\beta = 0 \quad ,$$

y no contiene ya elementos arbitrarios. Entonces, esta envolvente es también solución de [111-1]; se la llama solución o integral *singular*. Como la eliminación en [111-28] puede dar otros lugares fuera de la envolvente, es preciso verificar si el resultado satisface a la ecuación [111-1]. También puede obtenerse una superficie perteneciente a la integral general, e incluso a la solución completa $F = 0$ (ver ejercicio 3).

EJEMPLOS: 3. Para la familia [111-16] las ecuaciones [111-28] dan de inmediato los planos $z = 1$ y $z = -1$, envolventes de las esferas y superficies integrales singulares de [111-17].

4. En la ecuación [111-12], derivando la solución completa [111-11] respecto de cada parámetro, resulta $\beta = -x$, $\alpha = -y$, que reemplazadas en [111-11] dan

$$z = -xy \quad ,$$

y como esta función verifica [111-12], es solución singular.

5. La familia de los planos que distan 1 del origen

[111-29] $$\alpha x + \beta y + \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\, z = 1$$

tiene por ecuación diferencial

[111-30] $$(px + qy - z)^2 = p^2 + q^2 + 1,$$

[pues de [111-29] y: $\alpha + \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\,p = 0$, $\beta + \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\,q = 0$, resulta $(px + qy - z)^2 = (1-\alpha^2-\beta^2)^{-1}$, y de $(1-\alpha^2-\beta^2)/1 = \alpha^2/p^2 = \beta^2/q^2$ resulta sumando antecedentes y consecuentes: $1-\alpha^2-\beta^2 = 1/(1+p^2+q^2)$].

Aplicadas a [111-29] las ecuaciones [111-28] dan por eliminación la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, que envuelve la familia de planos, y es solución singular de [111-30].

NOTAS: 4. No puede hacerse distinción esencial entre integral completa y general, existiendo infinitas integrales completas. En efecto, si se establece entre los dos parámetros α y β una relación como $\beta = \tau(\alpha, \alpha', \beta')$ con dos nuevos parámetros α' y β', las superficies correspondientes de la integral general dependerán de estos dos parámetros y su conjunto será una nueva integral completa. En la integral general que ésta engendra, estará comprendida la integral completa anterior, correspondiente a la relación $\beta = \tau(\alpha, \alpha', \beta')$ entre α' y β'.

Por el contrario, la integral singular, por su significado geométrico, no depende de la elección de la integral completa.

5. La solución singular puede obtenerse, sin necesidad de una integral completa, mediante derivaciones y eliminaciones a partir de la ecuación diferencial, como en las ecuaciones diferenciales ordinarias (cfr. Cap. XXVI, nota I): *La solución singular resulta de eliminar p y q entre las ecuaciones*

[111-31] $$f = 0 \quad , \quad f_p = 0 \quad , \quad f_q = 0.$$

Limitémonos a demostrarlo suponiendo que existe una integral completa $z = G(x, y, \alpha, \beta)$ para la cual el determinante

$$D = G_{x\alpha}\, G_{y\beta} - G_{x\beta}\, G_{y\alpha}$$

no se anula (cfr. nota 3) sobre la superficie solución singular.

Como $f(x, y, G, G_x, G_y) = 0$ se verifica idénticamente en α y β, derivando respecto de α y β resulta

$$f_z\, G_\alpha + f_p\, G_{x\alpha} + f_q\, G_{y\alpha} = 0 \quad ,$$
$$f_z\, G_\beta + f_p\, G_{x\beta} + f_q\, G_{y\beta} = 0 \quad ,$$

y como en la superficie integral singular es $G_\alpha = G_\beta = 0$, queda para los puntos de ella un sistema lineal y homogéneo en f_p y f_q, siendo el determinante de los coeficientes $D \neq 0$, y entonces $f_p = 0$, $f_q = 0$.

4. Curvas y franjas características. — *a*) Entre los ∞^5 elementos planos (§ 111-1) del espacio consideremos una familia continua de un parámetro λ:

[111-32] $$x = \mathrm{x}(\lambda),\ \ y = \mathrm{y}(\lambda),\ z = \mathrm{z}(\lambda)\,,\ p = \mathrm{p}(\lambda),\ q = \mathrm{q}(\lambda).$$

En general, la curva determinada por las tres primeras ecuaciones no estará en la envolvente desarrollable (§ 74-5) de la familia simplemente infinita de elementos planos, de ecuación general

[111-33] $$Z - \mathrm{z}(\lambda) = \mathrm{p}(\lambda)[X - \mathrm{x}(\lambda)] + \mathrm{q}(\lambda)[Y - \mathrm{y}(\lambda)].$$

Dicha envolvente se obtiene eliminando λ entre ésta y

[111-34] $$-z' = p'(X - x) + q'(Y - y) - px' - qy' \quad ;$$

si esta envolvente contiene la curva [111-32], se han de verificar [111-33] y [111-34] para $X = x(\lambda)$, $Y = y(\lambda)$, $Z = z(\lambda)$, siendo por tanto necesario y suficiente que se cumpla

[111-35] $$z'(\lambda) = p(\lambda)x'(\lambda) + q(\lambda)y'(\lambda).$$

Toda familia planar [111-32] que cumpla [111-35] se dice que forma una *franja*, suponiendo que $x'(\lambda)$, $y'(\lambda)$ no se anulan simultáneamente.

Los elementos planos correspondientes a los puntos de una curva cualquiera trazada sobre una superficie y los planos tangentes a ésta, forman franja por cumplir evidentemente la condición [111-35], incluída en $dz = p\,dx + q\,dy$, ecuación diferencial (§ 66-5) del plano tangente a la superficie.

En § 111-1 hemos visto que todo elemento plano que verifica la ecuación [111-1] contiene una dirección [111-7] según la cual toca al cono de MONGE correspondiente a su sostén. Consideremos en una superficie integral de [111-1] una curva C cuyas tangentes sean las direcciones [111-7] según las cuales tocan a los respectivos conos de MONGE los elementos planos correspondientes a sus puntos de contacto. Dichos elementos planos formarán una franja Γ. Las [111-7] nos dicen que la curva C verifica

[111-36] $$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q}.$$

Como f_p y f_q no se anulan simultáneamente, puede elegirse un parámetro t tal que

[111-37] $$\frac{dx}{dt} = f_p \quad , \quad \frac{dy}{dt} = f_q \quad , \quad \frac{dz}{dt} = pf_p + qf_q.$$

Por cumplir [111-1] la superficie integral, es también

[111-38] $$\begin{cases} f_x + f_z\,p + f_p \,.\, p_x + f_q \,.\, q_x = 0 \quad , \\ f_y + f_z\,q + f_p \,.\, p_y + f_q \,.\, q_y = 0 \quad , \end{cases}$$

en particular para los elementos planos $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $p(t)$, $q(t)$ de la superficie integral correspondientes a la curva C.

Como $p_y = q_x$ (§ 69-2), de [111-38] y [111-37] se deduce

[111-39] $$\begin{cases} f_x + f_z\,p = -\left(p_x\dfrac{dx}{dt} + p_y\dfrac{dy}{dt}\right) = -\dfrac{dp}{dt} \quad , \\ f_y + f_z\,q = -\left(q_x\dfrac{dx}{dt} + q_y\dfrac{dy}{dt}\right) = -\dfrac{dq}{dt} \quad . \end{cases}$$

El sistema de las cinco ecuaciones diferenciales ordinarias [111-36], [111-39], o bien

[111-40] $$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{-dp}{f_x + f_z\,p} = \frac{-dq}{f_y + f_z\,q}$$

se llama sistema de ecuaciones de las *franjas características* o *sistema característico* o *adjunto* (cfr. § 110-4, *a*). Las [111-40] también suelen llamarse *ecuaciones subsidiarias* de [111-1] y determinan las franjas características Γ, cuyos sostenes se llaman *curvas características* C, tales que la dirección de la tangente a la curva C coincide con la dirección de contacto del elemento plano respectivo a su cono de MONGE correspondiente.

Recíprocamente, toda solución de [111-40] determinada por un elemento inicial x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, solución no singular de [111-1] tiene esa propiedad.

En efecto, por sustitución de $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t, \ldots, \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ dados por [111-37], [111-39], se comprueba que es

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{f}_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \mathrm{f}_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \mathrm{f}_z \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \mathrm{f}_p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \mathrm{f}_q \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0\,,$$

y la f constante a lo largo de la solución de [111-40] es nula por serlo el elemento inicial. De ahí que dicha solución esté *formada por elementos planos de la ecuación* [111-1], su envolvente sea una franja elemental de superficie integral y le sea aplicable lo dicho anteriormente.

b) El sistema característico es independiente de la superficie integral que contenga la franja Γ. Si verifica condiciones (como las de § 105-3, por ejemplo) que aseguren la existencia y unicidad de la solución por $x = x_0, \ldots, q = q_0$, para $t = t_0$, el conocimiento de un elemento plano tangente a una superficie integral, permite construir la franja característica que parte de aquel elemento y está en la superficie. Entonces:

Si dos superficies integrales son tangentes en un punto P, *son tangentes a lo largo de la franja característica determinada por el elemento plano común en* P.

NOTAS: 1. No toda solución del sistema característico es una franja característica, pues podemos tomar como elemento plano inicial uno que no verifique [111-1], es decir, no sea tangente al cono de MONGE (ver ejercicio 5).

2. Una franja que verifique [111-1] se llama *franja integral.* No toda curva D es sostén de una franja integral (fig. 373).

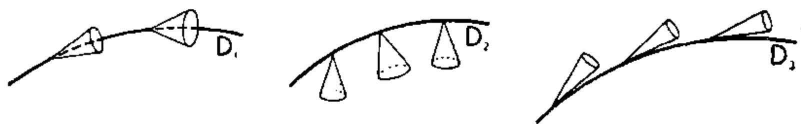


Fig. 373. — D_1: curva sin franja integral real; D_2: curva sostén de franjas integrales reales; D_3: curva característica.

3. Si en una franja integral Λ, de sostén D: $x = \mathrm{x}(\tau)$, $y = \mathrm{y}(\tau)$, $z = \mathrm{z}(\tau)$, es $\Delta = \mathrm{f}_p \cdot \mathrm{y}'(\tau) - \mathrm{f}_q \cdot \mathrm{x}'(\tau) \neq 0$, o sea $\mathrm{f}_q : \mathrm{f}_p \neq \mathrm{d}y : \mathrm{d}x$, la franja no es característica, por cada uno de sus elementos planos pasa una curva

para una franja característica distinta y hay una sola superficie integral por Λ en su vecindad. Si en Λ es $\Delta = 0$, hay superficies integrales por Λ sólo si ésta es franja característica (cfr. § 110-4, nota 1). En este caso hay infinitas, pudiendo entonces por *b*) considerarse las franjas características como elementos de ramificación de las superficies integrales.

4. El sistema [111-40] tiene ∞^4 soluciones, pero como el primer miembro ha de cumplir [111-1], quedan ∞^3 franjas características. De otro modo, por cada sostén P del espacio pasan ∞^1 elementos planos de [111-1], en total ∞^4 elementos, y como cada franja característica tiene ∞^1 elementos, quedan ∞^3 franjas características.

En el caso de la ecuación lineal hay sólo ∞^2 *líneas* características (§ 110-4), pero al quedar reducido el cono de MONGE a una recta (§ 111-1, nota 2), por cada línea característica pasan ∞^1 franjas características, dando, como antes, en definitiva, ∞^3 *franjas características.* (Cfr. § 111-9).

5. Las características y la integral completa. — Entre los haces de superficies extraídas de la familia [111-9] solución completa, está el formado por las superficies de [111-9] que pasan por un punto dado $P_0(x_0, y_0, z_0)$, y que resulta de establecer entre α y β la relación

$$[111\text{-}41] \qquad F(x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta) = 0.$$

Como todas estas superficies son (§ 111-1, *b*) tangentes al cono de MONGE en P_0, la envolvente E del haz será una superficie integral (llamada *conoide integral*) con un punto cónico en P_0, y sus curvas características (§ 74-3, *a*) serán tangentes a las generatrices del cono de MONGE (fig. 374).

La misma propiedad tienen las curvas características de toda superficie integral S obtenida como envolvente de un haz [111-25]. Consideremos, en efecto, la curva característica C (fig. 375), posición límite de la intersección de las superficies S_α y $S_{\alpha+h}$ de [111-25] por los valores α y $\alpha + h$ del parámetro, cuando $h \to 0$. En un punto P de C, los planos tangentes a S_α y a $S_{\alpha+h}$ se cortan según una recta que tiende a la tangente a C, y como esos planos son tangentes al cono de MONGE en P, su intersección tiende a coincidir con una generatriz del cono, la que así resulta tangente a la curva característica C.

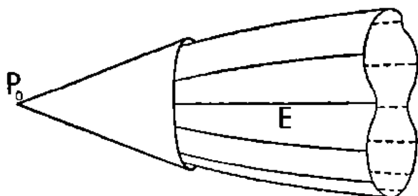


Fig. 374.

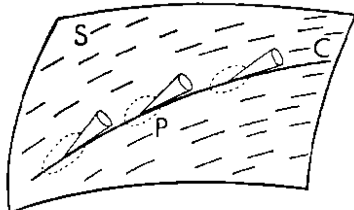


Fig. 375.

Si a cada punto de S asociamos la dirección de la generatriz del cono de MONGE que resulta tangente a S, tendremos un campo de direcciones en S (fig. 375). Las envolventes del campo son las curvas características, que así resultan independientes del haz de superficies que se haya considerado para obtener S como envolvente. Son las que hemos llamado *curvas características de la superficie integral* S, y a las franjas (§ 111-4) que definen en S, *franjas características* de S.

Probemos que *si* [111-9] *es una franja integral completa* entonces las ∞^3 curvas

[111-42] $$F = 0 \quad , \quad F_\alpha + \gamma F_\beta = 0 \quad ,$$

son curvas características de la ecuación [111-1].

Por suponer $F_z \neq 0$, bastará demostrarlo para el caso en que [111-9] toma la forma de cada una de sus ramas

[111-43] $$F \equiv z - v(x, y, \alpha, \beta) = 0.$$

Calculemos dx, dy, dz de las curvas

[111-44] $$z - v = 0 \quad , \quad v_\alpha + \gamma v_\beta = 0$$

y dp, dq de los planos tangentes de [111-43] a lo largo de ellas, viendo que verifican el sistema característico [111-40].

La superficie integral [111-43] verifica [111-1], es decir

[111-45] $$f(x, y, v, v_x, v_y) = 0 \quad ,$$

y por tanto

[111-46] $$\begin{cases} f_z \quad v_\alpha + f_p \quad v_{x\alpha} + f_q \quad v_{y\alpha} = 0, \\ f_z \quad v_\beta + f_p \quad v_{x\beta} + f_q \quad v_{y\beta} = 0. \end{cases}$$

No anulándose simultáneamente f_p y f_q, podemos considerar que, por ejemplo, es

[111-47] $$\begin{vmatrix} v_\alpha & v_{y\alpha} \\ v_\beta & v_{y\beta} \end{vmatrix} \neq 0.$$

De la segunda [111-44] se deduce

[111-48] $$(v_{\alpha x} + \gamma v_{\beta x})dx + (v_{\alpha y} + \gamma v_{\beta y})dy = 0 \quad ,$$

y de las [111-46] resulta

[111-49]
$$f_z \ (v_\alpha + \gamma v_\beta) + f_p \ (v_{x\alpha} + \gamma v_{x\beta}) + f_q \ (v_{y\alpha} + \gamma v_{y\beta}) = 0 \quad ,$$

cuyo primer sumando es nulo, entonces, de [111-48] y [111-47] se deduce

[111-50] $$f_q \,.\, dx - f_p \, dy = 0.$$

Por adecuada elección de t resultan de [111-50] las dos primeras de [111-37], mientras que la tercera se deduce por ser

[111-51] $$dz - v_x \, dx - v_y \, dy = 0 \quad ,$$

pues $p = v_x$, $q = v_y$ determinan el plano tangente a la superficie integral [111-43].

De la derivación parcial respecto de x de [111-45] queda

[111-52] $$f_x + f_z v_x + f_p v_{xx} + f_q v_{yx} = 0 \quad ,$$

y haciendo lo mismo con [111-51] resulta

[111-53] $$\frac{dp}{dt} = v_{xx} \frac{dx}{dt} + v_{yx} \frac{dy}{dt} .$$

De [111-53] y [111-52], teniendo en cuenta las [111-37], resulta la primera [111-39] y análogamente la segunda, c. q. d.

6. El problema de Cauchy. — Este problema planteado en § 111-3, *c*, consiste en trazar por una curva arbitraria D, que no sea una característica, una superficie integral, lo que puede conseguirse determinando por D una franja integral y trazando por cada uno de sus elementos planos la franja característica correspondiente (§ 111-4, *a*), engendrando así, mediante franjas características, la supercicie integral buscada que pasa por D.

Un elemento plano inicial x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 que verifique la ecuación diferencial dada

[111-54] $$f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$$

determina una franja característica

[111-55] $$\begin{cases} x = x(\lambda;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0) \quad , \\ y = y(\lambda;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0) \quad , \\ z = z(\lambda;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0) \quad , \\ p = p(\lambda;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0) \quad , \\ q = q(\lambda;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0) \quad , \end{cases}$$

donde para $\lambda = \lambda_0$ se supone que $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$.

Veamos cómo deben depender los elementos planos iniciales de otro parámetro μ:

[111-56] $$x_0 = x_0(\mu), \quad y_0 = y_0(\mu), \quad z_0 = z_0(\mu), \quad p_0 = p_0(\mu), \quad q_0 = q_0(\mu)$$

para que sustituyendo en [111-55] den

[111-57] $$\begin{cases} x = x[\lambda;\ x_0(\mu),\ y_0(\mu),\ z_0(\mu),\ p_0(\mu),\ q_0(\mu)] \quad , \\ y = y[\lambda;\ x_0(\mu),\ y_0(\mu),\ z_0(\mu),\ p_0(\mu),\ q_0(\mu)] \quad , \\ z = z[\lambda;\ x_0(\mu),\ y_0(\mu),\ z_0(\mu),\ p_0(\mu),\ q_0(\mu)] \quad , \\ p = p[\lambda;\ x_0(\mu),\ y_0(\mu),\ z_0(\mu),\ p_0(\mu),\ q_0(\mu)] \quad , \\ q = q[\lambda;\ x_0(\mu),\ y_0(\mu),\ z_0(\mu),\ p_0(\mu),\ q_0(\mu)] \quad , \end{cases}$$

tales que las tres primeras, con λ, μ parámetros independientes, representen una superficie integral de [111-1].

Las dos últimas [111-57] deben corresponder a los coeficientes del plano tangente a la superficie determinada por las tres primeras, verificando la ecuación diferencial. Por tanto es necesario y suficiente que las funciones [111-57] verifiquen

[111-58] $$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = p \frac{\partial x}{\partial \lambda} + q \frac{\partial y}{\partial \lambda} \quad ,$$

[111-59] $$\frac{\partial z}{\partial \mu} = p \frac{\partial x}{\partial \mu} + q \frac{\partial y}{\partial \mu} \quad ,$$

[111-1] $$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Por ser [111-55] solución del sistema característico [111-40] se cumple [111-58] ($\mu =$ constante) y además se cumple [111-1] cuando y sólo cuando [111-56] verifiquen [111-54] (§ 111-4, *a*). Basta, pues, ver en qué condiciones se anula

[111-60] $$H = \frac{\partial z}{\partial \mu} - p \frac{\partial x}{\partial \mu} - q \frac{\partial y}{\partial \mu} .$$

Derivando respecto de λ queda

[111-61] $$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial \mu} - p \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} - q \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu} - \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} - \frac{\partial q}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu} .$$

Si se deriva [111-58] respecto de μ:

[111-62] $$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial \mu} - p \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} - q \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu} - \frac{\partial p}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial q}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

y restando [111-62] de [111-61] resulta

[111-63] $$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{\partial p}{\partial \mu} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial q}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial q}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu} ,$$

que por [111-40], de las que son solución [111-55], se convierte en

[111-64] $$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{\partial p}{\partial \mu} f_p + (f_x + f_z p) \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial q}{\partial \mu} f_q + (f_y + f_z q) \frac{\partial y}{\partial \mu} =$$
$$= f_x \frac{\partial x}{\partial \mu} + f_y \frac{\partial y}{\partial \mu} + f_p \frac{\partial p}{\partial \mu} + f_q \frac{\partial q}{\partial \mu} + f_z \left(p \frac{\partial x}{\partial \mu} + q \frac{\partial y}{\partial \mu} \right).$$

Como las [111-57] verifican [111-1], es

[111-65] $$f_x \frac{\partial x}{\partial \mu} + f_y \frac{\partial y}{\partial \mu} + f_z \frac{\partial z}{\partial \mu} + f_p \frac{\partial p}{\partial \mu} + f_q \frac{\partial q}{\partial \mu} = 0 ,$$

que con [111-64] da

[111-66] $$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = f_z \left(p \frac{\partial x}{\partial \mu} + q \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial z}{\partial \mu} \right) = - f_z H.$$

Esta relación prueba que H cumple

[111-67] $$H = H_0 e^{-\int_{\lambda_0}^{\lambda} f_z \, d\lambda} ,$$

es decir, H se anula sólo cuando es $H_0 = 0$:

[111-68] $$\frac{\partial z_0}{\partial \mu} - p_0 \frac{\partial x_0}{\partial \mu} - q_0 \frac{\partial y_0}{\partial \mu} = 0 ,$$

pues para $\lambda = \lambda_0$ las [111-57] se convierten en las [111-56].

Así, conocidas las características [111-55], puede resolverse el problema de CAUCHY, al dar la curva inicial

$$x_0 = x_0(\mu) \quad , \quad y_0 = y_0(\mu) \quad , \quad z_0 = z_0(\mu) \quad ,$$

sin más que determinar $p_0 = p_0(\mu)$, $q_0 = q_0(\mu)$ mediante [111-54] y [111-68] para hallar la franja integral inicial. Entonces las tres primeras [111-57] representan paramétricamente la superficie integral buscada. El método anterior se debe a DARBOUX.

NOTAS: 1. Para asegurar la *existencia* y *unicidad* de la superficie integral buscada basta considerar una determinada rama de la ecuación [111-1], supuesta resuelta, por ejemplo, respecto de p:

[111-69] $$p + \varkappa(x, y, z, q) = 0 \quad ;$$

y dar una curva inicial D en el plano $x = a$, tal que eligiendo como parámetro $\mu = y_0$, las tres primeras [111-56] se conviertan en

[111-70] $$x_0 = a \quad , \quad z_0 = z_0(y_0).$$

Entonces, éstas con

[111-71] $$q_0 = z'_0(y_0)$$

verifican [111-68].

La integración del sistema [111-40] con elementos planos iniciales que verifiquen

[111-72] $$p_0 + g(x_0, y_0, z_0, q_0) = 0$$

determinan las funciones [111-55]. Tomando $y_0 = \mu$ como parámetro, las [111-70], [111-71] y [111-72] determinan las

$$x_0 = a, \quad y_0 = y_0, \quad z_0 = z_0(y_0), \quad p_0 = -g[a, y_0, z_0(y_0), z'_0(y_0)], \quad q_0 = z'_0(y_0)$$

a introducir en [111-57]. Eliminando λ, y_0 entre las tres primeras [111-57] se obtiene la superficie integral buscada.

Obsérvese que en este caso es $\Delta = f_p\, y'(y_0) - f_q\, x'(y_0) = 1 \,.\, 1 - g_q \,.\, 0 = 1 \neq 0$ (§ 111-4, nota 3).

2. No es correcto afirmar, como lo hacen muchos autores, que por *toda* curva inicial (aunque sea analítica) que no es una característica pasa una y sólo una superficie integral, pues puede ser $\Delta = 0$ y la superficie formada por las características no tener expresión explícita en z (ver § 111-4, nota 3, y § 110-4, nota 1 y ejemplo 1).

3. También puede ocurrir que la curva D, sin ser característica, sea una envolvente (§ 74-4) de características; tal es el caso para las llamadas *curvas integrales* de [111-1] obtenidas como solución de la *ecuación de* MONGE *asociada* a la [111-1], que es la establecida eliminando p y q entre las [111-36] y [111-1], o bien, sustituyendo en la ecuación del cono de MONGE $X - x_0$, $Y - y_0$, $Z - z_0$ por dx, dy, dz. Las soluciones de la ecuación de MONGE dependen de una función arbitraria, tal que puede tomarse $y = \varphi(x)$, mientras que su caso particular las características dependían de un parámetro arbitrario p_0, con q_0 determinado por [111-54]. El problema de CAUCHY para tales curvas integrales D puede también resolverse por el método anterior de DARBOUX, obteniendo una superficie integral, pero D será de ella línea singular (§ 111-4, nota 3).

EJEMPLOS: 1. La ecuación $p^2 + q^2 = 1$ puesta en la forma

[111-73] $$f \equiv \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2 - 1) = 0 \quad ,$$

tiene como sistema característico [111-40] el

[111-74] $$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{1} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}.$$

Las dos últimas dan $p = p_0$, $q = q_0$, y las otras dos $x - x_0 = p_0(z - z_0)$, $y - y_0 = q_0(z - z_0)$, resultando como características el complejo de rectas

[111-75] $$\frac{x - x_0}{p_0} = \frac{y - y_0}{q_0} = \frac{z - z_0}{1} \quad ; \quad p_0^2 + q_0^2 = 1 \quad ;$$

que forman 45° con el eje z.

El cono de MONGE en un punto (x_0, y_0, z_0) es

$$(Z - z_0)^2 = (X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2.$$

En particular, el conjunto de conos circulares

[111-76] $$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - z^2 = 0$$

forma una integral completa (cfr. § 111-8, ejemplo 2). Pero aquí las

[111-28] originan el plano $z = 0$, que *no es solución* singular de [111-85], pues dicho plano no es envolvente de los conos [111-76], sino lugar de sus vértices.

Para resolver el problema de CAUCHY, dada la curva [111-70], basta eliminar y_0 entre las dos ecuaciones

[111-77] $$\frac{x-a}{\pm\sqrt{1-[z'_0(y_0)]^2}} = \frac{y-y_0}{z'_0(y_0)} = \frac{z-z_0(y_0)}{1}$$

para obtener la superficie integral buscada.

El doble signo del primer denominador de [111-77] pone de manifiesto que para la unicidad de la solución nos hemos de referir a una u otra rama $p = \pm\sqrt{1-q^2}$ de la ecuación diferencial propuesta.

Si [111-70] fuese la recta

[111-78] $$x_0 = 0 \quad , \quad z_0 = y_0 \quad ,$$

las [111-77] se convierten en

$$\frac{x}{0} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z-z_0}{1} \quad ,$$

es decir, dan $x = 0$, $z = y$, que es la misma recta [111-78] y no una superficie, fracasando la búsqueda por ser [111-78] una característica.

Si [111-70] fuese la recta $x_0 = 0$, $z_0 = \frac{1}{2}y_0$, como superficie integral se obtiene cada uno de los dos planos $\pm\sqrt{3}x + y - 2z = 0$, según nos refiramos a una u otra de las dos ramas de la ecuación diferencial.

Por la recta $x_0 = 0$, $z_0 = 2y_0$ (*interior* a los conos de MONGE de sus puntos) no pasa ninguna superficie integral real, aunque puedan considerarse como soluciones los planos imaginarios $\pm\sqrt{-3}\,x - 2y + z = 0$.

2. Para la ecuación

[111-79] $$px + qy - z + p^2 + q^2 = 0 \quad ,$$

el sistema característico [111-40] es

[111-80] $$\frac{dx}{x+2p} = \frac{dy}{y+2q} = \frac{dz}{z+p^2+q^2} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} .$$

De las dos últimas se deduce

[111-81] $$p = \alpha \quad , \quad q = \beta \quad ,$$

que introducidas en [111-79] originan una integral completa

[111-82] $$\alpha x + \beta y - z + \alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad ,$$

como es inmediato ver (cfr. § 111-8, ejemplo 1).

Las [111-28] dan aquí como integral *singular* el paraboloide de revolución

[111-83] $$x^2 + y^2 - 4z = 0 \quad ,$$

envolvente de la familia de planos [111-82].

Teniendo en cuenta [111-81] en las dos primeras [111-80], resulta

$$\frac{x+2\alpha}{x_0+2\alpha} = \frac{y+2\beta}{y_0+2\beta} = \frac{z+\alpha^2+\beta^2}{z_0+\alpha^2+\beta^2} \quad ,$$

es decir, las rectas

[111-84] $$\frac{x-x_0}{x_0+2\alpha} = \frac{y-y_0}{y_0+2\beta} = \frac{z-z_0}{z_0+\alpha^2+\beta^2} = \frac{1}{\lambda}$$

cumpliendo

[111-85] $$\alpha x_0 + \beta y_0 - z_0 + \alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad ,$$

que son las curvas características C de la ecuación [111-79], sostén de franjas características Γ planas con $p = \alpha$, $q = \beta$.

Si se eliminan α, β entre las tres [111-84] y [111-85] se obtiene el cono de MONGE de vértice (x_0, y_0, z_0). Para ello, de las [111-84] se obtiene

[111-86] $$2\alpha = \lambda x - x_0(1+\lambda) \quad , \quad 2\beta = \lambda y - y_0(1+\lambda) \quad ,$$
$$4\alpha^2 + 4\beta^2 = 4[\lambda z - z_0(1+\lambda)] \quad ,$$

y de éstas

[111-87] $$[\lambda x - x_0(1+\lambda)]^2 + [\lambda y - y_0(1+\lambda)]^2 = 4[\lambda z - z_0(1+\lambda)] .$$

La sustitución de [111-86] en [111-85] da

$$\lambda = \frac{x_0^2 + y_0^2 + 4z_0}{xx_0 + yy_0 + 2z - 2z_0 - x_0^2 - y_0^2} \quad ,$$

que introducida en [111-81] proporciona el cono de MONGE buscado

[111-88] $$(xx_0 + yy_0 + 2z + 2z_0)^2 - (x_0^2 + y_0^2 + 4z_0)(x^2 + y^2 + 4z) = 0 \quad ,$$

circunscrito al paraboloide [111-83], cuyas ∞^3 tangentes son las rectas características con franjas características planas tangentes a dicho paraboloide.

Por [111-42], las características se obtienen también de

[111-89] $$\begin{cases} \alpha x + \beta y - z + \alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad , \\ x + 2\alpha + \gamma(y + 2\beta) = 0 \quad , \end{cases}$$

resultando las mismas rectas [111-84], [111-85], pues de la última se deduce

$$\gamma = -\frac{x - x_0}{y - y_0} = -\frac{x_0 + 2\alpha}{y_0 + 2\beta}$$

y de éstas y la primera [111-89] resultan las [111-84], [111-85].

Para resolver el problema de CAUCHY, dada la curva

[111-70] $$x_0 = a \quad , \quad z_0 = \mathrm{z}_0(y_0) \quad ,$$

con $\alpha = p_0$, $\beta = q_0 = z'_0(y_0)$ en [111-84], [111-85], basta eliminar y_0, p_0 en

[111-90] $$\begin{cases} \dfrac{x - a}{a + 2p_0} = \dfrac{y - y_0}{y_0 + 2\mathrm{z}'_0(y_0)} = \dfrac{z - \mathrm{z}_0(y_0)}{z_0 + p_0^2 + [\mathrm{z}'_0(y_0)]^2} \quad , \\ p_0 a + \mathrm{z}'_0(y_0) y_0 - \mathrm{z}_0(y_0) + p_0^2 + [\mathrm{z}'_0(y_0)]^2 = 0 \quad , \end{cases}$$

para obtener la superficie integral buscada.

7. Método de integración de Lagrange y Charpit. — Veamos cómo puede hallarse una integral completa de [111-1] mediante el sistema característico

[111-40] $$\frac{dx}{\mathrm{f}_p} = \frac{dy}{\mathrm{f}_q} = \frac{dz}{p\mathrm{f}_p + q\mathrm{f}_q} = \frac{dp}{-\mathrm{f}_x - \mathrm{f}_z p} = \frac{dq}{-\mathrm{f}_y - \mathrm{f}_z q} .$$

Si con estas ecuaciones puede formarse una que se pueda integrar, tendremos

[111-91] $$\mathrm{g}(x, y, z, p, q) = \alpha \quad ,$$

y supondremos además que [111-1] y [111-91] puedan resolverse en p y q dando:

[111-92] $$p = \mathrm{p}(x, y, z, \alpha) \quad ; \quad q = \mathrm{q}(x, y, z, \alpha) .$$

En la ecuación en diferenciales totales (nota I):

[111-93] $dz - p(x, y, z, \alpha)dx - q(x, y, z, \alpha)dy = 0$

es solución cada *par* de funciones $y = y(x)$, $z = z(x)$ que la reduzcan a una identidad en x. Probaremos que [111-93] es *completamente integrable* (nota I, c), o sea equivalente a $dF(x, y, z) = 0$, o sea a

[111-94] $F(x, y, z) = \beta =$ constante,

siendo solución de [111-93] todo par $y = y(x)$, $z = z(x)$ que verifique la *solución general* [111-94].

Para ello la condición necesaria y suficiente es (nota I, e):

[111-95] $p_y + p_z q = q_x + q_z p.$

Para verificarla, derivemos respecto de x y respecto de y, las ecuaciones [111-1] y [111-91], después de reemplazar en ellas las [111-92]:

$$f_x + f_z p + f_p(p_x + p_z p) + f_q(q_x + q_z p) = 0 \quad ,$$
$$g_x + g_z p + g_p(p_x + p_z p) + g_q(q_x + q_z p) = 0 \quad ,$$
$$f_y + f_z q + f_p(p_y + p_z q) + f_q(q_y + q_z q) = 0 \quad ,$$
$$g_y + g_z q + g_p(p_y + p_z q) + g_q(q_y + q_z q) = 0 \quad .$$

Multiplicando respectivamente por g_p, $-f_p$, g_q, $-f_q$, y sumando, resulta:

[111-96] $(f_p g_q - f_q g_p)[p_y + p_z q - (q_x + q_z p)] =$
$= -(f_x + f_z p)g_p + (g_x + g_z p)f_p - (f_y + f_z q)g_q + (g_y + g_z q)f_q.$

De [111-91] resulta $g_x dx + g_y dy + g_z dz + g_p dp + g_q dq = 0$, y reemplazando cada diferencial por el correspondiente denominador en [111-40], se deduce que el segundo miembro de [111-96] es nulo. Como en el primer miembro el primer factor es $\partial(f, g)/\partial(p, q) \neq 0$ [para que [111-1] y [111-91] puedan resolverse en p y q], debe anularse el segundo factor, lo que demuestra [111-95].

El segundo miembro de [111-96] suele escribirse en la forma

[111-97] $[f, g] = f_p(g_x + g_z p) - g_p(f_x + f_z p) +$
$+ f_q(g_y + g_z q) - g_q(f_y + f_z q) \quad ,$

y su anulación $[f, g] = 0$ se expresa diciendo que f y g *están en involución.*

La solución general de [111-93] que escribiremos

[111-98] $\Phi(x, y, z, \alpha) = \beta \quad ,$

es también solución de la ecuación en derivadas parciales [111-1]. En efecto, se tiene para ella $dz = p\,dx + q\,dy$, siendo por [111-93] $\partial z/\partial x = p(x, y, z, \alpha)$, $\partial z/\partial y = q(x, y, z, \alpha)$, y estas expresiones verifican [111-1] por la manera de obtener [111-92].

Como la solución [111-98] tiene dos constantes arbitrarias es una solución completa. Resumiendo, el método de LAGRANGE-CHARPIT para hallar una integral completa de [111-1] consta de los siguientes pasos:

1º) *Se halla una integral* [111-91] *del sistema característico;*

2º) *De ella y la ecuación dada se despejan* p *y* q *y se reemplaza en* $dz = p\,dx + q\,dy$, *obteniéndose una ecuación en diferenciales totales, que resulta completamente integrable;*

3º) *Se halla su solución general, que resulta solución completa de* [111-1].

EJEMPLOS: 1. (Cfr. ejercicio 10, *b*): $pq + p + q = 0$
Del sistema característico resulta $dp = 0$, y tenemos una integral $p = \alpha$. Por la ecuación dada es entonces $q = -\alpha/(\alpha + 1)$. Reemplazando en $dz = p\,dx + q\,dy$ se tiene la ecuación completamente integrable

$$dz = \alpha\,dx - [\alpha\,dy/(\alpha + 1)].$$

Es inmediata la integral general $z = \alpha x - [\alpha y/(\alpha + 1)] + \beta$, que es a la vez integral completa de la ecuación dada.

2. $p^2 + q^2 y - qz = 0$. Una integral del sistema característico es $q = \alpha$, y por la ecuación dada: $p = \sqrt{\alpha z - \alpha^2 y}$.
Tenemos entonces la ecuación en diferenciales totales:

$$dz = \sqrt{\alpha z - \alpha^2 y}\,dx + \alpha\,dy \quad ,$$

que escrita en la forma $(dz - \alpha\,dy)/\sqrt{\alpha(z - \alpha y)} = dx$, conduce a la integral general (integral completa de la ecuación dada):

$$2\sqrt{z - \alpha y} = \sqrt{\alpha}(x + \beta).$$

8. **Otros métodos de integración.** — *a*) *Si se han encontrado dos funciones* $g(x, y, z, p, q)$, $h(x, y, z, p, q)$ *que son constantes a lo largo de las trayectorias del sistema característico* [111-40], *tales que sea distinto de cero el determinante* $\partial(f, g, h)/\partial(z, p, q)$, *estando* g *y* h *en involución, entonces resulta una integral completa de* [111-1] *por resolución de*

[111-99] $$f = 0 \quad , \quad g = \alpha \quad . \quad h = \beta$$

respecto de z, p, q, es decir, sin integración.

Pues si eliminamos p, q entre las [111-99] resulta

[111-100] $$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \quad ,$$

y como $F = F_x + F_z\,p = F_y + F_z\,q = 0$ equivalen al sistema [111-99], donde $f = 0$ es ya el resultado de eliminar α y β, será [111-100] una integral completa de la ecuación $f = 0$.

EJEMPLOS: 1. Respecto de la ecuación [111-79] se obtienen del sistema característico [111-80] las [111-81], originando sin posterior integración la integral completa [111-82].

2. Respecto de [111-73], las $p = p_0$, $q = q_0$, no permiten despejar z, pero sí en cambio las [111-75], donde puede tomarse $z_0 = 0$, dando la integral completa [111-76].

3. En la *ecuación de* CLAIRAUT *generalizada*:

[111-101] $$z = px + qy + f(p, q) \quad ,$$

que generaliza la ecuación diferencial ordinaria de § 102-3, *c*, el sistema característico da $dp = dq = 0$, y se tienen dos integrales primeras, $p = \alpha$, $q = \beta$. Reemplazando en la ecuación se tiene la integral completa:

$$[111\text{-}102] \qquad z = \alpha x + \beta y + f(\alpha, \beta) \quad ,$$

que representa una familia de planos; cfr. § 102-3, *c*, y § 111-2, ejemplo 1. La integral general consta entonces de superficies desarrollables.

4. La ecuación [111-17] $z^2(p^2 + q^2 + 1) = 1$, tiene como integral completa (§ 111-2, ej. 3), la familia de esferas [111-16]: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = 1$. Para hallar esta integral completa, obsérvese que del sistema característico de [111-17]:

$$[111\text{-}103] \quad \frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{(1/z^2) - 1} = \frac{z\,dp}{-p/z^2} = \frac{z\,dq}{-q/z^2}$$

resulta $dx + p\,dz + z\,dp = d(x + pz) = 0$, $d(y + qz) = 0$, de donde $p = (\alpha - x)/z$, $q = (\beta - y)/z$, que reemplazadas en [111-17] dan [111-16].

La integral general está formada por las superficies "tubulares" envolventes de las esferas [111-16] al rodar sobre el plano $z = -1$ sobre un camino arbitrario.

Aparte de las esferas "quietas" pueden hallarse otras soluciones completas, formadas por familias de dos parámetros de esas superficies tubulares (ver § 111-3, nota 4). Por ejemplo, de los dos últimos miembros de [111-103] resulta $dp/p = dq/q \therefore q = \alpha p$, y por la ecuación dada [111-17]: $p = \sqrt{1 - z^2}/[z\sqrt{1 + \alpha^2}]$. Con esto resulta de los tres primeros miembros de [111-103]

$$\frac{\sqrt{1 + \alpha^2}\,z}{\sqrt{1 - z^2}}\,dz = dx + \alpha\,dy \quad ,$$

y se obtiene la integral completa

$$-\sqrt{1 + \alpha^2}\sqrt{1 - z^2} = x + \alpha y + \beta, \quad \text{o sea:} \quad z^2 + \frac{(x + \alpha y + \beta)^2}{1 + \alpha^2} = 1,$$

que representa cilindros de revolución de radio 1 y ejes en las rectas $x + \alpha y + \beta = 0$ del plano xy.

De esta nueva integral completa resulta también la misma integral general (§ 111-3, nota 4) formada por *todas* las superficies tubulares mencionadas. También las esferas "quietas" resultan envolventes de haces de estos cilindros.

b) En una ecuación de la forma $f(x, p) = g(y, q)$ (cfr. ejercicio 12), las variables se pueden separar ensayando una solución de la forma

$$[111\text{-}104] \qquad z = z(x, y) = a(x) + b(y)$$

que da $f[x, a'(x)] = g[y, b'(y)] = \text{const.} = \lambda$ por depender el primer miembro exclusivamente de x y el segundo sólo de y. Despejando de aquí $a'(x)$ y $b'(y)$ se tiene con dos cuadraturas y reemplazo en [111-104] una integral completa de la forma

$$[111\text{-}105] \qquad z = a(x, \lambda) + b(y, \lambda) + \beta.$$

EJEMPLOS: 5. $(\text{grad}\, z)^2 = 1$, o sea: $p^2 + q^2 = 1$.

De [111-104] resulta $[a'(x)]^2 = 1 - [b'(y)]^2$, e igualando a una constante $\lambda = \alpha^2$ se obtiene la integral completa

[111-106] $$z = \alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}\,y + \beta.$$

La ecuación dada, ya tratada en § 111-6, ejemplo 1, rige la propagación de la luz en un medio (plano) homogéneo e isótropo, siendo $z =$ constante las superficies de onda (Wellenfronten) y las características los rayos luminosos. Una superficie integral S se obtiene poniendo $\beta = \varphi(\alpha)$ y formando la envolvente del haz que resulta de [111-106], es decir, eliminando α entre

$$z = \alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}\,y + \varphi(\alpha) \quad ; \quad 0 = x - (\alpha/\sqrt{1-\alpha^2})y + \varphi'(\alpha).$$

Si para $\alpha = a$ es $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi'(\alpha) = c$, la correspondiente característica de S es la *recta*

$$z = ax + \sqrt{1-a^2}\,y + b \quad , \quad 0 = x - (a/\sqrt{1-a^2})y + c.$$

En la correspondiente franja característica, el elemento plano tiene orientación constante de parámetros directores $p = a$, $q = \sqrt{1-a^2}$, -1, y entonces forma, cualquiera sea a $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$, un ángulo de 45° con el plano x, y, como ya sabíamos (§ 111-6, ejemplo 1).

6. La ecuación $p^2 + q^2 = [k/\sqrt{x^2+y^2}] - h$, que aparece en el problema de los dos cuerpos de la Mecánica celeste, se lleva a la forma $f(r, z_r) = g(\theta, z_\theta)$ en coordenadas polares:

$$z_r^2 + (z_\theta^2/r^2) = (k/r) - h \quad , \quad \text{ó:} \quad r^2 z_r^2 - kr + hr^2 = -z_\theta^2 \quad ,$$

y se tiene la solución completa

$$z = \int_\rho^r \sqrt{(k/t) - h - (\alpha^2/t^2)}\,dt + \alpha\theta + \beta.$$

9. **Caso de la ecuación lineal.** — En la ecuación lineal de primer orden

[111-107] $$Pp + Qq = R \quad ,$$

el cono de Monge en cada punto A se reduce a la única recta r de números directores (P, Q, R), es decir, los elementos planos de sostén A son los del haz de los planos que contienen esa recta r. En efecto, la normal a un elemento plano tiene parámetros directores p, q, -1, y es por [111-107] perpendicular a r.

En consecuencia toda franja que tenga por sostén una curva característica es una franja característica (cfr. § 111-4, nota 4), y entonces se comprende intuitivamente porqué toda superficie formada por curvas características es una superficie integral, y recíprocamente (§ 110-4, *a* y *b*).

Los tres primeros miembros de [111-40] se escriben por [111-107] así: $dx/P = dy/Q = dz/R$, y como no contienen ni p ni q, forman un sistema de dos ecuaciones con dos funciones incógnitas $y = y(x)$, $z = z(x)$ para las *curvas* características (cfr. § 110-4).

EJERCICIOS

1. En la ecuación [111-12], con solución completa [111-11], hallar la superficie integral envolvente de las integrales que pasan por $(0,0,1)$.

2. Superficie integral de $z = px + qy + pq$ (cfr. § 111-2, ej. 1) que pasa por la parábola $x = \tau$, $y = \tau$, $z = \tau^2$.

3. *a*) Hallar la ecuación diferencial de la familia de paraboloides $z = \alpha x^2 + \beta y^2$ (cfr. § 110, ejercicio 9); *b*) Verificar que $z = 0$, resultado de eliminar α y β en [111-28] es solución, pertenece a la familia dada, y no es envolvente de ella.

4. En la ecuación $z = px + qy + pq$, que tiene la solución completa [111-11] $z = \alpha x + \beta y + \alpha\beta$ (§ 111-2, ej. 1, ó § 111-8, ej. 3) : *a*) Hallar soluciones poniendo $\beta = \alpha$ y $\beta = 2\alpha$; *b*) Hallar la superficie integral envolvente de las integrales [111-11] que pasan por el punto $\mathrm{P}(0,0,4)$.

5. Probar que toda solución del sistema característico [111-40]: *a*) Es una franja; *b*) Sobre ella es $\mathrm{f}(x,y,z,p,q) = k =$ constante. (Entonces una solución es franja característica si y sólo si $k = 0$).

6. Verificar que es completamente integrable la ecuación en diferenciales totales $\mathrm{d}z = (z/x)\mathrm{d}x + [(z - x)/y]\mathrm{d}y$, y hallar su solución general.

7. Resolver por el método de LAGRANGE y CHARPIT: $pq - z = 0$.

8. Hallar una solución completa de $2pq + xyp + yq - yz = 0$.

9. Hallar por el método de LAGRANGE y CHARPIT una integral completa de $p^2 + qy - z = 0$, utilizando en el sistema subsidiario [111-40]: *a*) Último miembro; *b*) 1º y 4º miembros; *c*) 2º y 4º miembros.

10. *a*) Probar que una ecuación de la forma $\mathrm{f}(p,q) = 0$ tiene la solución completa $z = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \beta$, siendo $\mathrm{f}(\alpha_1, \alpha_2) = 0$; *b*) Aplicar a $pq + p + q = 0$ (§ 111-7, ejemplo 1).

11. Probar: *a*) Que una ecuación de la forma $\mathrm{f}(z,p,q) = 0$ tiene soluciones completas de la forma $\mathrm{F}(x + \alpha y, z, \beta) = 0$; *b*) Que poniendo $x + \alpha y = u$ se obtiene la solución completa resolviendo una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

12. Probar que la integración de una ecuación "*con variables separadas*" (cfr. § 111-8, *b*) $\mathrm{f}(x,p) = \mathrm{g}(y,q)$, conduce por el método de LAGRANGE-CHARPIT a una ecuación en diferenciales totales "*con variables separadas*" $\mathrm{d}z = \mathrm{h}(x,\alpha)\mathrm{d}x + \mathrm{k}(y,\alpha)\mathrm{d}y$, y entonces se tiene la integral completa

$$z = \int \mathrm{h}(x,\alpha)\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{k}(y,\alpha)\,\mathrm{d}y + \beta.$$

13. Aplicando el ejercicio anterior, hallar una solución completa de: *a*) $pq = xy$; *b*) $(1 - x^2)yp^2 = x^2q$.

14. En la ecuación $z = px + qy + p^2 - q^2$ hallar: *a*) Una integral completa; *b*) Una integral singular; *c*) Una superficie integral cilíndrica.

§ 112. Ecuaciones de segundo orden

1. **Definiciones, notaciones y ejemplos.** — Si llamamos $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$ a las derivadas segundas de $z = \mathrm{z}(x, y)$, la ecuación en derivadas parciales de segundo orden con dos variables independientes x, y, es del tipo

[112-1] $$\mathrm{f}(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Estas ecuaciones son de la mayor importancia en las aplicaciones: vibraciones de cuerdas, membranas, o campos electromagnéticos; problemas sobre el potencial eléctrico, magnético o gravitatorio; conducción del calor, difusión; movimientos de líquidos o gases, etc. Muchos de estos problemas son de gran dificultad. En esta obra sólo podemos dar un bosquejo de la teoría elemental y tratar algunas aplicaciones características.

Notas: 1. En las ecuaciones de primer orden bastaba dar *una curva* para determinar la superficie integral por la determinación de *una función arbitraria* (ver §§ 110-4, *d*; 110-4, ej. 4; y 111-6). En las de segundo orden hay que dar *una curva y los planos tangentes* a lo largo de ella a la superficie buscada, se decir, hay que dar una de las derivadas p, q, a lo largo de la curva directriz, fijando así una franja directriz. De ahí la importancia de obtener soluciones en que aparecen *dos funciones arbitrarias*, que se determinan por esas condiciones iniciales (ver. ej. 2 y § 112-7, *a*). A veces, mediante un conjunto de soluciones particulares puede expresarse la solución en serie que cumpla las condiciones iniciales dadas y cuyos coeficientes se determinan por el problema (ver § 112-7, nota 2).

2. La eliminación de *una* función arbitraria conduce a una ecuación en derivadas parciales de primer orden (§ 110-3), pero en general una relación con más de una función arbitraria da por derivación un *sistema* de varias ecuaciones eliminantes en derivadas parciales. Por ejemplo, $z = \mathrm{G}[x, y, \varphi(x), \Psi(y)]$, (G función dada, φ y Ψ arbitrarias), conjuntamente con las derivadas hasta las segundas, son *seis* relaciones, insuficientes para eliminar las *seis* funciones φ, φ', φ'', Ψ, Ψ', Ψ''. Si agregamos las cuatro derivadas terceras tendremos *diez* relaciones para eliminar *ocho* funciones $\varphi, \ldots, \Psi'''$, lo que da un *sistema eliminante* de dos ecuaciones.

3. Supuestas sucesivamente derivables las funciones f y z que figuran en la ecuación [112-1], ésta puede reducirse siempre a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, *lineal* en las derivadas, teniendo en cuenta las condiciones de conmutabilidad (§ 69-2) de la derivación. Así la resolución de [112-1] es equivalente a la del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{f}_x + \mathrm{f}_z p + \mathrm{f}_p r + \mathrm{f}_q s + \mathrm{f}_r \dfrac{\partial r}{\partial x} + \mathrm{f}_s \dfrac{\partial s}{\partial x} + \mathrm{f}_t \dfrac{\partial t}{\partial x} = 0, \\ \mathrm{f}_y + \mathrm{f}_z q + \mathrm{f}_p s + \mathrm{f}_q t + \mathrm{f}_r \dfrac{\partial r}{\partial y} + \mathrm{f}_s \dfrac{\partial s}{\partial y} + \mathrm{f}_t \dfrac{\partial t}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{\partial s}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial s}{\partial y} = \dfrac{\partial t}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial p}{\partial x} = r, \quad \dfrac{\partial p}{\partial y} = s, \quad \dfrac{\partial q}{\partial x} = s, \quad \dfrac{\partial q}{\partial y} = t, \end{array}\right.$$

de diez ecuaciones lineales en las derivadas con seis funciones incógnitas z, p, q, r, s, t.

En general y por análogo procedimiento, *todo sistema de número finito de ecuaciones en derivadas parciales de cualquier orden puede reducirse a un sistema que sólo dependa linealmente de derivadas de primer orden.*

De ahí la importancia, al menos teórica, que tiene el estudio de los sistemas lineales (véase nota III).

EJEMPLOS: 1. $s = z_{xy} = 0$. Integrando respecto de y e introduciendo como constante de integración (constante *para cada* x) una función arbitraria de x (cfr. § 110-1, ej. 1), resulta, como es inmediato verificar, la integral primera:

$$p = z_x = \omega(x) \quad ,$$

ecuación de primer orden, de integración inmediata con otra cuadratura

$$z = \int_a^x \omega(\xi)\,d\xi + \Psi(y) = \varphi(x) + \Psi(y).$$

2. $s = z_{xy} = f(x, y)$. Procediendo como en el ejemplo 1 resulta

$$[112\text{-}2] \qquad z = \int_a^x d\xi \int_b^y f(\xi, \eta)\,d\eta + \varphi(x) + \Psi(y) \quad ,$$

siendo φ y Ψ funciones arbitrarias.

La integral doble puede extenderse más generalmente a un dominio D como el de la figura 376, siendo C una curva de ecuación $y = g(x)$, pues de

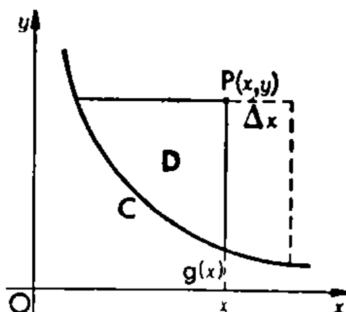


Fig. 376.

$$[112\text{-}3] \qquad z = \int\int_D f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta + \varphi(x) + \Psi(y)$$

resulta por derivación sucesiva:

$$[112\text{-}4] \qquad p = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} d\xi \int_{g(\xi)}^y f(\xi, \eta)\,d\eta + \varphi'(x) = \int_{g(x)}^y f(x, \eta)\,d\eta + \varphi'(x) \quad ,$$

$$s = f(x, y).$$

Para $\varphi(x) = \Psi(y) = 0$ se obtiene la solución nula sobre la curva C conjuntamente con las dos derivadas primeras (cfr. nota 1), como resulta de [112-3], [112-4] y la expresión análoga para q.

3. $r - t = z_{xx} - z_{yy} = 0$. Con el cambio de variables (cfr. § 110-1, ej. 2): $x + y = \xi$, $x - y = \eta$; $z(x, y) = z[\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2}(\xi - \eta)] = u(\xi, \eta)$ la ecuación dada se transforma en

$$4u_{\xi\eta} = 0 \quad ,$$

y por el ejemplo 1 resulta $u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \Psi(\eta)$, o sea

$$[112\text{-}5] \qquad z = \varphi(x + y) + \Psi(x - y).$$

4. *Ecuación de* D'ALEMBERT: $r - (t/c^2) = 0$. — Análogamente al ejemplo anterior se obtiene la solución con dos funciones arbitrarias (cfr. ejercicios 2, *a*, y 6):

$$[112\text{-}6] \qquad z = \varphi(x + cy) + \Psi(x - cy).$$

5. Para $c = i = \sqrt{-1}$ en el ejemplo anterior, resulta la *ecuación de* LAPLACE en dos variables o de D'ALEMBERT $\Delta z = r + t = 0$ (§ 91-6, *d*). Por [112-6] se tienen en particular soluciones de la forma

[112-7] $$(x \pm iy)^a = P_a(x, y) \pm iQ_a(x, y) \quad ,$$

donde P_a y Q_a son funciones reales que para a entero positivo se reducen a polinomios, y satisfacen también a la ecuación de LAPLACE (cfr. § 114-3). En § 112-2, ej. 1, obtendremos a partir de P_a y Q_a una solución con dos funciones arbitrarias.

6. Para cada y es $z_{xx} - 2yz_x + 5y^2 z = 0$ una ecuación lineal de coeficientes constantes. Como la ecuación característica (§ 108-1) tiene las raíces $y \pm 2iy$, resulta

$$z = e^{yx}[\varphi(y) \cos 2yx + \psi(y) \operatorname{sen} 2yx] \quad ,$$

siendo $\varphi(y)$, $\psi(y)$ dos funciones arbitrarias (constantes para cada y, o sea funciones de y solamente).

2. **La ecuación completamente lineal. Principio de superposición.** — Llamaremos *completamente lineal* (cfr. § 110-4, nota 2), a toda ecuación lineal en z y sus derivadas. La de segundo orden es de la forma

[112-8] $$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = F \quad ,$$

donde R, ..., Z y F son funciones de x é y solamente *.

De la linealidad resultan como en el caso de ecuaciones ordinarias (§§ 107-3 y 107-1) las propiedades *a*) y *b*) que siguen:

a) Si u es una solución de [112-8], para cada solución de $z_0(x, y)$ de la ecuación homogénea

[112-9] $$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = 0$$

es $z = z_0 + u$ solución de [112-8] (cfr. § 112-1, ej. 2 y 3).

b) Si $z_1(x, y)$, ..., $z_n(x, y)$ son soluciones de la ecuación homogénea [112-9], lo es toda combinación lineal de ellas con coeficientes constantes:

[112-10] $$z = C_1 z_1(x, y) + \ldots + C_n z_n(x, y).$$

c) En las ecuaciones lineales ordinarias bastaba un número finito determinado de soluciones para expresar *todas* en la

---

* Toda ecuación *lineal de primer orden* (es decir, lineal en las derivadas, como [110-3]) puede transformarse en otra completamente lineal en una nueva función incógnita de *todas* las variables anteriores: $t = t(x, y, z)$, como vimos en § 110-4, *b*. La nomenclatura no es uniforme: por ejemplo, en COURANT-HILBERT (citado en Cap. XVI, nota IV, 4) se llaman lineales y casi-lineales (quasilinearen) a las ecuaciones que nosotros llamamos completamente lineales y lineales respectivamente. En la teoría superior interesa la forma de los términos en las derivadas de orden mayor, llamándose entonces lineal [completamente lineal] de segundo orden, a la ecuación

$$Rr + Ss + Tt + G(x, y, z, p, q) = 0 \quad ,$$

siendo R, S, T, funciones de x, y, z [x, y].

forma [112-10]. Esto no ocurre en las ecuaciones en derivadas parciales, y por eso hay que destacar las siguientes propiedades:

c_1) Si $z_k(x, y)$ son soluciones de [112-9], lo es toda *serie*

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n + \ldots$$

en un dominio D si convergen *uniformemente en* D tanto la serie como las series de las derivadas que figuran en la ecuación (ver. ej. 2 de § 112-3).

c_2) Si $z(x, y, \alpha)$ es una solución de [112-9] con un parámetro α que no figure en los coeficientes de [112-9], es también solución $\partial z/\partial\alpha$, como puede verse derivando la ecuación. De igual modo, si ningún coeficiente de [112-9] depende de x, junto con z es solución $\partial z/\partial x$.

c_3) Conjuntamente con $z(x, y, \alpha)$ es solución de [112-9] toda función

[112-11] $$H(x, y) = \int_a^b \varphi(\alpha) z(x, y, \alpha) d\alpha \quad ,$$

obtenida integrando respecto del parámetro después de multiplicar por una función arbitraria del mismo. Esta propiedad análoga a c_1), se demuestra derivando en [112-11] bajo el signo integral (§ 86-2) y reemplazando en [112-9].

Análogamente, si $z(x, y, \alpha, \beta)$ es solución de [112-9], lo es

$$H(x, y) = \int\int_D \varphi(\alpha, \beta) z(x, y, \alpha, \beta) d\alpha\, d\beta \quad ,$$

siendo D un dominio cualquiera y $\varphi(\alpha, \beta)$ arbitraria.

EJEMPLOS: 1. Poniendo $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, las funciones $P_a(x, y)$, $Q_a(x, y)$ de § 112-1, ej. 5, soluciones de $\Delta z = 0$, se escriben, en virtud de la fórmula de MOIVRE [10-1] aplicada a [112-7]:

[112-12] $$P_a(x, y) = r^a \cos a\theta \quad , \quad Q_a(x, y) = r^a\,\mathrm{sen}\, a\theta \quad ,$$

y entonces es solución de la ecuación de LAPLACE toda función de la forma

[112-13] $$\int_{a_1}^{a_2} r^a[\varphi(a)\cos a\theta + \psi(a)\,\mathrm{sen}\, a\theta]da.$$

2. Con [112-12] para $a = n = 0, 1, 2, \ldots$, puede formarse una serie solución de $\Delta z = 0$ con valores prefijados $f(\theta)$ en el contorno $|z| = r = 1$ del círculo unidad (problema de DIRICHLET, Cap. XXIII, nota II, b_2, para el círculo):

[112-14] $$z(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n\,\mathrm{sen}\, n\theta)\, r^n,$$

siendo a_n, b_n los coeficientes de FOURIER de $f(\theta)$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega)\cos n\omega\, d\omega \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega)\,\mathrm{sen}\, n\omega\, d\omega.$$

En efecto, [112-14] converge uniformemente en $|z| \leqslant \varrho$ para cada $\varrho < 1$, y para $|z| < 1$ se intercambian $\int$ y Σ dando

[112-15] $$z(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega)\{\tfrac{1}{2} + \Sigma r^n \cos n(\theta - \omega)\}d\omega \quad ,$$

que tiende a $f(\theta)$ para $r \to 1^-$ (§ 43-4, *b*), suponiendo convergente la s. F. de $f(\theta)$ (§ 98-3).

El factor de $f(\omega)$ en la integral se transforma así, llamando Ru a la parte real del complejo u, y $h = \theta - \omega$:

$$\tfrac{1}{2} + R\Sigma r^n e^{inh} = \tfrac{1}{2} + R\,\frac{re^{ih}}{1 - re^{ih}} = \tfrac{1}{2}R\,\frac{1 + re^{ih}}{1 - re^{ih}} = \tfrac{1}{2}\,\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos h + r^2} \, ,$$

dando [112-14] la *integral* de POISSON (cfr. § 98, ejercicios 3 y 4 y Cap. XXIX, nota VI, c_3):

[112-16] $$z(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega)\,\frac{(1 - r^2)\,d\omega}{1 - 2r\cos(\theta - \omega) + r^2} \, .$$

3. **Ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes. —** Es de la forma

[112-17] $$ar + bs + ct + \alpha p + \beta q + \gamma z = 0 \quad ,$$

siendo a, b, c, α, β, γ, constantes. Éste es, conjuntamente con la correspondiente ecuación no homogénea (§ 112-5), el tipo de ecuación lineal que se presenta en las aplicaciones más frecuentes. Veamos algunos métodos para obtener soluciones con funciones arbitrarias, o con constantes arbitrarias. Todos ellos son aplicables por igual a ecuaciones de orden superior al segundo (ver ejercicio 5).

a) *Método simbólico.* — La linealidad (§ 32-1) de los operadores D_x, D_y definidos por

[112-18] $$D_x z = z_x \quad , \quad D_y z = z_y \quad ,$$

hace aplicable a [112-17] el método visto en § 108-8 para las ecuaciones ordinarias lineales de coeficientes constantes.

La ecuación [112-17] puede escribirse

[112-19] $$P(D_x, D_y)z = 0 \quad ,$$

siendo $P(D_x, D_y)$ el polinomio simbólico

[112-20] $$P(D_x, D_y) = aD_x^2 + bD_x D_y + cD_y^2 + \\ + \alpha D_x + \beta D_y + \gamma .$$

a_1) *Ecuaciones reducibles.* — Si el polinomio $P(D_x, D_y)$ se descompone (en el campo real o complejo) en el producto de dos factores de primer grado $a(D_x + hD_y + k)\,(D_x + lD_y + m)$, escrita [112-17] en la forma

[112-21] $$[(D_x + hD_y + k)\,(D_x + lD_y + m)]z = 0 \quad ,$$

se ve que la satisface toda solución de la ecuación *lineal de primer orden*:

[112-22] $$(D_x + lD_y + m)z = 0, \quad \text{o sea} \quad p + lq = -mz .$$

El sistema característico (§ 110-4)

$$dx/1 = dy/l = dz/(-mz) \quad ,$$

tiene por solución la congruencia $y - lx = \alpha$, $ze^{mx} = \beta$, y entonces (§ 110-4, c), la solución general de [112-22] es

$$z = e^{-mx}\varphi(y - lx) \quad \text{con } \varphi \text{ función arbitraria.}$$

Como también verifican [112-17] las soluciones de $(D_x + hD_y + k)z = 0$, tendremos por § 112-2, b, la solución con dos funciones arbitrarias:

$$[112\text{-}23] \qquad z = e^{-mx}\varphi(y - lx) + e^{-kx}\psi(y - hx).$$

EJEMPLO 1.

$$z_{xx} + z_{xy} - 2z_{yy} - 2z_x + 5z_y - 3z = 0.$$

El polinomio simbólico $P(D_x, D_y)$ se descompone en

$$(D_x - D_y + 1)(D_x + 2D_y - 3) \quad ,$$

y entonces la solución es

$$z = e^{-x}\varphi(y + x) + e^{3x}\psi(y - 2x).$$

a_2) En general no es posible factorear (§ 17-5), aún en el campo complejo, el polinomio en dos variables $P(D_x, D_y)$. En tal caso, ensayando (cfr. § 108-1) una solución de forma exponencial

$$[112\text{-}24] \qquad z = e^{hx+ky} \quad ,$$

resulta $P(D_x, D_y)z = e^{hx+ky}P(h, k)$, y por tanto *será* [112-24] *solución para todo par* (h, k) *que verifique* $P(h, k) = 0$.

Para cada h es $P(h, k) = 0$ una ecuación en k; llamando $k(h)$ a una raíz, tendremos por el principio de superposición de § 112-2, c_3, la solución con una función arbitraria:

$$[112\text{-}25] \qquad z = \int_{h_1}^{h_2} \varphi(h)\, e^{hx+k(h)y}\, dh.$$

En ocasiones interesa una solución en forma de serie (§ 112-3, c_1) de exponenciales, con coeficientes arbitrarios C_n, tomando (por ejemplo) los $h = h_n$ enteros y tales que $k(h_n) = k_n$ sea entero:

$$[112\text{-}26] \qquad z = \Sigma\, C_n\, e^{h_n x + k_n y}.$$

EJEMPLO 2. $r = q$, o sea: $z_{xx} = z_y$.

La ecuación $P(h, k) = 0$ es $h^2 - k = 0$. Tomando valores enteros de h se forma la serie

$$[112\text{-}27] \qquad z = \Sigma C_n e^{nx+n^2y} = C_1 e^{x+y} + C_2 e^{2x+4y} + \ldots$$

Eligiendo en cambio $h = ni$ (n entero) y tomando la parte real se tiene la solución

$$[112\text{-}28] \qquad z = C_1 e^{-y}\cos x + C_2 e^{-4y}\cos 2x + \ldots$$

b) *Separación de variables.* — Cuando la ecuación puede llevarse a la forma

[112-29] $$P(D_x)z = Q(D_y)z \quad ,$$

lo que ocurre con frecuencia en las aplicaciones, pueden hallarse soluciones de la forma (cfr. § 111-8, *b*):

[112-30] $$z = z(x, y) = X(x) \, . \, Y(y).$$

En efecto, el reemplazo en [112-29] conduce a las ecuaciones

$$\frac{1}{X} P(D_x)X = \frac{1}{Y} Q(D_y)Y = \lambda \quad , \quad (\lambda = \text{constante})$$

por depender el primer miembro sólo de x, y el segundo sólo de y. Se tienen así dos ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de coeficientes constantes para determinar $X(x)$ é $Y(y)$.

Ejemplo 3. En la ecuación del ejemplo 2 se tiene:

$$X''(x)/X(x) = Y'(y)/Y(y) = \lambda.$$

Para $\lambda = h^2$ resulta (cfr. [112-27]):

$$X = C_1 e^{hx} + C_2 e^{-hx} \quad , \quad Y = C_3 e^{-h^2 y}.$$

Para $\lambda = -h^2$ se obtiene (cfr. [112-28]):

$$X = A \cos hx + B \operatorname{sen} hx \quad , \quad Y = Ce^{-h^2 y}$$

y la correspondiente solución, de la forma

[112-31] $$z = ae^{-h^2 y} \operatorname{sen} h(x - \alpha) \quad ,$$

así como las formadas a partir de ella en forma de series (§ 112-2, c_1) o integrales (§ 112-2, c_3), juegan un papel importante en el problema de estudiar la distribución lineal de la temperatura z en función de la abscisa x y del tiempo y (cfr. § 112-6, *d*).

Nota. El método de separación de variables puede aplicarse a [112-29] aunque $P(D_x)$, $Q(D_y)$ no sean polinomios de coeficientes constantes (ver nota IV).

4. **Ecuaciones del tipo de Euler.** — Si en la ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes [112-17] figuran sólo los términos en las derivadas segundas, se tiene la *ecuación de* Euler:

[112-32] $$ar + bs + ct = 0.$$

Esta ecuación es siempre reducible (§ **112-3**, a_1), pues si ϱ_1 y ϱ_2 son las raíces de

[112-33] $$a\varrho^2 + b\varrho + c = 0 \quad ,$$

resulta *

[112-34] $$P(D_x, D_y) = a(D_x - \varrho_1 D_y)(D_x - \varrho_2 D_y).$$

---

* Formalmente, si $D_x/D_y = \rho$, es

$$P(D_x, D_y) = D_y^2(a\rho^2 + b\rho + c) = a D_y^2(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) = a(D_x - \rho_1 D_y)(D_x - \rho_2 D_y).$$

a) Si $b^2 - 4ac > 0$, son ϱ_1 y ϱ_2 reales y $\varrho_1 \neq \varrho_2$. La solución es (§ 112-3, a_1):

[112-35] $$z = \varphi(y + \varrho_1 x) + \Psi(y + \varrho_2 x).$$

EJEMPLO 1. $r - 5s + 6t = 0$. Las raíces de [112-33] son 2 y 3, luego

$$z = \varphi(y + 2x) + \Psi(y + 3x).$$

b) Si $b^2 - 4ac = 0$ es $\varrho_1 = \varrho_2$ real y se tiene la ecuación $(D_x - \varrho_1 D_y)^2 z = 0$ que tiene no sólo la solución $\varphi(y + \varrho_1 x)$, sino también la solución $z = x\Psi(y + \varrho_1 x)$, pues $(D_x - \varrho_1 D_y)z = \Psi(y + \varrho_1 x)$, y entonces $(D_x - \varrho_1 D_y)^2 z = 0$. Se tiene entonces por § 112-2, *b*, la solución con dos funciones arbitrarias:

[112-36] $$z = \varphi(y + \varrho_1 x) + x\Psi(y + \varrho_1 x).$$

EJEMPLO 2. $r - 4s + 4t = 0$. La ecuación [112-33] tiene la raíz doble 2, luego $z = \varphi(x + 2y) + x\Psi(x + 2y)$.

c) Si $b^2 - 4ac < 0$ son ϱ_1 y ϱ_2 imaginarias conjugadas: $\varrho_1 = \mu + i\nu$, $\varrho_2 = \mu - i\nu$. La solución [112-35] se escribe

[112-37] $$z = \varphi(y + \mu x + i\nu x) + \Psi(y + \mu x - i\nu x) \quad ,$$

siendo soluciones reales las partes real e imaginaria de esta expresión.

EJEMPLO 3. $r - 4s + 5t = 0$. Las raíces de [112-33] son $2 \pm i$. Entonces

$$z = \varphi(y + 2x + ix) + \Psi(y + 2x - ix).$$

Para $\varphi(t) = \Psi(t) = t^2$ se tiene la solución real $z = 2y^2 + 8xy + 6x^2$. Para $\varphi(t) = t^3$ y $\Psi(t) = 0$, las partes real e imaginaria dan las soluciones:

$$z = (y + 2x)^3 - 3(y + 2x)x^2 \quad ; \quad z = 3(y + 2x)^2 x - x^3.$$

NOTA. En los casos *a* y *c* de raíces distintas, las soluciones pueden obtenerse también por el cambio de variables $y + \varrho_1 x = \xi$, $y + \varrho_2 x = \eta$, $z(x, y) = u(\xi, \eta)$, que conduce (cfr. § 112-1, ejemplos 3, 4 y 5) a la ecuación $\partial^2 u/\partial\xi\,\partial\eta = 0$.

En el caso *b*, $\varrho_1 = \varrho_2$, la sustitución $x + \varrho_1 y = \xi$, $y = \eta$, da la ecuación $\partial^2 u/\partial\eta^2 = 0$, también integrable por dos cuadraturas.

Estos cambios de variables permiten resolver en todos los casos la ecuación no homogénea

[112-38] $$ar + bs + ct = f(x, y) \quad ,$$

reduciéndola a una u otra de las ecuaciones, integrables por cuadraturas (cfr. § 112-1, ej. 2):

$$\partial^2 u/\partial\xi\,\partial\eta = F(\xi, \eta) \quad ; \quad \partial^2 u/\partial\eta^2 = G(\xi, \eta).$$

5. Ecuaciones lineales de coeficientes constantes, con segundo miembro. — Para resolver la ecuación

[112-39] $$P(D_x, D_y)z = f(x, y)$$

siendo $P(D_x, D_y)$ el polinomio simbólico definido por [112-20], basta (§ 112-2, *a*) resolver la ecuación homogénea (§ 112-3) y sumar una solución particular de la ecuación completa [112-39]. Para hallar esta última pueden seguirse diversos métodos, de los que nos limitaremos a señalar los siguientes:

a) Si $P(D_x, D_y)$ se descompone en factores lineales como en § 112-3, a_1, la ecuación se escribe

$$(D_x + hD_y + k)[(D_x + lD_y + m)z] = f(x, y)/a.$$

Entonces se halla una solución $u(x, y)$ de la ecuación

$$(D_x + hD_y + k)u = f(x, y)/a \quad ,$$

y luego una solución z de

$$(D_x + lD_y + m)z = u(x, y) \quad ,$$

siendo ambas ecuaciones lineales de primer orden.

b) Para ciertas formas del segundo miembro $f(x, y)$ puede aplicarse el método de coeficientes indeterminados como en ecuaciones ordinarias (§ 108-4).

EJEMPLO 1. $3z_{xx} - z_y + z = (3x^2 + 18)y + x$. Ensayando $z = ax^2y + bxy + cy + dx^2 + ex + f$, se obtiene

$$z = 3x^2y - 3x^2 + x + 12y - 6.$$

c) La resolución *formal* de [112-39], transformada simbólicamente en

$$z = \frac{1}{P(D_x, D_y)} f(x, y) \quad ,$$

conduce al resultado en términos finitos cuando $f(x, y)$ es un polinomio y es posible desarrollar el operador $1/P(D_x, D_y)$ en serie de potencias de D_x y D_y.

NOTA: Llamando $P^{-1}_{(n)}(D_x, D_y)$ al operador inverso al $P(D_x, D_y)$ cuando se aplica a polinomios de grado $\leqslant n$, es $P^{-1}_{(n)}(D_x, D_y)$ *a su vez un polinomio* en D_x y D_y, no únivocamente determinado pues pueden agregarse términos arbitrarios de grados $\geqslant n + 1$.

EJEMPLO 2. $r + 2t + z = x^2y$ conduce a la solución

$$z = (1 + D_x^2 + 2D_y^2)^{-1} x^2y = (1 - D_x^2 - 2D_y^2 + \ldots)x^2y = x^2y - 2y \quad ,$$

que puede verificarse en la ecuación.

6. **Algunas ecuaciones diferenciales de la Física.** — *a*) *Ecuación de la cuerda vibrante.* — Como ejemplo de obtención de una ecuación diferencial parcial en un proceso físico, supongamos que una cuerda tensa extendida sobre el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$ del eje x se aparta de la posición de equilibrio, dándole la forma de una curva *plana* en el plano x, u (fig. 377) y luego se abandona. Se trata de obtener la ecuación diferencial del movimiento de la cuerda suponiendo que la deformación es pequeña tanto en distancia como en dirección (las igualdades aproximadas $\simeq$ que siguen,

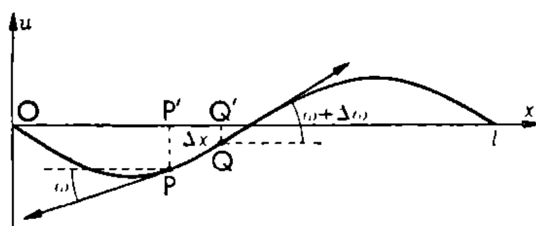


Fig. 377.

sólo indican que llegaremos a una ecuación para la cuerda con deformaciones de máxima elongación y máxima pendiente, infinitésimas).

Cada punto se mueve paralelamente al eje u, y si τ es la tensión de la cuerda y $u(x, t)$ la elongación del punto de abscisa x en el instante t, actúa paralelamente al eje u, sobre el arco PQ la fuerza (fig. 377):

$$\tau[\operatorname{sen}(\omega + \Delta\omega) - \operatorname{sen}\omega] \cong \tau[\operatorname{tg}(\omega + \Delta\omega) - \operatorname{tg}\omega] =$$
$$= \tau[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] \cong \tau \,.\, u_{xx} \,.\, \Delta x.$$

Esta fuerza es igual a la masa $\lambda \,.\, \Delta x$ (λ densidad lineal) por la aceleración u_{tt}, luego, poniendo $c^2 = \tau/\lambda$ resulta la ecuación diferencial de D'ALEMBERT (cfr. § 112-1, ej. 4):

[112-40] $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

b) *Ondas en más dimensiones.* — Análogamente se prueba que las vibraciones de una membrana tensa, y las ondas sonoras, luminosas o de radio, conducen a la ecuación diferencial

[112-41] $$\Delta u = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

siendo $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ ó $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ según se trate del plano o del espacio.

c) *Oscilaciones amortiguadas.* — Si actúa una resistencia proporcional a la velocidad $\partial u/\partial t$, la ecuación [112-40] debe reemplazarse por

[112-42] $$u_{xx} = (u_{tt} + k u_t)/c^2 \quad ,$$

que es como [112-40] y la ecuación del calor (ver *d*), un caso especial de la ecuación de los telegrafistas (ejercicio 9).

d) *Conducción del calor.* — En una varilla homogénea sobre el eje x, térmicamente aislada y con temperatura $u(x, t)$, se produce un desplazamiento de calor. En el trozo entre x y $x + \Delta x$ es $\frac{\partial u}{\partial t}\,\Delta x$ proporcional al incremento de cantidad de calor, que a su vez es proporcional a $u_x(x + \Delta x, t) - u\,(x, t) \cong u_{xx} \,.\, \Delta x$, lo que da una ecuación diferencial de la forma (cfr. § 112-3, ej 2 y 3):

[112-43] $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial u}{\partial t}.$$

7. **Problema de la cuerda vibrante.** — Como ejemplo de aplicación de una de las ecuaciones en derivadas parciales de la Física al estudio del proceso correspondiente, y del uso de las condiciones iniciales y de contorno para determinar por completo la solución, estudiaremos las vibraciones de una cuerda: *a*) Extendida sobre todo el eje x; *b*) De longitud finita y extremos fijos.

a) *Cuerda infinita.* — La ecuación [112-40] de la cuerda vibrante tiene la solución (§ 112-1, ejemplo 4)

[112-44] $$u = \varphi(x - ct) + \Psi(x + ct)$$

con dos funciones arbitrarias que pueden determinarse cuando se conocen (condiciones iniciales) la posición y la velocidad de cada punto en el instante $t = 0$, como funciones de su abscisa x (cfr. § 111-1, *c*):

[112-45] $$u(x, 0) = f(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

Resulta entonces

$$\varphi(x) + \Psi(x) = f(x) \quad ; \quad -c\varphi'(x) + c\Psi'(x) = g(x).$$

De la segunda ecuación resulta

$$-\varphi(x) + \Psi(x) = \frac{1}{c}\int_a^x \mathbf{g}(\xi)\,d\xi \quad ,$$

y entonces quedan determinadas las funciones

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{1}{c}\int_a^x g(\xi)\,d\xi \right] \quad ;$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + \frac{1}{c}\int_a^x g(\xi)\,d\xi \right] \quad ,$$

y la solución [112-44] se escribe

[112-46] $$u = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi \right].$$

La solución [112-46] es susceptible de la siguiente *interpretación de* STOKES: 1º) Si se parte del reposo $g(x)\equiv 0$, basta dividir en dos mitades la elongación inicial, y propagar cada una de ellas con velocidades opuestas $\pm c$, dando (fig. 378) la superposición de ambos $\frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)]$ la solución [112-46]. 2º) Si es nula la elongación inicial $f(x)\equiv 0$, siendo $G(x)$ una primitiva de $g(x) = dG/dx$, resultará la elongación $u = \frac{1}{2c}[G(x+ct) - G(x-ct)]$ superposición de dos ondas de la misma forma $\pm G(x)$ simétricas respecto del eje x, y que se propagan también con velocidades opuestas $\pm c$ (fig. 379).

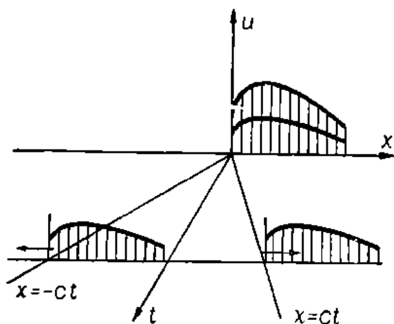


Fig. 378.

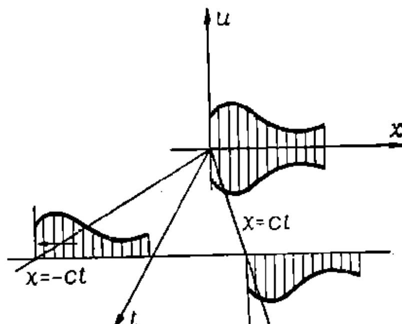


Fig. 379.

El caso general se obtiene por combinación de los dos anteriores.

NOTA 1. La ecuación [112-40] es simétrica en x, t, cambiando c por $1/c$. Por tanto, en lugar de presuponer las condiciones iniciales por la posición y velocidad de cada punto según [112-45] en un instante dado $t = 0$, pueden presuponerse la posición y pendiente en cada instante según

$$u(0,t) = f(t) \quad ; \quad u_x(0,t) = g(t)$$

en un *punto inicial dado* $x = 0$. Esto es lo que hacemos cuando provocamos ondas moviendo verticalmente arriba y abajo el cabo de una cuerda.

b) Cuerda finita, fijada en sus extremos $x = 0$ *y* $x = l$. — Si en la solución general [112-46] suponemos en $x = l$ un punto fijo (llamado *nodo*) tal que $u(l,t)\equiv 0$, será

$$0 \equiv \mathrm{f}(l-ct) + \mathrm{f}(l+ct) + \frac{1}{c}\int_{l-ct}^{l+ct} \mathrm{g}(\xi)\,d\xi \quad ,$$

y derivando respecto de t

$$0 \equiv -cf'(l-ct) + cf'(l+ct) + \mathrm{g}(l+ct) + \mathrm{g}(l-ct).$$

Cambiando t en $-t$ se obtiene

$$0 \equiv cf'(l-ct) - cf'(l+ct) + \mathrm{g}(l+ct) + \mathrm{g}(l-ct)$$

que restada y sumada a la anterior da

$$\mathrm{f}'(l+ct) = \mathrm{f}'(l-ct) \quad , \quad \mathrm{g}(l+ct) = -\mathrm{g}(l-ct).$$

La primera de éstas prueba que por ser $\mathrm{f}(l)=0$, habrá de resultar $\mathrm{f}(l+ct)$ una función impar de t, como también resulta ser $\mathrm{g}(l+ct)$. Es decir, para que $x=l$ sea un nodo, $\mathrm{f}(x)$ ha de ser tal que se cumpla idénticamente en x la condición $\mathrm{f}(l+x)=-\mathrm{f}(l-x)$.

Así, partiendo del reposo, $\mathrm{g}(x)\equiv 0$, la onda inicial $\mathrm{u}(x,0)=\mathrm{f}(x)$, $(x \leqslant l)$, se propaga según la interpretación de STOKES por un cilindro de generatrices paralelas a la recta $x=ct$ dando $\mathrm{f}(x-ct)$ tal que en $x=l$ resulte $\mathrm{f}(l-ct)=-\mathrm{f}(l+ct)$, con elongación nula al superponerse a la onda $-\mathrm{f}(l-x)=\mathrm{u}(x,0)$, $(x \geqslant l)$, que se propaga por un cilindro de generatrices paralelas a la recta $x=-ct$. Todo pasa como si la onda se reflejase en el plano $x=l$ apareciendo el *eco*.

Si $x=0$ es también nodo, $u(0,t)\equiv 0$, se obtiene ahí otra reflexión, Lo mismo ocurre para la onda debida a la velocidad inicial $\mathrm{g}(x)$.

Por tanto, el movimiento de la cuerda vibrante con ambos extremos fijos es periódico y está formado por dos ondas que corren continuamente en sentidos opuestos y se reflejan en ambos nodos; después de efectuar el recorrido $2l$ repiten periódicamente la forma de la elongación resultante.

De ahí que sea adecuado buscar soluciones del tipo sinusoidal

[112-47] $$\mathrm{u}(x,t) = k\cos 2\pi\omega(t-\alpha)\,\mathrm{sen}\, 2\pi\omega\,[(x/c)-\beta] \quad ,$$

que resultan de aplicar a [112-40] el método de separación de variables de § 112-3, *b*, siendo k, ω, α y β constantes arbitrarias.

Las *condiciones de contorno*: $u=0$ para $x=0$ y para $x=l$, dan respectivamente $\beta=0$ y $\mathrm{sen}\, 2\pi\omega l/c=0$, de donde $\omega=nc/(2l)$, n entero, de modo que ω (pulsación de la vibración de cada punto, ver § 28-4) sólo puede tomar una sucesión indefinida de *valores propios*.

Las soluciones sinusoidales del *problema de contorno* que constituyen la ecuación diferencial [112-40] y las condiciones de contorno, son entonces, suponiendo $l=1$:

[112-48] $$z = k\cos n\pi c(t-\alpha) .\,\mathrm{sen}\, n\pi x.$$

Por superposición de ellas puede expresarse en forma de serie una solución que cumpla *además condiciones iniciales* como las de *a*, siendo $\mathrm{f}(0)=\mathrm{g}(0)=\mathrm{f}(1)=\mathrm{g}(1)=0$. (Ver nota 3).

NOTAS: 2. *Significado físico.* — El tono del sonido producido por la cuerda vibrante depende de la pulsación ω, que representa el número de vibraciones por unidad de tiempo. Cuanto menor sea l mayor es ω y más alta la nota; el menor valor posible de n es $n=1$; ningún punto de la cuerda, salvo los extremos, queda fijo, pues para todos es $z\neq 0$, excepto para los valores de t en que anulándose el coseno toda la cuerda pasa momentáneamente por el eje x.

Para $n=2$ no sólo quedan fijos los extremos, sino también el punto medio $x=\frac{1}{2}l$; el número de vibraciones es doble del fundamental y resulta la *octava de la nota fundamental.*

Para $n=3$ quedan fijos dos puntos intermedios: $x=\frac{1}{3}l$, $x=\frac{2}{3}l$; la nota es la quinta de la octava; para $n=4$ resulta la segunda octava,

etc. A los puntos fijos se les llama *nodos*. En estos casos cada trozo de la cuerda vibra independientemente y la nota es más alta por ser menor la longitud.

Para $t=0$ debe resultar una sinusoide si $n=1$ y una sinusoide reducida para $n>1$; pero cuando se pulsa de cualquier otro modo, la expresión [112-48] no puede representar el movimiento. Sumando integrales del tipo [112-48] resulta una integral más general (haciendo $l=1$ para mayor sencillez):

[112-49] $$u = (a_1 . \cos \pi ct + b_1 . \operatorname{sen} \pi ct) \operatorname{sen} \pi x + \\ + (a_2 . \cos 2\pi ct + b_2 . \operatorname{sen} 2\pi ct) \operatorname{sen} 2\pi x + \ldots$$

3. *Condiciones iniciales.* — Si se logra determinar los coeficientes de modo que se verifiquen las condiciones iniciales, es decir, que para $t=0$ la cuerda tenga la forma arbitraria que se le da y la velocidad inicial sea la dada, esta expresión será la integral general (ver § 23-5). Tal es el método de integración de BERNOULLI.

Sean las condiciones iniciales las [112-45], es decir, se da la curva inicial y la velocidad inicial de cada punto: es preciso determinar los coeficientes de [112-49] de modo que sea:

$$a_1 . \operatorname{sen} \pi x + a_2 . \operatorname{sen} 2\pi x + a_3 . \operatorname{sen} 3\pi x + \ldots = \mathrm{f}(x).$$
$$\pi c (b_1 . \operatorname{sen} \pi x + 2b_2 . \operatorname{sen} 2\pi x + 3b_3 . \operatorname{sen} 3\pi x + \ldots) = \mathrm{g}(x).$$

Ahora bien, esto no se logra con un número finito de términos; pero, si adoptamos series indefinidas, entonces cualquiera que sea la función continua $\mathrm{f}(x)$ con la sola condición de que sea de variación acotada (§ 55-9, a_1; § 98-3) existe un desarrollo y sólo uno en serie de FOURIER, y determinados los coeficientes a_n y análogamente los b_n mediante el desarrollo de $\mathrm{g}(x)$, se tiene la integral general en la forma [112-49].

Quizás vea el lector en la forma *impar* de estos desarrollos una restricción imposible de cumplir; pero variando x en (0, 1) y el arco πx en $(0, \pi)$ basta suponer completadas las funciones en (—1, 0) poniendo $\mathrm{f}(-x) = -\mathrm{f}(x)$, $\mathrm{g}(-x) = -\mathrm{g}(x)$.

EJERCICIOS

1. Hallar una solución con dos funciones arbitrarias de: *a*) $r=y$; *b*) $3r+2s=0$.

2. Mostrar que la eliminación de las funciones φ y Ψ conduce en los casos siguientes a una sola ecuación en derivadas parciales (cfr. § 112-1, nota 2), y hallarla:

a) $z = \varphi(x+cy) + \Psi(x-cy)$, (cfr. § 112-1 ej. 4);
b) $z = \varphi(2x+3y) + \Psi(x-y)$;
c) $z = e^x \varphi(y) + e^y \Psi(x)$.

3. Probar que la ecuación en derivadas parciales de las superficies desarrollables (§ 75-2), con excepción de los cilindros con generatrices paralelas al eje z, es $rt - s^2 = 0$ (cfr. § 70-2, *c*).

4. Resolver: *a*) $z_{xy} + 2z_y = 4x^2 - 2$; *b*) $r + s - p = 0$.

5. Resolver la ecuación de tercer orden reducible (§ 112-3, a_1): $z_{xxy} + z_{xyy} - 2z_{xx} - 3z_{xy} + 2z_x = 0$.

6. Obtener la solución [112-6] de la ecuación de D'ALEMBERT $[\mathrm{D}_t^2 - (\mathrm{D}_y^2/c^2)]z = 0$ por descomposición del operador en factores simbólicos lineales (§ 112-3, a_1).

7. Probar que si en la descomposición [112-21] ambos factores simbólicos son iguales: $D_x + hD_y + k$, la solución con *dos* funciones arbitrarias es (cfr. § 112-4, *b*): $z = e^{-kx}[x\varphi(y - hx) + \Psi(y - hx)]$.

8. *a*) Para la ecuación $r = q$, de la solución $z = z(x, y, h) = e^{hx + h^2 y}$ (§ 112-3, a_2) obtener por derivación soluciones en forma de polinomios hasta de tercer grado; *b*) Probar que un polinomio solución de grado n es:

$$\varphi_n(x, y) = x^n + n(n-1)x^{n-2}y + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}x^{n-4}y^2 + \ldots$$

9. En la transmisión eléctrica por cables paralelos, tanto la intensidad en P o en P′ (fig. 380), como la diferencia de potencial entre P y P′, son funciones del tiempo t y de la abscisa $OP = x$, que verifican una misma ecuación diferencial, llamada *ecuación de los telegrafistas*: $z_{xx} = LCz_{tt} + (LG + RC)z_t + RGz$, (L, C, G y R constantes positivas).

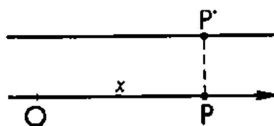


Fig. 380.

Integrarla mediante la sustitución $z = e^{ht + kt}$, y mostrar que: *a*) Para $h < -R/L$, ó $h > -G/C$ (si $LG < RC$ como acontece generalmente) se obtienen soluciones del tipo exponencial real de la forma $e^{kt}(C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx})$; *b*) Para $h = -\alpha + i\omega$ imaginario se obtienen ondas amortiguadas.

10. Resolver las ecuaciones del tipo de EULER: *a*) $r - 3s + 2t = 0$; *b*) $z_{xxx} + z_{xxy} - z_{xyy} - z_{yyy} = 0$; *c*) $r - 2s + 5t = 0$.

11. Probar que en la ecuación de EULER con raíces iguales $\alpha = \beta$ (§ 112-4, *b*) también es solución:

$$z = \varphi(y + \alpha x) + (y + \gamma x)\Psi(y + \alpha x) \quad , \quad \gamma \neq \alpha.$$

12. Probar que si la ecuación en α:

$$c_0\alpha^n + c_1\alpha^{n-1} + \ldots + c_n = 0$$

tiene n raíces distintas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, la ecuación diferencial

$$c_0 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + c_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots + c_n \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = 0$$

tiene la solución

$$z = \varphi_1(y + \alpha_1 x) + \ldots + \varphi_n(y + \alpha_n x), \quad (\varphi_i \text{ funciones arbitrarias}).$$

13. Resolver mediante cambio de variables (§ 112-4, nota):

$$z_{xx} - z_{yy} = xy + y^2.$$

14. Resolver la ecuación (de primer miembro reducible, § 112-5, *a*): $z_{xx} - 3z_{xy} + 2z_{yy} - z_x + 2z_y = (2x + 1) \cdot e^{-y}$.

15. Hallar por coeficientes indeterminados (§ 112-5, *b*), una solución particular de la ecuación $2r - q = 4 \operatorname{sen}(x + 2y)$.

16. Resolver, observando que los coeficientes del primer miembro no dependen de x, $z_{xx} - 3yz_x + 2y^2 z = (2y - 4)e^{2x-y}$.

17. *a*) Probar que $z_{xy} + fz_x + gz_y + fgz = 0$, (*f*, *g*, constantes), puede reducirse a $u_{xy} = 0$ poniendo $z = u \cdot e^{ax + by}$, y hallar la solución general; *b*) Resolver la misma ecuación por el método de operadores de § 112-5, *c*; *c*) Hallar una solución particular de $z_{xx} + 2z_{yy} + z = z^2 y + xye^{2x-y}$ aplicando el método de operadores mediante división, a cada término del segundo miembro.

18. Resolver la ecuación de ondas planas (§ 112-6, *b*) por separación

de variables (§ 112-3, *b*) en coordenadas polares r, θ, $u = \mathrm{u}(r, \theta, t)$, con la condición de contorno $\mathrm{u}(1, \theta, t) = 0$ (membrana circular de borde fijo) **y las condiciones** iniciales: $\mathrm{u}(r, \theta, 0) = \mathrm{f}(r)$ (simetría central), $\mathrm{u}_t(r, \theta, 0) = 0$.

§ 113. CÁLCULO DE VARIACIONES

1. **Problema fundamental.** — *a*) Si nos preguntamos por la curva de longitud mínima entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, tendremos que determinar una función $y = \mathrm{y}(x)$ que haga *mínima* la integral

$$[113\text{-}1] \qquad \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \mathrm{y}'^2(x)}\, dx, \quad \text{con} \quad \mathrm{y}(x_1) = y_1,\ \mathrm{y}(x_2) = y_2.$$

Sabemos que la solución es la recta P_1P_2 (cfr. § 113-4, ej. 1). En cambio la solución no es intuitiva si la curva de longitud mínima (línea geodésica, § 76-5, *d*) ha de pertenecer a una superficie curva; este problema conduce también (§ 113-5, *a*) a determinar una función de modo que resulte mínima una integral en cuyo integrando figura.

Éstos son ejemplos típicos de problemas de Cálculo de variaciones, el cual tiene por principal objeto la determinación de funciones que sustituídas en una integral definida le den valor mínimo o máximo relativo, es decir, menor (mayor) que cualquiera otra función suficientemente próxima.

Este problema difiere de los problemas de máximos y mínimos ordinarios; pues, así como allí se trataba de determinar un valor numérico de x que diera valor máximo o mínimo a una función conocida y, aquí se trata de determinar una función $\mathrm{y}(x)$, que sustituída en una cierta integral definida, del tipo

$$[113\text{-}2] \qquad J[\mathrm{y}(x)] = \int_a^b \mathrm{f}(x, y, y')\, dx$$

le dé un valor máximo o mínimo relativo; otro problema es: Entre todas las curvas que pasan por dos puntos del plano, determinar la que engendra la superficie de área mínima al girar en torno de un eje (ver § 113-4, ej. 2).

En éstos y otros ejemplos el elemento geométrico (longitud, área, etc.), que se desea hacer mínimo, viene expresado por una integral donde figura la función desconocida $\mathrm{y}(x)$ y su derivada $\mathrm{y}'(x)$.

NOTA 1. Supondremos que la función $\mathrm{f}(x, y, z)$ que figura en el integrando de [113-2] es *continua conjuntamente con sus derivadas primeras y segundas* en el dominio (fig. 381):

$$\mathrm{D)}\ a \leqslant x \leqslant b \quad , \quad \mathrm{y}_1(x) \leqslant y \leqslant \mathrm{y}_2(x) \quad , \quad z \text{ arbitraria;}$$

y que en [113-2] se consideran solamente las funciones que cumplen las condiciones siguientes:

1) $y_1(x) \leqslant y(x) \leqslant y_2(x)$, para $a \leqslant x \leqslant b$;

2) existe y es continua $y'(x)$, para $a \leqslant x \leqslant b$;

3) $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

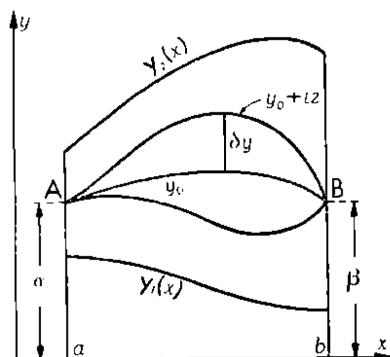


Fig. 381.

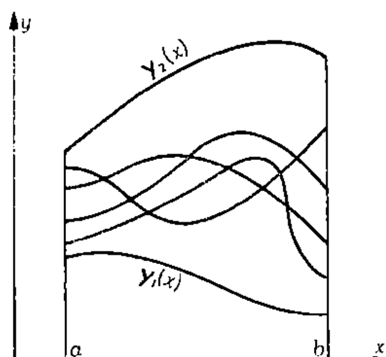


Fig. 382.

Entonces diremos que el problema variacional es *con valores de contorno prefijados* o *con extremos fijos*, por oposición al caso de *extremos libres* en que se elimina la condición 3, y en consecuencia es mayor la multiplicidad de curvas que se consideran al buscar el extremo de [113-2] (fig. 381 y 382).

b) *Si la función* $y(x)$ hace *mínima o máxima una integral en el intervalo* (a, b) *tiene esta misma propiedad en cada intervalo parcial* (a', b'). En efecto, si la función $y(x)$ no hace mínima, por ejemplo, a la integral en el intervalo parcial, y ésta es menor para $y_1(x)$, reemplazando en (a', b') los valores de $y(x)$ por los de $y_1(x)$, resultará una nueva función para la cual la integral en (a, b) toma un valor menor que para la función $y(x)$, contra lo supuesto. Así, por ejemplo, las curvas geodésicas de una superficie, son geodésicas entre dos cualesquiera de sus puntos.

c) En el "problema del cable suspendido" (resuelto en § 106-3, ej. 1), se trata de hallar la forma que toma, por acción de la gravedad, un cable flexible e inextensible, de sección constante, con sus extremos fijos en dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$. Este problema puede plantearse como problema variacional en base al conocido teorema de TORRICELLI de la Mecánica, según el cual el centro de gravedad $G(x_0, y_0)$ debe tomar la posición más baja posible, de modo que deberá hacerse mínima la expresión (§ 84-6):

$$y_0 = \left(\int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx \right) : \left(\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx \right).$$

Ahora bien. el divisor representa la longitud total l del cable, y es independiente de la forma del mismo. Así llegamos a un ejemplo de *problema variacional con condición adjunta* (*Al.* Nebenbedingung)*: determinar $y = \mathrm{y}(x)$ de modo que

[113-3] $$\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = \text{mín.}, \quad \mathrm{y}(x_1) = y_1, \quad \mathrm{y}(x_2) = y_2,$$

entre las funciones que cumplan la condición

[113-4] $$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = l.$$

NOTA 2. El problema [113-3] sin la condición [113-4] es idéntico al de hallar una cierta superficie de revolución de área (§ 54-5) mínima, que resolveremos en § 113-4, ejemplo 2.

d) *Generalizaciones.* — d_1) Puede ocurrir que la función incógnita y dependa de varias variables independientes y figure en una integral múltiple cuyo extremo se busca (ver § **113-5**, *d*).

d_2) Pueden figurar en la integral varias funciones incógnitas (cfr. § **113-5**, *b*):

$$\int_a^b \mathrm{f}(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)\,\mathrm{d}x = \text{extremo}.$$

d_3) Puede que en el integrando figuren derivadas superiores de la función incógnita:

$$\int_a^b \mathrm{f}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\,\mathrm{d}x = \text{extremo}.$$

d_4) Finalmente, pueden presentarse combinaciones de los casos anteriores.

2. La variación primera. — Designaremos por $\mathrm{y}_0(x)$ la función desconocida que para $x = a$, $x = b$, toma los valores prefijados $\mathrm{y}(a) = \alpha$, $\mathrm{y}(b) = \beta$, es decir, representa la curva buscada que pasa por los puntos dados $\mathrm{A}(a, \alpha)$, $\mathrm{B}(b, \beta)$.

Consideremos las funciones del tipo $\mathrm{y}(x) = \mathrm{y}_0(x) + t \,.\, \mathrm{z}(x)$ siendo $z = \mathrm{z}(x)$ una función continua de x conjuntamente con su derivada primera, y que se anula para $x = a$, $x = b$ (cfr. nota 1). Elegida arbitrariamente dicha función $\mathrm{z}(x)$, al dar valores reales a t van resultando infinitas curvas que pasan por A, B (fig. 381). Entre ellas, para $t = 0$, resulta la misma $\mathrm{y}_0(x)$.

---

* Otros autores, por ejemplo GOURSAT (citado en Cap. VI, nota VI, 6), vol. III, p. 573, llaman *problema de extremo ligado* a aquél en que la función incógnita debe verificar condiciones donde figuran todos sus valores en el intervalo de integración y no sólo en sus extremos (*problema de extremo libre*). Estas denominaciones son confusas si no se advierte que *extremo* se refiere aquí a la función y no al intervalo como en nota 1.

Este incremento $t \cdot z(x)$ que se le da a y_0 suele llamarse la *variación* de y_0, representándose así: δy_0. Entiéndase que esta letra δ indica simplemente la diferencia entre la función $y_0(x)$ y cualquier otra que tome los mismos valores en los extremos, es decir, su gráfica está formada por la diferencia de ordenadas entre la curva $y_0(x)$ y cualquier otra que pase por A y B. Así como el incremento Δy es la diferencia de valores de una *misma* función para diversos valores de x, la variación δy es la diferencia de valores de dos funciones para cada valor de x.

El valor que toma la integral [113-2] para cualquiera de dichas infinitas funciones $y = y_0 + tz$ es:

$$J[y_0(x) + tz(x)] = \int_a^b f(x, y_0 + tz, y_0' + tz')\,dx \quad ,$$

que depende de la función z y del número real t, pero una vez elegida $z(x)$, es J función de t: $J = J(t)$.

Elegida arbitrariamente la función $z(x)$ tenemos infinitas curvas al variar t y la integral es función de t; su valor debe ser mínimo para $t = 0$, luego su derivada debe ser nula para $t = 0$; dicha derivada resulta derivando bajo el signo integral (§ 86-2, teor. 3)

$$[113\text{-}5] \quad J'(t) = \int_a^b [f_y(x, y, y')z + f_{y'}(x, y, y')z']\,dx \quad ,$$

de modo que se tiene la condición *necesaria*:

$$[113\text{-}6] \quad J'(0) = \int_b^a [f_y(x, y_0, y'_0)z + f_{y'}(x, y_0, y'_0)z']\,dx = 0 .$$

Se llama (LAGRANGE) *variación primera* de la integral [113-2] a $\delta J = tJ'(0)$. Entonces: *Para que la integral* [113-2] *tenga extremo es necesario que se anule la variación primera.*

NOTAS: 1. En los problemas variacionales con valores de contorno prefijados (§ 113-1, nota 1) debe ser $z(a) = z(b) = 0$. En caso contrario sólo se exige a $z(x)$ la otra condición: tener derivada primera continua en $a \leqslant x \leqslant b$.

2. Con las hipótesis de § 113-1, nota 1, tiene $J(t)$ derivada segunda continua.

3. **Ecuación de Euler.** — *a*) El segundo sumando de [113-6] contiene la diferencial exacta $z' \cdot dx = dz$ e integrándolo por partes resulta:

$$[113\text{-}7] \quad \int_a^b f_{y'} \cdot z' \cdot dx = \Big[z \cdot f_{y'} \Big]_a^b - \int_a^b z \cdot \frac{d}{dx} f_{y'} \cdot dx \quad ,$$

pero z es nula para $x = a$ y para $x = b$, luego se anula el minuendo, y sustituyendo el valor [113-7] en la [113-6] resulta:

$$[113\text{-}8] \quad \int_a^b z\left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} \right) dx = 0 .$$

Esta integral debe, pues, anularse cualquiera que sea la función z y para ello es necesario que se cumpla en todo el intervalo propuesto (a, b) la *ecuación de* EULER:

$$[113\text{-}9] \qquad f_y(x, y_0, y'_0) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y_0, y'_0) = 0.$$

Las soluciones de [113-9] son las únicas funciones que cumplen la condición [113-8], es decir: si la integral [113-8] es nula cualquiera que sea la función z, debe ser nula la expresión [113-9] en todo el intervalo (a, b) (ver nota 2).

La determinación de la función $y_0(x)$ que hace mínima o máxima la integral J se reduce, pues, a integrar la ecuación [113-9] con las condiciones de contorno $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

He aquí, pues, una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden (pues al derivar $f_{y'}$ aparecerá y'') a la cual debe satisfacer la función buscada $y(x)$. Como la ecuación de EULER representa una condición necesaria, las soluciones del problema variacional deben buscarse entre las soluciones de la ecuación diferencial de EULER, llamadas *extremales* del problema variacional.

NOTAS: 1. Toda extremal anula, pues, a la derivada $J'(t)$ en $t = 0$, y según que haga positiva o negativa a la derivada segunda, dará a la integral un valor menor o mayor que todas las funciones $y_0 + tz$ de un cierto entorno $|t| < \varepsilon$, suponiendo fijada la función auxiliar $z(x)$. En la práctica no suele ser necesario recurrir a la derivada segunda, pues la índole del problema indica si se trata de máximo o mínimo; y como las únicas funciones que pueden satisfacer al problema son las extremales, sólo podrá haber ambigüedad cuando haya más de una solución que satisfaga a las condiciones iniciales, como sucede en el ejemplo 2 de § 113-4.

2. LEMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO DE VARIACIONES. — *Si* $F(x)$ *es continua en* $a \leqslant x \leqslant b$ *y es*

$$[113\text{-}10] \qquad \int_a^b z(x)F(x)\,dx = 0$$

para toda función $z(x)$ *con derivada primera continua y tal que* $z(a) = z(b) = 0$, *entonces* $F(x) \equiv 0$ *en* $[a, b]$.

Si fuera $F(x) \not\equiv 0$, en $[a, b]$ podemos suponer por la continuidad de $F(x)$ que es, por ejemplo, $F(x_0) > 0$ en un punto x_0 de (a, b) (es decir, distinto de a y de b). Entonces (§ 26-1) existirá un $h > 0$ tal que: 1) $F(x) > 0$ en $(x_0 - h, x_0 + h)$; 2) $(x_0 - h, x_0 + h)$ está contenido en $[a, b]$. La función

$$z(x) = \begin{cases} = 0 & \textit{para} \quad a \leqslant x \leqslant x_0 - h, \\ = (x - x_0 + h)^2 (x - x_0 - h)^2 & \textit{para} \quad x_0 - h < x < x_0 + h, \\ = 0 & \textit{para} \quad x_0 + h \leqslant x \leqslant b, \end{cases}$$

cumple las condiciones del enunciado, y se tiene:

$$\int_a^b z(x)F(x)\,dx = \int_{x_0-h}^{x_0+h} (x - x_0 + h)^2 (x - x_0 - h)^2 F(x)\,dx > 0$$

en contradicción con [113-10].

3. La demostración dada para la ecuación de EULER exige imponer a la solución $y_0(x)$ del problema variacional la condición más fuerte de tener derivada *segunda* continua en $[a, b]$ (cuando basta la existencia de derivada primera continua, ver nota 5 y c).

Debe existir $y_0''(x)$ continua para que $f_{y'}[x, y_0(x), y_0'(x)]$ tenga derivada respecto de x, y se pueda aplicar a [113-8] el lema fundamental de nota 2.

4. LEMA DE DU BOIS-REYMOND. — *Si* $G(x)$ *es continua en* $a \leqslant x \leqslant b$, *y es*

$$\int_a^b z'(x)\,G(x)\,dx = 0 \qquad [113\text{-}11]$$

para toda función $z(x)$ *con derivada primera continua y tal que* $z(a) = z(b) = 0$, *entonces es* $G(x) = $ *constante en* $[a, b]$.

La función

$$z(x) = \int_a^x G(\xi)\,d\xi - \frac{x-a}{b-a}\int_a^b G(\xi)\,d\xi \quad ,$$

cumple las condiciones del enunciado. Reemplazada en [113-11] da, por ser $z'(x) = G(x) - (b-a)^{-1}\int_a^b G(\xi)\,d\xi$:

$$\int_a^b z'(x)\,G(x)\,dx = \int_a^b z'\left[\, z' + \frac{1}{b-a}\int_a^b G(\xi)\,d\xi \,\right] dx = 0 \quad ,$$

o sea

$$\int_a^b z'^2\,dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b G(\xi)\,d\xi \int_a^b z'\,dx = 0. \qquad [113\text{-}12]$$

Como $\int_a^b z'\,dx = z(b) - z(a) = 0$, resulta de [113-12] $\int_a^b z'^2\,dx = 0$, y por la continuidad de z' es $z' \equiv 0$ en $[a, b]$. Finalmente, de la expresión de $z'(x)$ resulta $G(x) = (b-a)^{-1}\int_a^b G(\xi)\,d\xi = $ constante.

5. En el lema de DU BOIS-REYMOND (nota 4) se basa una demostración de la relación de EULER que sólo exige a la solución $y_0(x)$ tener derivada *primera* continua (cfr. nota 3).

Poniendo $\int_a^x f_y[\xi, y_0(\xi), y_0'(\xi)]\,d\xi = H(x)$ resulta de [113-6]:

$$\int_a^b [H'(x)z + f_{y'}(x, y_0, y_0')z']\,dx = 0 \quad ,$$

y por integración por partes en el primer término:

$$\Big[\, H(x)\,z(x) \,\Big]_a^b - \int_a^b z'(x)\,[H(x) - f_{y'}(x, y_0, y_0')]\,dx = 0.$$

La parte integrada se anula por ser $z(a) = z(b) = 0$. Puede aplicarse entonces el lema de DU BOIS-REYMOND (nota 4) que da

$$H(x) - f_{y'}(x, y_0, y_0') = \text{constante},$$

y derivando respecto de x resulta la ecuación de EULER [113-9].

b) Condiciones naturales de contorno. — Reemplacemos, como al comienzo de este apartado, [113-7] en [113-6], pero ahora dejando de lado la condición $z(a) = z(b) = 0$ de extremos fijos (§ 113-1, nota 1). Resulta:

$$J'(0) = \Big[z f_{y'}(x, y_0, y'_0) \Big]_a^b + \int_a^b [f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}] dx = 0.$$

Si $y_0(x)$ es extremal, anula, como vimos en *a*, el segundo término y entonces debe verificar

[113-13] $$\Big[z(x) f_{y'}(x, y_0, y'_0) \Big]_a^b = 0.$$

Esta condición se cumple automáticamente en el caso de extremos fijos (§ 113-1, nota 1) en que $z(a) = z(b) = 0$, pero no cuando los extremos son libres. Como caso particular de éstos podemos suponer sucesivamente en [113-13] $z(a) \neq 0 = z(b)$ y luego $z(a) = 0 \neq z(b)$, de lo que deducimos:

TEOR. *Para que $y_0 = y_0(x)$ sea solución del problema variacional es necesario que sea extremal, y además, o bien*

1) *Cumpla las condiciones de contorno $y_0(a) = \alpha$, $y_0(b) = \beta$, en el caso de extremos fijos; o bien*

2) *Verifique las llamadas condiciones naturales de contorno*

[113-14] $$f_{y'}[a, y_0(a), y'_0(a)] = 0, \quad f_{y'}[b, y_0(b), y'_0(b)] = 0,$$

en el caso de extremos libres.

NOTA 6. Puede que sea fijo un extremo (por ej. *a*) y libre el otro. En este caso se tienen condiciones "mixtas" de contorno: $y_0(a) = \alpha$, $f_{y'}[b, y_0(b), y_0'(b)] = 0$.

c) Forma desarrollada de la ecuación de EULER; *existencia y continuidad de $y_0''(x)$.* — En el caso general en que bajo el signo integral figuren x, y, y', la ecuación [113-9] da para las extremales $y_0(x)$ la ecuación desarrollada

[113-15] $$f_{y'y'}(x, y_0, y_0') y_0'' + f_{y'y}(x, y_0, y_0') y_0' + f_{y'x}(x, y_0, y_0') - f_y(x, y_0, y_0') = 0 \quad ,$$

ecuación no lineal en y_0', pues ésta figura en los coeficientes, que deben deducirse derivando la función $f(x, y_0, y_0')$. La integración conducirá a una función con dos constantes arbitrarias, que se determinarán por las condiciones de contorno (ver *b*).

Para que [113-15] sea efectivamente de *segundo* orden y sus soluciones puedan satisfacer las condiciones de contorno es necesario que

[113-16] $$f_{y'y'}(x, y_0, y_0') \neq 0.$$

EJEMPLO. Curva entre dos puntos, que engendra el cuerpo de revolución de volumen mínimo, al girar alrededor del eje x. Es (§ 54-3):

$$V = \pi \int_a^b y^2 . dx, \quad \text{siendo} \quad f(x, y, y') = y^2.$$

La ecuación de EULER es en este caso en términos finitos (no diferencial, cfr. § 113-4, a_2)

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 2y = 0 \quad ,$$

luego la curva coincide con el segmento (a, b) del eje x, más las ordenadas extremas, como era de esperar, dadas las condiciones del problema. No existe ninguna solución que cumpla las condiciones de § 113-1, nota 1, salvo que en las condiciones de contorno sea $\alpha = \beta = 0$.

En § 113-4, a, estudiaremos el caso $f_{y'y'} = 0$, y ahora veremos que con las hipótesis de § 113-1, nota 1, que sólo implican para una extremal y_0 la continuidad de y_0', [113-16] trae como consecuencia la existencia y continuidad de y_0''.

Es
$$\frac{d}{dx} f_{y'}(x, y_0, y_0') =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ f_{y'}[x + h, y_0(x + h), y_0'(x + h)] - \right.$$
$$\left. - f_{y'}[x, y_0(x), y_0'(x)] \right\}.$$

Poniendo, para abreviar, $\Phi(x + h) - \Phi(x) = \Delta\Phi$, y teniendo en cuenta (§ 30-2) que $\Delta\Phi = h\Phi'(x) + h\omega$ con ω infinitésimo con h, se tiene para la llave del segundo miembro, que indicaremos por $\Delta f_{y'}$:

$$\Delta f_{y'} = h f_{y'x}[x, y_0(x), y_0'(x)] + \Delta y_0 f_{y'y}[x, y_0(x), y_0'(x)] +$$
$$+ \Delta y_0' f_{y'y'}[x, y_0(x), y_0'(x)] + h\omega_1 + \Delta y_0 \omega_2 + \Delta y_0' \omega_3 \quad ,$$

siendo ω_1, ω_2, ω_3, infinitésimos con h, Δy_0, $\Delta y_0'$. Sigue de aquí

$$\frac{\Delta y_0'}{h} = \frac{\Delta f_{y'} : h}{f_{y'y'}[x, y_0(x), y_0'(x)] + \omega_3} -$$
$$- \frac{f_{y'x}[x, y_0(x), y_0'(x)] + \omega_1 + \{f_{y'y}[x, y_0(x), y_0'(x)] + \omega_2\}(\Delta y_0 : h)}{f_{y'y'}[x, y_0(x), y_0'(x)] + \omega_3}$$

y por [113-16] resulta de aquí (con las hipótesis de § 113-1, nota 1) la existencia y continuidad de

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y_0'}{h} = y_0''(x) = \left[\frac{d}{dx} f_{y'} - f_{y'x} - y_0' f_{y'y} \right] : f_{y'y'}.$$

De esta relación resulta también [113-15] despejando $(d/dx)f_{y'}$ y reemplazando en [113-9].

4. **Integración de la ecuación de Euler.** — a) Consideremos primero el caso (ver § 113-3, c) en que

[113-17] $$f_{y'y'}(x, y, y') \equiv 0$$

para excluirlo en lo sucesivo, pues veremos ahora que entonces el problema variacional, o carece de sentido, o se reduce a un

problema de extremos de Cálculo diferencial, o no tiene solución.

Por [113-17] $f_{y'}$ no contiene y', o sea: $f_{y'}(x,y,y') = F(x,y)$, de donde $f(x,y,y') = F(x,y)y' + G(x,y)$ y [113-9] da

$$F_y(x,y_0)y_0' + G_y(x,y_0) = \frac{d}{dx} F[x, y_0(x)] = F_x(x,y_0) + F_y(x,y_0)y'_0 \quad ,$$

de donde

[113-18] $$F_x(x,y_0) = G_y(x,y_0).$$

a_1) *Es* $F_x(x,y) = G_y(x,y)$ *idénticamente en* x, y. Entonces el integrando del problema variacional es (§ 89-1) diferencial total exacta, la integral sobre cualquier curva de extremos (a, α), (b, β) tiene el mismo valor $J = U(b,\beta) - U(a,\alpha)$ si es $U(x,y)$ la función potencial (§ 89-1). Por tanto:

a_{11}) El problema de extremos fijos pierde significación;

a_{12}) El problema de extremos libres se reduce al de hallar los extremos de la función de dos variables α, β: $U(b,\beta) - U(a,\alpha)$.

a_2) Si $F_x(x,y) = G_y(x,y)$ no se verifica idénticamente, será una ecuación finita (no diferencial) para las extremales y_0 que deben cumplir [113-18], y salvo casos excepcionales el problema variacional de extremos fijos no tiene solución (ver § 113-3, ejemplo).

b) *La función integrando* $f(x,y,y')$ *carece de* y, [113-9] se reduce a $\frac{d}{dx} f_{y'} = 0$ de donde:

[113-19] $$f_{y'} = C \quad ;$$

e integrando esta ecuación de primer orden aparece una segunda constante arbitraria.

EJEMPLO 1. Determinar las funciones $y(x)$ que hagan mínima la integral de [113-1]. Siendo $f(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$ la ecuación de EULER, por no figurar y en la integral, se reduce a [113-19], o sea

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C \quad \therefore \quad y' = c \quad \therefore \quad y = cx + c_1 \quad ,$$

es decir, una función lineal cuyas constantes se determinan por la condición de pasar la recta por dos puntos dados. Dado el significado geométrico de la integral, el resultado era *a priori* conocido.

Si el problema variacional es de extremos libres, las constantes c y c_1 habrán de determinarse por las condiciones naturales de contorno [113-14]. Como $f_{y'} = y'/\sqrt{1+y'^2}$, y es $y'(a) = y'(b) = c$, se obtiene de [113-14] $c/\sqrt{1+c^2} = 0$, o sea $c = 0$, y entonces las extremales son $y = c_1$, rectas perpendiculares a las rectas de contorno $x = a$, $x = b$, que evidentemente son soluciones del problema variacional.

NOTA 1. Si el problema propuesto impone a las extremales más condiciones que las que determinan las dos constantes arbitrarias contenidas en la solución de la ecuación de EULER, el problema variacional no tendrá solución en general. Por ejemplo, no pueden darse arbitrariamente dos puntos de una extremal y la tangente en uno de esos puntos. Así, no tiene solución buscar entre las curvas de la clase antes considerada

(§ 113-1, nota 1) que unen dos puntos A y B y tienen en A tangente distinta de la recta AB, la que tenga longitud mínima, pues las extremales son rectas y ninguna de ellas cumple las condiciones requeridas.

c) La función integrando $f(x, y, y')$ *carece de* x. — c_1) Este caso puede reducirse al *b* permutando las variables.

EJEMPLOS: 2. *Superficies de revolución de área mínima.* — Entre todas las curvas de extremos dados, determinar la que engendra la superficie de revolución de menor área al girar alrededor del eje x. La expresión del área, por ser $dS = 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2}$, es (§ 54-5):

$$S = 2\pi \int y\sqrt{1 + x'^2}\,dy \quad ;$$

$$f(y, x, x') = y\sqrt{1 + x'^2} \quad ,$$

habiendo adoptado y como variable independiente y x como función desconocida, para simplificar; pues la ecuación de EULER, con este cambio de variables, es:

$$f_x - \frac{d}{dy} f_{x'} = 0, \quad \text{que se reduce a} \quad \frac{d}{dy} f_{x'} = 0 \quad ,$$

e integrando resulta:

$$f_{x'} = \alpha, \qquad \text{o sea:} \qquad \frac{yx'}{\sqrt{1 + x'^2}} = \alpha \quad ,$$

de donde:

$$x'^2(y^2 - \alpha^2) = \alpha^2, \quad \text{y separando variables} \quad dx = \frac{\alpha\,dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2}} \, .$$

Hagamos el cambio de variable $y = \alpha \operatorname{ch} z$; entonces:

$$dy = \alpha \,.\, \operatorname{sh} z \,.\, dz \qquad \sqrt{y^2 - \alpha^2} = \alpha \,.\, \operatorname{sh} z$$

La ecuación se reduce a

$$dx = \alpha \,.\, dz \quad \text{de donde} \quad z = \frac{x + C}{\alpha}$$

y la curva buscada (fig. 383) es la catenaria (§ 29-1) cuya base es el eje x:

$$y = \alpha \,.\, \operatorname{ch} \frac{x + C}{\alpha} \, .$$

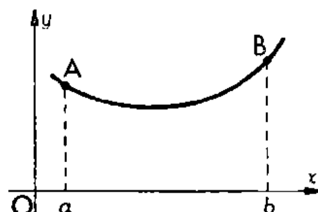


Fig. 383.

Las constantes α y C se determinan por la condición de que la curva pase por los dos puntos dados. En particular, si éstos son simétricos respecto del eje y, para $x = \pm a$ deben resultar valores iguales de y; como el ch es función par, deben ser opuestos los arcos $a + C$, $-a + C$, luego $C = 0$.

Un estudio completo permite discutir los tres casos que pueden presentarse, según que por los dos puntos pasen dos catenarias, una o ninguna.

3. *Problema de la braquistócrona.* — Un grave cae desde O(0,0) a $A(x_0, y_0)$ por una curva OA y se trata de encontrar ésta de modo tal, que el tiempo invertido en recorrerla sea mínimo.

La velocidad, después de haber descendido la ordenada y, es:

$$v = \sqrt{2gy}, \quad \text{luego} \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}},$$

y el tiempo transcurrido es, llamando l a la longitud de OA:

$$T = \int_0^l \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \int_0^{y_0} \sqrt{\frac{1+x'^2}{2gy}}\, dy \quad ,$$

Para obtener la función que hace mínima la integral, hemos adoptado y como variable independiente y la ecuación de la variación primera que es:

$$f_x - \frac{d}{dy} f_{x'} = 0$$

se reduce a $f_{x'} = \text{const}$; o sea, poniendo la constante en la forma $1 : \sqrt{2r}$, se tiene:

$$\frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \quad , \quad \text{de donde} \quad x' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2r-y}}.$$

Pongamos para racionalizar:

$$y = r(1-\cos t) = 2r \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}t$$

y el segundo miembro se simplifica así:

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2r-y}} = \frac{\sqrt{2r \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t}}{\sqrt{2r \cos^2 \frac{1}{2}t}}$$

que se reduce a $\operatorname{tg} \frac{1}{2}t$; por otra parte:

$$dy = r \operatorname{sen} t \, . \, dt = 2r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}t \cos \tfrac{1}{2}t \, . \, dt \quad ;$$

luego la ecuación se transforma en ésta:

$$dx = 2r \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}t \, . \, dt = r(1-\cos t)\, dt \quad ,$$

cuya integral general es:

$$x = r(t - \operatorname{sen} t) + C \quad ,$$

y esta constante debe ser nula, pues para $y = 0$, $t = 0$ debe ser $x = 0$. Resultan así las ecuaciones:

$$x = r(t - \operatorname{sen} t) \quad ; \quad y = r(1 - \cos t) \quad ,$$

que representan una cicloide, cuya base es el eje x.

Esta rampa cicloidal se llama *curva braquistócrona*, que significa: *curva de tiempo mínimo*.

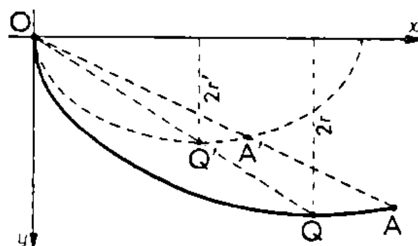


Fig. 384.

¿Cómo construir o determinar la cicloide que pasa por O y A? No es fácil resolver este problema algebraicamente, pero en cambio es muy sencilla la solución gráfica representada en la figura 384. Dibújese una onda cualquiera de cicloide y determínese el punto A' de intersección con la semirrecta OA. La homotecia de centro O que transforma A' en A da el arco de cicloide OA que resuelve el problema. La figura indica asimismo cómo se determina su radio r y se deduce fácilmente el argumento t que corresponde al punto A.

c_2) El artificio usado en c_1 exige que x sea función de y en el intervalo $[\alpha, \beta]$; es decir, que la solución buscada sea función monótona, y tal condición puede no cumplirse, por desgracia, en los dos problemas de la superficie mínima (ej. 2) y de la braquistócrona (ej. 3). Veamos la solución rigurosa.

Si la función integrando carece de x, es decir, es del tipo $\mathrm{f}(y, y')$, la ecuación de EULER [113-15] se reduce a ésta:

$$[113\text{-}20] \qquad \mathrm{f}_{y'y'}\, y'' + \mathrm{f}_{y'y}\, y' - \mathrm{f}_y = 0 .$$

Designando por D la derivación total, respecto de la única variable independiente x, y comparando el primer miembro de [113-20] con las expresiones:

$$\mathrm{Df} = \mathrm{f}_y \,.\, y' + \mathrm{f}_{y'} \,.\, y'' \quad ,$$
$$\mathrm{D}(\mathrm{f}_{y'} \,.\, y') = \mathrm{f}_{y'} \,.\, y'' + \mathrm{f}_{y'y} \,.\, y'^2 + \mathrm{f}_{y'y'} \,.\, y'\, y'' \quad ,$$

se ve que la diferencia de éstas es precisamente aquel trinomio multiplicado por $-y'$; luego de la ecuación [113-20] se deduce

$$\mathrm{D}(\mathrm{f} - \mathrm{f}_{y'}\, y') = 0 \quad \therefore \quad \mathrm{f} - \mathrm{f}_{y'} \,.\, y' = a \quad ,$$

ecuación de primer orden que suministra la integral general, con dos constantes a, b.

EJERCICIO. Aplíquese la ecuación [113-20] al problema de la superficie de área mínima y al de la braquistócrona.

NOTA 2. Fácilmente se pasa de este método al aplicado en c_1, quedando así justificada la permutación de variables. En efecto, allí procedíamos así:

$$\int \mathrm{f}(y, y')\,\mathrm{d}x = \int \varphi(y, x')\,\mathrm{d}y \quad ,$$

y suponiendo que $x = \mathrm{x}(y)$ fuera uniforme en el intervalo $[\alpha, \beta]$, obteníamos como integral la ecuación de EULER $\varphi_{x'} = c$; pero siendo:

$$\varphi = \mathrm{f} \,.\, x' \quad \therefore \quad \varphi_{x'} = \mathrm{f} + \mathrm{f}_{x'} \,.\, x'$$

y como $y' = 1/x'$, este binomio vale:

$$\mathrm{f} + \mathrm{f}_{y'} \,.\, x'(-1/x'^2), \qquad \text{o sea} \qquad \mathrm{f} - \mathrm{f}_{y'} \,.\, y'.$$

Por ambos métodos se llega, por tanto, a la misma ecuación diferencial, quedando así justificado aquél, si es y función uniforme de x, aunque no exista función inversa.

5. **Otros problemas variacionales.** — a) *Geodésicas de una superficie.* — Problema muy importante en Geometría y en Física relativista es el de las *geodésicas* de un espacio curvo. En el caso más sencillo, que es el de las superficies del espacio euclidiano (§ 76-5, d), la expresión de la diferencial de arco [76-3] es

$$\mathrm{d}s = \sqrt{g_{11}\,\mathrm{d}u^2 + 2g_{12}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + g_{22}\,\mathrm{d}v^2} \quad ,$$

adoptando u como variable independiente, la función integrando es:

$$\mathrm{f} = \sqrt{g_{11} + 2g_{12}\,v' + g_{22}\,v'^2} \quad ,$$

y la ecuación diferencial de las geodésicas resulta inmediatamente aplicando la ecuación de EULER:

$$\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v} + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial v}\, v' + \frac{\partial g_{22}}{\partial v}\, v'^2\right) : 2\mathrm{f} =$$
$$= \mathrm{D}_u[(g_{12} + g_{22}\, v') : \mathrm{f}]\,.$$

EJEMPLOS: 1. Si la superficie es plana, $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$, la ecuación se reduce a ésta:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}[v' : \sqrt{1 + v'^2}] = 0 \quad \therefore \quad v' = a \quad \therefore \quad v = au + b \quad ,$$

es decir, las geodésicas son rectas.

2. *Geodésicas de la superficie esférica.* — Si u es la latitud y v la longitud, el elemento de arco en la superficie esférica de radio 1 es:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + \cos^2 u\,.\,\mathrm{d}v^2 \quad \therefore \quad g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \cos^2 u\,.$$

Como no contiene la variable v, la ecuación de EULER, después de una primera integración, da:

$$\frac{v'\,.\,\cos^2 u}{\sqrt{1 + v'^2\cos^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} \;,$$

poniendo en esta forma la constante, para facilitar la integración.

Despejando:

$$v'^2 = \frac{1}{(1 + c^2)\cos^4 u - \cos^2 u} \;, \quad v' = \frac{1}{\cos^2 u\,\sqrt{c^2 - \mathrm{tg}^2\, u}} \;;$$

la integral es inmediata con el cambio de variable $\mathrm{tg}\, u = t$ y resulta:

$$c\,.\,\mathrm{sen}\,(v + \alpha) = \mathrm{tg}\, u \quad \text{o bien} \quad a\cos v + b\,\mathrm{sen}\, v = \mathrm{tg}\, u$$

que representa un arco de circunferencia máxima, sección por el plano $ax + by = z$.

b) Curvas extremales en forma paramétrica. — La teoría que hemos expuesto es muy restringida, por considerar solamente arcos de extremos A, B, que son cortados en un solo punto por cada recta paralela al eje y. Para poder considerar todos los arcos AB, es preciso adoptar la forma paramétrica:

$$x = \mathrm{x}(t) \quad , \quad y = \mathrm{y}(t)$$

y considerar las integrales del tipo:

[113-21] $$\int \mathrm{f}(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t.$$

Al cambiar el parámetro t por el u, la diferencial queda dividida por u', mientras que x' e y' quedan multpilicadas por u'. Para que la integral tenga significado intrínseco, independiente del parámetro elegido para representar el arco, es preciso que la función $\mathrm{f}(x, y, x', y')$ quede multiplicada por u'; y como esto vale para todo número u', *debe ser homogénea de grado* 1 *respecto de las variables* x', y'.

EJEMPLOS: 3. La función integrando para la longitud del arco (§ 113-4, ej. 1) es $\sqrt{x'^2+y'^2}$, que cumple esta condición de homogeneidad.

4. Lo mismo sucede a la función $y\sqrt{x'^2+y'^2}$ que aparece en el área de la superficie de revolución (§ 113-4, ej. 2).

Para hacer variar el arco AB incrementaremos las coordenadas poniendo $x+r_1 z_1$, $y+r_2 z_2$ en lugar de x, y. Las funciones $z_1(t)$, $z_2(t)$ son continuas con sus derivadas primeras, y nulas en los extremos A, B (en el problema de extremos fijos), y por comodidad las supondremos positivas en los puntos intermedios. Los números r_1, r_2, son reales y al anularse determinan el arco AB.

La integral [113-21] es una función $\Phi(r_1, r_2)$ de los parámetros r_1, r_2, y sus derivadas parciales primeras respecto de ellos deben anularse para $r_1=0$, $r_2=0$, si es máxima o mínima en el arco AB la integral [113-21]. Es decir, debe verificarse:

$$\Phi'_1(0,0) = \int (f_x . z_1 + f_{x'} . z'_1)\,dt = 0 \ ,$$

$$\Phi'_2(0,0) = \int (f_y . z_2 + f_{y'} . z'_2)\,dt = 0 \ .$$

Transformando por partes el segundo sumando de la segunda integral resulta, como ya se vió (§ 113-3, *a*), la condición [113-9] de EULER; y lo mismo para la primera integral. Resulta así el par de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$[113\text{-}22] \qquad f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0 \quad ; \quad f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = 0 .$$

NOTA. Como consecuencia de la homogeneidad de $f(x, y, x', y')$ se verifica la identidad fácil de demostrar:

$$\left(f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} \right) x' = - \left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right) y'$$

y por tanto, basta resolver una de las ecuaciones.

La demostración se reduce a derivar respecto de t los dos miembros de la igualdad:

$$f = x' f_{x'} + y' f_{y'}$$

que expresa la homogeneidad de f por el teorema de EULER (§ 67-3), y simplificando la igualdad obtenida por reducción de los términos $x'' f_{x'} + y'' f_{y'}$ que aparecen en ambos miembros, resulta la igualdad propuesta.

EJEMPLO 5. *Problema de* NEWTON. — *Determinar el cuerpo de revolución que, al moverse en la dirección de su eje en un flúido, encuentra resistencia mínima suponiendo que la resistencia normal es proporcional al cuadrado de la componente normal de la velocidad.*

El área engendrada por el elemento ds, al girar alrededor del eje x, es $2\pi y \,.\, ds$; la componente normal de la velocidad v es $v \,.\, dy/ds$, luego, la resistencia de la corona de superficie es $2\pi v^2 y \,.\, dy^2/ds$ por un factor numérico.

Como la componente normal al eje es nula, basta considerar la componente paralela, la cual se obtiene multiplicando por dy/ds, luego la resultante de todas es la integral

$$2\pi v^2 \int y \,.\, dy^3 \,.\, ds^{-2} = 2\pi \int \frac{y\, y'^3}{x'^2 + y'^2}\, dt$$

expresando las coordenadas en función de un parámetro cualquiera t.

La ecuación de EULER que debe integrarse es por tanto:

$$\frac{y\, x'\, y'^3}{(x'^2 + y'^2)^2} = a$$

y adoptando como parámetro $t = x'/y'$ resulta inmediatamente:

$$y = a(t^2 + 1)^2 : t$$

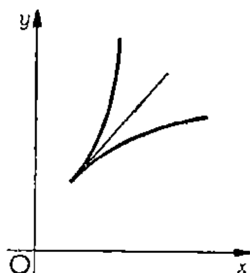


Fig. 385.

cuya derivada:

$$y' = a(t^2 + 1)(3t^2 - 1) : t^2$$

permite despejar:

$$x' = a(t^2 + 1)(3t^2 - 1) : t = a(3t^3 + 2t - t^{-1})$$

e integrando resulta:

$$x = a(\tfrac{3}{4}t^4 + t^2 - \ln t) + b.$$

Estas expresiones paramétricas indican que y no puede anularse, es decir, la curva no corta al eje x. El estudio de la curva permite construirla y la figura 385 muestra claramente que el arco buscado debe pertenecer a una sola rama de la curva. Dados los extremos A, B, la construcción del arco AB puede hacerse gráficamente por semejanza.

c) Principios extremales de la Física. — Desde la antigüedad se ha intentado edificar la Física sobre postulados de carácter extremal, de los cuales se deducen las ecuaciones y leyes fundamentales, y esta tendencia se acentúa más cada día. He aquí los más importantes:

PRINCIPIO DE MAUPERTUIS DE LA ACCIÓN MÍNIMA (1740). — *Un punto móvil de* A *o* B *sigue el camino tal que la integral de la velocidad a lo largo del mismo, es decir,* $\int v \,.\, ds$, *es mínima.*

De este principio, perfeccionado por EULER y modernamente generalizado por HÖLDER (1896), pueden deducirse las ecuaciones de la Mecánica. Por ejemplo, para el movimiento libre, las ecuaciones de EULER aplicadas a la integral que expresa la acción $\int (x'^2 + y'^2)\, dt$ dan $x' = a$, $y' = b$, es decir, el principio de inercia de GALILEO.

PRINCIPIO DE FERMAT (1629). — Una generalización importante del problema de la braquistócrona es ésta, que llamaremos problema de FERMAT:

Siendo la velocidad de un móvil una función conocida $v(x, y)$, *determinar el camino más breve entre los puntos* A, B, *es decir, el arco tal que sea mínimo el tiempo total:*

$$T = \int \frac{ds}{v(x, y)}\,.$$

En el problema de BERNOULLI, que conduce a la braquistócrona, esta velocidad es proporcional a $\sqrt{y}$, pero en el de FERMAT es una función

cualquiera. Si v es la velocidad de propagación de la luz (es decir, si $1/v$ es el índice de refracción) se tiene el auténtico principio de FERMAT (o de HERON), fundamental en Óptica, y que permite demostrar fácilmente las leyes de la reflexión y de la refracción.

PRINCIPIO DE HAMILTON (1834) Y ECUACIONES DE LAGRANGE (1788). — Un sistema mecánico con n grados de libertad está caracterizado por n parámetros o coordenadas: $q_1, q_2, \ldots, q_n$ funciones del tiempo. La *energía potencial* U es función de ellos; la *energía cinética* o *fuerza viva* L es función de ellos y de sus n derivadas respecto de t; la diferencia $L-U$ se llama *potencial cinético*, y con esta denominación, se enuncia así el *principio de* HAMILTON:

Entre todos los movimientos posibles que en un tiempo dado hacen pasar un sistema de uno a otro estado, se realiza aquel movimiento para el cual es estacionario el potencial cinético medio:

$$\int_{t_0}^{t_1}(L-U)\,\mathrm{d}t.$$

Las ecuaciones de EULER [113-22] son en este caso las n siguientes:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_{q'}-(L_q-U_q)=0 \qquad (q=q_1,q_2,\ldots,q_n)$$

que son precisamente las *ecuaciones de la dinámica de* LAGRANGE.

Las ecuaciones de la Estática resultan como corolario:

$$U_q=0 \qquad (q=q_1,q_2,\ldots,q_n)$$

es decir: *Condición necesaria y suficiente para que un sistema mecánico de energía potencial* $U(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ *esté en equilibrio para ciertos valores de estas coordenadas, es que la energía potencial sea estacionaria para esos valores.*

Otros principios, también importantes en Mecánica, son éstos:

PRINCIPIO DE GAUSS DEL ESFUERZO MÍNIMO. — *El movimiento de un sistema material con vínculos bilaterales, está caracterizado entre todos los movimientos compatibles con los vínculos por la condición de esfuerzo mínimo de éstos.*

PRINCIPIO DE HERTZ. — *El movimiento de un sistema material de n puntos con vínculos bilaterales independientes del tiempo y no solicitado por fuerzas, se verifica con velocidad constante y con curvatura mínima de la gráfica representativa en el espacio de $3n$ dimensiones formada por los puntos cuyas coordenadas son las coordenadas de los n puntos por las raíces cuadradas de sus masas.*

d) Variación de las integrales múltiples. — El problema fundamental es análogo al resuelto en § 113-3. Entre todas las funciones $u(x,y)$ definidas en un recinto D, que toman valores prefijados en el contorno C, determinar aquellas que dan valor máximo o mínimo relativo a la integral:

$$[113\text{-}23] \qquad \iint_D f(x,y,u,u_x,u_y)\,\mathrm{d}x\,.\,\mathrm{d}y.$$

Geométricamente: determinar los casquetes de contorno dado C que hacen máxima o mínima a la integral. Haciendo variar u, es decir, poniendo $u+rw$, donde r es un número real y $w(x,y)$ una función continua que se anula en el contorno C,

la integral es función de la variable real r y anulando su derivada se llega a la condición necesaria de EULER:

[113-24] $$f_u = \frac{d}{dx} f_p + \frac{d}{dy} f_q \quad ,$$
$$(p = u_x, \quad q = u_y).$$

He aquí algunos ejemplos muy importantes:

EJEMPLO 6. SUPERFICIES DE ÁREA MÍNIMA. — Aplicando la condición [113-24] al área de un casquete de contorno C

$$S = \int\int \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, . \, dx \, . \, dy = \int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, . \, dx \, . \, dy$$

resulta inmediatamente la ecuación de las superficies de área mínima:

$$z_{xx}(1 + z_y) - 2z_{xy} \, . \, z_x \, . \, z_y + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0 \, .$$

EJERCICIO. Compruébese que la satisface la ecuación

$$y^2 + z^2 = a^2 \mathrm{ch}^2 \frac{x + C}{a}$$

de las superficies mínimas de revolución (superficies *catenoides*), obtenida en § 113-4, ej. 2.

PRINCIPIO DE DIRICHLET. — Dado un recinto A, cualquiera que sea la función $u(x, y)$ que en el contorno tome valores prefijados, hace positiva a la integral:

$$I = \int\int [(u_x)^2 + (u_y)^2] \, dx \, dy \quad ,$$

luego el conjunto de valores de I tiene un extremo inferior. ¿Será accesible, es decir, existirá alguna función u que dé a la integral I valor mínimo? Este postulado famoso se llama *principio de* DIRICHLET. Tal función debe satisfacer a la ecuación [113-24] de EULER, que en este caso es:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad ;$$

pero aun demostrada la existencia de solución de esta ecuación de LAPLACE, no queda probado que haga mínima a la integral. En cambio, admitido el principio de DIRICHLET (que se puede demostrar directamente, nota X, 2), se deduce, como hizo RIEMANN, la solución de $\Delta u = 0$.

EQUILIBRIO Y MOVIMIENTO DE CUERDAS, MEMBRANAS Y PLACAS. — Si se alabea el contorno de una membrana elástica situada en el plano xy, el área de la superficie $z = f(x, y)$ que forma la membrana es:

$$\int\int \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} \, dx \, . \, dy \cong$$
$$\cong \int\int dx \, . \, dy + \frac{1}{2} \int\int [(z_x)^2 + (z_y)^2] \, dx \, . \, dy$$

tomando solamente los dos primeros términos en el desarrollo de la raíz cuadrada. La dilatación sufrida por la membrana viene expresada por el segundo sumando; y como la energía potencial es proporcional a la dilatación, resulta como condición de equilibrio: la función z debe hacer mínima la integral:

$$\int\int [(z_x)^2 + (z_y)^2] \, dx \, . \, dy.$$

La ecuación de EULER [113-24], aplicada a esta integral, es:

$$z_{xx} + z_{yy} = 0 \quad ,$$

es decir, la ecuación de LAPLACE.

Análogamente resulta la ecuación de equilibrio de la placa elástica: $\Delta\Delta z + \mathrm{f}(x, y) = 0$, siendo f la fuerza exterior y representando Δ el laplaciano (§ 91-6, *d*) que, al aplicarlo dos veces, da una ecuación de cuarto orden.

También conduce el Cálculo de variaciones a las ecuaciones de los movimientos vibratorios de cuerdas, placas y membranas; la primera, que es la de D'ALEMBERT, ha sido ya estudiada en §§ 112-6 y 7.

Ecuación de la cuerda vibrante: $\lambda \, . \, z_{tt} = \tau z_{xx}$.

Ecuación de la membrana vibrante: $\varrho \, . \, z_{tt} - \mathrm{f}(x, y, t) = r \, . \, \Delta z$.

Ecuación de la placa vibrante: $\varrho \, . \, z_{tt} + \mathrm{f}(x, y, t) + r \, . \, \Delta\Delta z = 0$.

(Cfr. nota VIII, con significación de ϱ y r).

6. Variación segunda y condición de Legendre. — *a*) Como la integral J ó [113-2] es función de *t*, desarrollada por la fórmula de TAYLOR resulta:

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{J}(0) + \frac{t}{1!}\left(\frac{\mathrm{dJ}}{\mathrm{d}t}\right)_0 + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{J}}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 + \ldots$$

Sólo hemos considerado (§ 113-2) el término llamado variación primera: $\delta \mathrm{J} = t \, . \, \mathbf{J}'(0)$; el estudio completo exigiría considerar las *variaciones sucesivas* (LAGRANGE)

$$\delta^2\,\mathrm{J} = t^2\,\mathbf{J}''(0) \quad ; \quad \delta^3\,\mathbf{J} = t^3\,\mathbf{J}'''(0) \quad , \quad \ldots$$

llamadas variación segunda, tercera, etc.

Pudiera creerse, por analogía con la teoría de los máximos y mínimos ordinarios, que el análisis de las variaciones sucesivas permitirá resolver completamente el problema; pero no acontece así, pues el ser, por ejemplo, mínima la integral para cada tipo de variación, es decir, dentro de cada haz $\mathrm{y}_0(x) + t\mathrm{z}(x)$, siendo z una función prefijada, no implica que lo sea para el conjunto de todas ellas; de igual modo que acontecía con la teoría ordinaria, en ejemplos como el puesto en § 70-2, Ej. 3; pero aquí el conjunto de direcciones de variaciones, es decir, el conjunto de funciones *z*, es mucho más amplio y el problema mucho más complejo.

EJEMPLO. Determinar la curva de extremos 0 y 1, que haga máxima o mínima a la integral siguiente:

$$\int_0^1 (y^2 - y'^3)\,\mathrm{d}x.$$

La ecuación de EULER se reduce en este caso a la siguiente:

$$2y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3y'^2) = 0 \quad ; \quad 2y + 6y'y'' = 0 \quad ,$$

que se satisface por la solución $y = 0$, la cual cumple, en efecto, la condición de hacer mínima la integral para variaciones del tipo $tz(x)$, pues

cualquiera que sea la función elegida $z(x)$, con derivada finita en (0, 1), tomando

$$|t| < \int_0^1 z^2\,dx : \left|\int_0^1 z'^3\,dx\right| ,$$

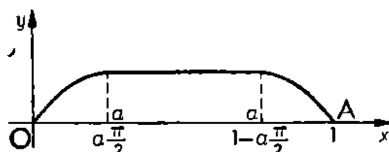


Fig. 386.

es la integral positiva. Sin embargo, existen funciones tan próximas a 0 como se quiera, que hacen negativa la integral. Basta construir curvas como la indicada en la figura 386, formada por un segmento rectilíneo unido al arco de sinusoide $y = a\,\text{sen}\,(x/a)$, y al análogo en el otro extremo. Un cálculo fácil conduce a este resultado:

$$\int_0^1 y'^3\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi a}\cos^3\frac{x}{a}\,dx = \frac{4}{3}\,a ,$$

$$\int_0^1 (y^2 - y'^3)\,dx < a^2 - \frac{4}{3}\,a = a\left(a - \frac{4}{3}\right) < 0 \quad \text{si} \quad a \to 0^+ ,$$

luego, para valores de a suficientemente pequeños, la integral resulta negativa.

Note el lector que la distinción entre entorno y aproximación radial es la misma estudiada en § 70-2.

b) En cambio, toda condición *necesaria* para extremo de $J(t)$ en $t = 0$ dentro de un haz $y + tz$, es también necesaria para extremo del problema variacional, y es así como obtuvimos la ecuación de EULER como condición necesaria.

b_1) Supongamos ahora que buscamos un MÍNIMO de la integral [113-2]. Como una condición *necesaria* para el mínimo de la función $J(t)$ con derivada segunda es (§ 33-9) $J''(0) \geqslant 0$, tendremos:

Para que una extremal $y_0(x)$ *que cumpla las condiciones de contorno* (ver § 113-3, *b*) *sea solución del problema variacional es* NECESARIO *que para toda función* $z(x)$ *admisible* (cfr. § 113-1, nota 1) *la segunda variación sea no negativa*: $t^2\,J''(0) \geqslant 0$.

b_2) *Si en un punto* x_1 *tal que* $a \leqslant x_1 \leqslant b$ *es*

$$f_{y'y'}[x_1, y_0(x_1), y'_0(x_1)] = -h^2 < 0 ,$$

existe una función $z(x)$ *con derivada primera continua, tal que* $\delta^2 J < 0$.

Por la continuidad de $f_{y'y'}$ podemos suponer que x_1 es interior ($a < x_1 < b$), y además existe un $\varepsilon > 0$ tal que

1) $a < x_1 - 3\varepsilon$, y $x_1 + 3\varepsilon < b$;

2) $f_{y'y'}[x, y_0(x), y'_0(x)] < -\frac{1}{2}h^2$, para $x_1 - 3\varepsilon \leqslant x \leqslant x_1 + 3\varepsilon$.

Debemos hallar una función $z(x)$ tal que:

[113-25]
$$J''(0) = \int_a^b \{f_{yy}[x, y_0(x), y'_0(x)]z^2 + 2f_{yy'}zz' + f_{y'y'}z'^2\}dx < 0 \quad ,$$

para lo cual buscaremos que sea z' grande donde $f_{y'y'} < 0$, y z pequeño, para que el tercer término, que es negativo, prive sobre los otros dos. Esto se logra con la función (fig. 387):

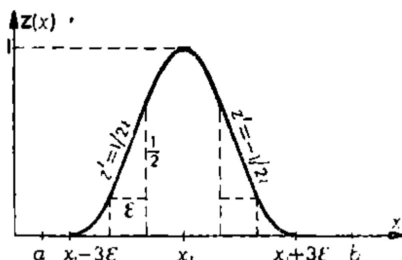


Fig. 387.

$$z(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad a \leqslant x < x_1 - 3\varepsilon , \\ (x - x_1 + 3\varepsilon)^2/(4\varepsilon^2) & \text{,,} \quad x_1 - 3\varepsilon \leqslant x < x_1 - 2\varepsilon , \\ \frac{1}{4} + (x - x_1 + 2\varepsilon)/(2\varepsilon) & \text{,,} \quad x_1 - 2\varepsilon \leqslant x < x_1 - \varepsilon , \\ 1 - (x - x_1)^2/(4\varepsilon^2) & \text{,,} \quad x_1 - \varepsilon \leqslant x < x_1 + \varepsilon , \\ \frac{1}{4} - (x - x_1 - 2\varepsilon)/(2\varepsilon) & \text{,,} \quad x_1 + \varepsilon \leqslant x < x_1 + 2\varepsilon , \\ (x - x_1 - 3\varepsilon)^2/(4\varepsilon^2) & \text{,,} \quad x_1 + 2\varepsilon \leqslant x < x_1 + 3\varepsilon , \\ 0 & \text{,,} \quad x_1 + 3\varepsilon \leqslant x \leqslant b . \end{cases}$$

Para esta función $z(x)$, que en $[a, b]$ tiene derivada continua y verifica

$$|z'(x)| \leqslant 1/(2\varepsilon) \quad ; \quad 0 \leqslant z(x) \leqslant 1 \quad ,$$

la integral en [113-25] se extiende al intervalo $(x_1 - 3\varepsilon, x_1 + 3\varepsilon)$, donde por la continuidad de f_{yy} y de $f_{yy'}$ es $|f_{yy}| < K$, $|f_{yy'}| < K$ para un cierto K, y entonces se tiene para los dos primeros términos:

$$\left| \int_{x_1-3\varepsilon}^{x_1+3\varepsilon} [f_{yy} z^2 + 2f_{yy'} zz']dx \right| < 6\varepsilon \left[K + \frac{K}{\varepsilon} \right] = 6K(1+\varepsilon) \quad ,$$

y para el tercero

$$\int_{x_1-3\varepsilon}^{x_1+3\varepsilon} f_{y'y'} z'^2 dx < \int_{x_1-2\varepsilon}^{x_1-\varepsilon} + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_1+2\varepsilon} < 2\varepsilon \left(\frac{1}{2\varepsilon} \right)^2 \cdot \frac{-h^2}{2} = -\frac{h^2}{4\varepsilon}$$

y eligiendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que $h^2/(4\varepsilon) > 6K(1+\varepsilon)$, resulta $J''(0) < 0$.

b_3) De b_1 y b_2 sigue el teorema:

Necesaria para que la extremal $y_0(x)$ *haga mínima la integral* J *es la condición de* LEGENDRE:

[113-26] $\quad f_{y'y'}[x, y_0(x), y'_0(x)] \geqslant 0$ *para* $a \leqslant x \leqslant b$.

NOTAS: 1. Excluyendo el caso $f_{y'y'} = 0$ (ver § 113-4, *a*), se tiene la *condición fuerte de* LEGENDRE:

[113-27] $\quad f_{y'y'}[x, y_0(x), y'_0(x)] > 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$.

2. Cambiando f en —f se tiene la condición necesaria para máximo.

EJERCICIOS

1. Resolver con la ecuación de EULER el problema variacional:

$$I = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \text{mín.}; \qquad y(a_i) = b_i \quad ;$$

(camino más corto entre dos puntos del plano).

2. Demostrar que la curva que une dos puntos A, B del semiplano superior $y \geqslant 0$ y hace mínima la integral

$$I = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}\, dx \quad ,$$

es el arco AB de circunferencia con centro sobre el eje x.

3. Considérese el siguiente problema variacional: Entre todas las curvas $y = y(x)$ que unen dos puntos $A_1(a_1, b_1)$, $A_2(a_2, b_2)$, hallar la que hace mínima la integral

[113-28] $$I[y] = \int_{a_1}^{a_2} g^2(x) . y'^2\, dx \geqslant 0, \quad g(x) \textit{ función dada.}$$

Su ecuación de EULER: $-[2g^2(x) . y']' = 0$ se resuelve por:

[113-29] $$y' = C_1/g^2(x) \quad , \quad y = \int_{a_1}^{x} C_1 g^{-2}(t)\, dt + C_2 \quad ,$$

y por las condiciones de contorno:

[113-30] $$C_2 = b_1 \quad , \quad C_1 = (b_2 - b_1) \Big/ \int_{a_1}^{a_2} g^{-2}(x)\, dx .$$

a) Probar, utilizando la desigualdad de SCHWARZ (§ 96-2), que el mínimo de [113-28] es

[113-31] $$(b_2 - b_1)^2 \Big/ \int_{a_1}^{a_2} g^{-2}(x)\, dx \quad ,$$

alcanzable cuando y' verifica la primera [113-29]; *b*) Verificar que [113-31] es el valor de [113-28] al reemplazar y' por la primera [113-29] con el valor de C_1 dado por [113-30].

4. *a*) Utilizando el ejercicio 3 hallar las extremales del problema variacional:

$$I = \int_{a_1}^{a_2} x^n y'^2\, dx = \text{mín.}, \quad y(a_i) = b_i \quad ;$$

b) Probar que si $n \geqslant 1$ y $a_1 a_2 < 0$ los puntos $A_i\,(a_i, b_i)$ no pueden unirse por una extremal.

5. Hallar las extremales de

$$I = \int_0^1 y^p y'^q\, dx \quad ,$$

con p y q enteros pares.

6. Hallar la ecuación diferencial de un rayo de luz en el plano xy, cuya velocidad $v(x, y)$ es independiente de la dirección.

7. Aplicando el principio de HAMILTON (§ 113-5, c), demostrar que *las geodésicas de una superficie* S *son sus trayectorias dinámicas cuando no actúan fuerzas exteriores,* es decir que en tal caso un punto obligado a moverse en S, describe una geodésica de S.

8. En base al ejercicio 7, caracterizar geométricamente las geodésicas como curvas tales que su normal principal n es paralela a la normal m a la superficie.

NOTAS AL CAPÍTULO XXVIII

I. Ecuaciones en diferenciales totales. — a) *Definiciones.* — La *ecuación diferencial total* o *en diferenciales totales*

[XXVIII-1] $\mathrm{P}(x, y, z)\,\mathrm{d}x + \mathrm{Q}(x, y, z)\,\mathrm{d}y + \mathrm{R}(x, y, z)\,\mathrm{d}z = 0$,

escrita también en forma asimétrica

[XXVIII-2] $\mathrm{d}z = -\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}x - \dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}y = \mathrm{U}\,\mathrm{d}x + \mathrm{V}\,\mathrm{d}y$,

suele interpretarse como una ecuación en *una* función incógnita de *dos* variables $z = \mathrm{z}(x, y)$, tal que ésta convierta la ecuación en una identidad en x, y, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$.

La [XXVIII-1] como ecuación diferencial ordinaria contiene más de una función incógnita y entonces se presenta, en general, una multiformidad de soluciones expresable mediante funciones arbitrarias; lo mismo ocurre en un sistema (§ 109) con más incógnitas que ecuaciones. Por ejemplo, en $y' = \mathrm{f}(x, y, z, z')$, fijada arbitrariamente $z = \mathrm{z}(x)$ derivable, resulta una ecuación $y' = \mathrm{g}(x, y)$.

En $\mathrm{P} + \mathrm{Q}\,.(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x) + \mathrm{R}\,.(\mathrm{d}z/\mathrm{d}x) = 0$, es decir, en [XXVIII-1], hay dos funciones incógnitas, siendo *solución* o *integral* todo par $y = \mathrm{y}(x)$, $z = \mathrm{z}(x)$ que anule idénticamente el primer miembro de [XXVIII-1], que como expresión lineal homogénea en las diferenciales, se llama *pfaffiano.*

b) *Interpretación geométrica.* — Puede asociarse a [XXVIII-1] un campo planar (§ 111-1, a), pero (a diferencia del campo de una ecuación en derivadas parciales de primer orden) con un solo elemento plano para cada punto. En efecto, [XXVIII-1] expresa que toda curva integral I: $y = \mathrm{y}(x)$, $z = \mathrm{z}(x)$ es en cada punto $\mathrm{M}(x, y, z)$ ortogonal a la curva C de la congruencia característica (§ 110-4, a) de

[XXVIII-3] $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{P}} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{Q}} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{R}}$

que pasa por M. Entonces las curvas integrales de [XXVIII-1] son las que resultan tangentes en cada punto al elemento plano normal a la curva característica de [XXVIII-3] en dicho punto (fig. 388).

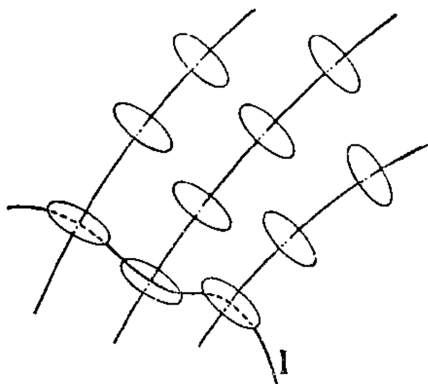


Fig. 388.

En general, en una superficie *arbitraria* S:

[XXVIII-4] $z = \mathrm{f}(x, y)$,

el campo planar de [XXVIII-1] determina un campo de direcciones: para cada punto M de S, la dirección de la intersección de S con el elemento plano en M. Como las líneas de campo de este campo, son soluciones de [XXVIII-1], habrá, en general, un haz de soluciones en cada superficie *arbitraria* [XXVIII-4]. Analíticamente: si con $z = f(x, y)$ se eliminan z y dz de [XXVIII-1], queda una ecuación de primer orden en x é y cuya solución general

[XXVIII-5] $$g(x, y, C) = 0$$

representa en el espacio un haz de cilindros con generatrices paralelas al eje z, que cortan a S según curvas integrales de [XXVIII-1].

c) *Integrabilidad completa.* — Un haz de superficies

[XXVIII-6] $$F(x, y, z) = C \quad ,$$

conduce a la ecuación en diferenciales totales

[XXVIII-7] $$F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = 0 \quad ,$$

que tiene por solución toda curva regular *arbitraria* perteneciente a una superficie del haz *determinado* por [XXVIII-6].

Toda ecuación [XXVIII-1] que pueda obtenerse de este modo se llama *completamente integrable,* llamándose a [XXVIII-6] *solución* o *integral general,* de la que son integrales particulares las funciones $z = z(x, y)$ que convierten [XXVIII-1] en una identidad. La integrabilidad completa equivale a cada una de las tres propiedades siguientes:

1º) Los elementos planos envuelven un haz de superficies;

2º) La congruencia característica de [XXVIII-3] admite un haz ortogonal de superficies (cfr. § 110, ejercicio 11, *b*);

3º) P, Q y R son respectivamente proporcionales a las derivadas parciales de una función de tres variables, es decir, existen dos funciones, la integral general $F(x, y, z)$ y el *factor integrante* $\mu(x, y, z)$ tales que:

[XXVIII-8] $$F_x = \mu P \quad , \quad F_y = \mu Q \quad , \quad F_z = \mu R.$$

Obtendremos de [XXVIII-8] una condición sobre los coeficientes P, Q, R. Se tiene, en efecto:

$$(\mu P)_y = F_{xy} = F_{yx} = (\mu Q)_x \quad ,$$

es decir:

$$\mu(P_y - Q_x) = Q\mu_x - P\mu_y$$

y análogamente

$$\mu(Q_z - R_y) = R\mu_y - Q\mu_z \quad ; \quad \mu(R_x - P_z) = P\mu_z - R\mu_x .$$

Eliminando μ entre estas tres ecuaciones, para lo cual basta multiplicarlas respectivamente por R, P, Q y sumar, se obtiene la condición necesaria para la integrabilidad completa (EULER, 1770):

[XXVIII-9] $$P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) = 0.$$

Probaremos que esta condición es también suficiente, dando a la vez un método de integración de [XXVIII-1] cuando ella se cumple. Si se deja constante una variable, por ejemplo z, la ecuación [XXVIII-1] se reduce a

[XXVIII-10] $$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy = 0 \quad ,$$

donde z entra como parámetro. Si la solución es

[XXVIII-11] $$u(x, y, z) = \alpha = \text{const.},$$

siendo $\varrho(x, y, z)$ un factor integrante de [XXVIII-10], será $u_x = \varrho P$, $u_y = \varrho Q$, pero en general $u_z \neq \varrho R$. Pongamos

$$u_z = \varrho R - S \quad ;$$

se tiene entonces por [XXVIII-9] $\partial(S, u)/\partial(x, y) = 0$, y como esta relación vale para toda función [XXVIII-11] resulta S función de u, *y del parámetro* z.

Por ser $\varrho(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = du + S\,dz$, es [XXVIII-1] equivalente a

$$\text{[XXVIII-12]} \qquad du + S(u, z)\,dz = 0.$$

Si $G(u, z) = C$ es la solución de [XXVIII-12] y ν un factor integrante tendremos

$$\nu(du + S\,dz) = \nu\varrho(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = dG(u, z) = 0 \quad ;$$

y expresando en $G(u, z)$, u en términos de x, y, z resulta

$$F(x, y, z) = C$$

cuya diferencial total del primer miembro es proporcional al primer miembro de [XXVIII-1], con factor integrante $\mu = \nu\varrho$.

Obsérvese que si se cumple la condición [XXVIII-9], *cualquier* curva de las superficies [XXVIII-6] verifica [XXVIII-1], y que dado un punto M, *sólo* los puntos del entorno de M situados sobre la superficie [XXVIII-6] que pasa por M son accesibles mediante una curva solución, *existiendo infinitos puntos del entorno de* M *que no son accesibles desde* M *en esta forma*. En cambio, si no se cumple [XXVIII-9], no existen superficies [XXVIII-6], ni factor integrante μ, y entonces se dice que la ecuación [XXVIII-1] tiene soluciones *impropias* dadas por la intersección del *determinado* haz [XXVIII-5] con la superficie *arbitraria* [XXVIII-4], pudiéndose demostrar que *cualquier punto del entorno de un punto* M *es accesible desde* M *por una solución impropia*. Esta ob-
mica, en particular, a la formulación de su segundo principio según CA-
mica, en particular a la formulación de su segundo principio según CA-
RATHÉODORY (véase k).

EJEMPLOS: 1. $2yz\,dx + xz\,dy + 3xy\,dz = 0$. Se cumple la condición de integrabilidad [XXVIII-9]. Para z constante es $2y\,dx + x\,dy = 0$, e integrando:

$$\text{[XXVIII-13]} \qquad u(x, y, z) = x^2 y = \alpha(z) \quad ,$$

siendo un factor integrante ϱ calculable por $u_x = \varrho P$, de donde $\varrho = x/z$. Entonces

$$S = \varrho R - u_z = (x/z)\,.\,3xy = 3u/z.$$

La ecuación en u y z, $du + 3(u/z)\,dz = 0$ da $uz^3 = C$ con factor integrante $\nu = z^2$, y entonces por [XXVIII-13] es $x^2yz^3 = C$, con factor integrante $\mu = xz^2$ respecto de la ecuación propuesta.

2. $-y\,dx + x\,dy + k\,dz = 0$ con $k \neq 0$ constante, no es completamente integrable, pues el primer miembro de [XXVIII-9] vale $-2k \neq 0$. Directamente, si se busca un factor integrante μ que cumpla [XXVIII-8], es decir,

$$F_x = -\mu y \quad , \quad F_y = \mu x \quad , \quad F_z = \mu k \quad ,$$

las condiciones

$$F_{xy} = F_{yx} \quad , \quad F_{yz} = F_{zy} \quad , \quad F_{zx} = F_{xz}$$

son aquí

$$2\mu = -x\mu_x - y\mu_y \quad , \quad \mu_y = (x/k)\mu_z \quad , \quad \mu_x = -(y/k)\mu_z \quad ,$$

de donde resultaría $\mu(x,y,z) \equiv 0$. Sobre la superficie arbitraria $z = f(x,y)$, las soluciones impropias son las determinadas por el haz de cilindros solución de $(kf_x - y)\,dx + (kf_y + x)\,dy = 0$, curvas ortogonales a la congruencia de hélices

$$x = C_1 \cos \frac{z + C_2}{k} \quad , \quad y = C_1 \operatorname{sen} \frac{z + C_2}{k} \quad ,$$

solución, aquí, del sistema [XXVIII-3].

d) La condición [XXVIII-9] admite una interpretación sencilla, considerando el campo de los vectores V de componentes P, Q, R. Si existe un haz [XXVIII-6] de superficies para las cuales se verifica [XXVIII-1] para todo desplazamiento (dx, dy, dz) sobre una de ellas, es nula la circulación de V sobre toda curva de una tal superficie, y por el teorema de STOKES (§ 92-3), nulo el flujo de rot V sobre un trozo cualquiera de una tal superficie S, y como por [XXVIII-1] es V normal a S, esto equivale a $V \cdot \operatorname{rot} V = 0$, que es [XXVIII-9], mostrando además que ésta es una propiedad intrínseca, invariante respecto de un cambio de coordenadas.

Si $\operatorname{rot} V = 0$, se verifica [XXVIII-9] por anularse los paréntesis, y las superficies [XXVIII-6] son las equipotenciales del campo; pero también *puede* existir un haz de superficies ortogonales a las líneas del campo, sin que éste admita potencial.

En efecto, buscar un factor integrante μ del primer miembro de [XXVIII-1] es buscar un escalar μ tal que μV sea un gradiente, para lo que es necesario y suficiente (§ 91-5, nota) que se cumpla $\operatorname{rot}(\mu V) = 0$, equivalente según [91-37′] a $(\operatorname{grad}\mu) \wedge V + \mu \operatorname{rot} V = 0$, y al multiplicar escalarmente por V se vuelve a encontrar [XXVIII-9].

e) *Forma asimétrica.* — Si $R \neq 0$, es frecuente escribir [XXVIII-1] en la forma [XXVIII-2], es decir $dz = U\,dx + V\,dy$, reduciéndose la condición [XXVIII-9] de integrabilidad completa a:

[XXVIII-14] $$U_y + U_z V = V_x + V_z U.$$

Por ser $dz = p\,dx + q\,dy$, [XXVIII-14] equivale al sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$p = U(x,y,z) \quad , \quad q = V(x,y,z).$$

f) *Método de integración de* MAYER (1872). — El método de integración dado en *c*) exige la integración sucesiva de dos ecuaciones diferenciales [XXVIII-10] y [XXVIII-12] en dos variables. Probaremos ahora el siguiente teorema de MAYER: *Cuando la ecuación en diferenciales totales*

[XXVIII-15] $$dz = U(x,y,z)\,dx + V(x,y,z)\,dy$$

es completamente integrable, su integración depende de la de una sola ecuación diferencial ordinaria con un parámetro arbitrario.

Sea z_0 el valor arbitrario de z en el punto (x_0, y_0), tal que las cuatro derivadas parciales U_x, U_y, V_x, V_y existan y sean continuas en un entorno de (x_0, y_0, z_0). Si la ecuación es completamente integrable, su solución $z = z(x,y)$ quedará completamente determinada por su valor z_0 en (x_0, y_0); entonces el valor de z en (x,y) podrá obtenerse siguiendo la variación de z a partir de su valor inicial z_0, cuando un punto M se mueve en el plano xy *en línea recta* de (x_0, y_0) a (x,y).

Supondremos, para simplificar la escritura $x_0 = y_0 = 0$, es decir, que se elige el origen de coordenadas como punto inicial en el plano xy (para reducir el caso general al precedente basta cambiar x por $x_0 + x$, é y por $y_0 + y$, en la ecuación, lo que equivale a una traslación de ejes en el plano xy).

Sea $y = mx$ la ecuación de la recta que une el origen con el punto

(x, y). En ella es $dy = m\,dx$, y [XXVIII-15] se reduce a la ecuación en dos variables

[XXVIII-16] $$dz = [U_m(x, z) + mV_m(x, z)]dx \quad ,$$

siendo

[XXVIII-17] $$U_m(x, z) = U(x, mx, z) \quad , \quad V_m(x, z) = V(x, mx, z).$$

Bastará integrar [XXVIII-16] para obtener la solución de [XXVIII-15]. En efecto, la solución general de la ecuación en dos variables [XXVIII-16], resuelta en la constante de integración, será de la forma

$$G(x, z, m) = \text{const.},$$

y como para $x = 0$ es $z = z_0$, será

$$G(x, z, m) = G(0, z_0, m).$$

Reemplazando m por y/x resulta de aquí una relación entre x, y, z, es decir, la integral de [XXVIII-15]:

[XXVIII-18] $$G(x, z, y/x) = G(0, z_0, y/x) \quad ,$$

con una constante arbitraria z_0.

EJEMPLOS: 3. La ecuación

$$dz = \frac{-2xz\,dx + yz^2\,dy}{1 + x^2 - y^2z}$$

verifica [XXVIII-14] y es, entonces, completamente integrable. Poniendo $y = mx$, $dy = m\,dx$ resulta la ecuación en dos variables:

$$2xz\,dx + (1 + x^2)\,dz = m^2(xz^2\,dx + x^2z\,dz).$$

Como ambos miembros son diferenciales exactos [de $(1 + x^2)z$ y de $\frac{1}{2}m^2x^2z^2$] la ecuación se resuelve de inmediato, dando

$$(1 + x^2)z - \tfrac{1}{2}m^2x^2z^2 = \text{const.}$$

Llamando z_0 al valor de z para $x = 0$ resulta

$$(1 + x^2)z - \tfrac{1}{2}m^2x^2z^2 = z_0 \quad ,$$

y, finalmente, la solución de la ecuación en diferenciales totales será:

[XXVIII-19] $$(1 + x^2)z - \tfrac{1}{2}y^2z^2 = z_0.$$

Observemos que puesta la ecuación dada en la forma

[XXVIII-20] $$2xz\,dx - yz^2\,dy + (1 + x^2 - y^2z)\,dz = 0$$

cumple no sólo la condición de integrabilidad completa [XXVIII-9] sino también $P_y = Q_x$, $Q_z = R_y$, $R_x = P_z$, por lo que [XXVIII-20] es una ecuación diferencial total exacta (§ 89-3) en tres variables. Calculada la función potencial (§ 89-3) se encuentra el primer miembro de [XXVIII-19] y entonces (§ 101-6) la solución es [XXVIII-19].

4. Para la ecuación completamente integrable del ejemplo 1 no puede tomarse $x_0 = y_0 = 0$, punto excepcional que anula el segundo miembro de [XXVIII-18] (y los tres coeficientes $P = Q = R = 0$ de [XXVIII-1]). Sin embargo, basta tomar $y - y_0 = m(x - x_0)$ para obtener la ecuación en dos variables

$$3x[y_0 + m(x - x_0)]dz + 2z[y_0 + m(x - x_0) + \tfrac{1}{2}mx]dx = 0 \quad ,$$

con factor integrante xz^2, que lleva a la solución

$$x^2z^3[y_0 + m(x - x_0)] = x_0^2\,z_0^3\,y_0 \quad ,$$

es decir, a la $x^2z^3y = x_0^2\,z_0^3\,y_0$, que es la ya vista en el ejemplo 1.

g) *Integrabilidad incompleta.* — Si la ecuación [XXVIII-1] no cumple la condición [XXVIII-9] de integrabilidad completa, no se la podrá verificar por una relación [XXVIII-6] entre x, y, z *con una constante arbitraria,* pero *puede* ocurrir que se la verifique por una relación

[XXVIII-6₀] $$F(x, y, z) = 0$$

sin constante arbitraria. En tal caso, por *c*) deberá cumplirse [XXVIII-9] para todos los puntos (x, y, z) que verifiquen [XXVIII-6₀]. Entonces, cuando exista una tal relación [XXVIII-6₀], debe poder deducirse de [XXVIII-9]. Lo mismo cabe decir de [XXVIII-15] cuando [XXVIII-14] no se cumple *idénticamente.* Si existe una función $z = z(x, y)$ (sin constante arbitraria) para la cual se cumpla [XXVIII-15], será solución de la *ecuación* [XXVIII-14].

EJEMPLO 5. La ecuación

[XXVIII-21] $$dz = z\,dx + xz\,dy$$

no es completamente integrable, pues [XXVIII-14] no se reduce a una identidad sino que da:

[XXVIII-22] $$xz = z + xz.$$

La *ecuación* [XXVIII-22] tiene la solución única $z = 0$ (geométricamente: plano xy), que por verificar [XXVIII-21] es la única superficie integral.

h) *Problema de* PFAFF. — Cuando no se cumple la condición de integrabilidad completa, la ecuación en diferenciales totales *puede* admitir soluciones aisladas, como hemos visto en *g*). Puede probarse que fuera del caso de integrabilidad completa, la ecuación equivale a un *sistema de dos ecuaciones finitas* (no diferenciales) llamado *sistema integral equivalente,* y el problema de determinarlo se conoce con el nombre de *problema de* PFAFF.

Mostremos primero que la ecuación [XXVIII-1] puede llevarse a la llamada *forma canónica*:

[XXVIII-23] $$du + v\,dw = 0$$

con u, v, w, funciones de x, y, z. Los primeros miembros de [XXVIII-1] y [XXVIII-23] serán idénticos si

[XXVIII-24] $$P = u_x + v \,.\, w_x, \quad Q = u_y + v \,.\, w_y, \quad R = u_z + v \,.\, w_z,$$

y en tal caso los coeficientes de [XXVIII-9] serán:

[XXVIII-25] $$\begin{cases} Q_z - R_y = v_z w_y - v_y w_z \;, \\ R_x - P_z = v_x w_z - v_z w_x \;, \\ P_y - Q_x = v_y w_x - v_x w_y \;. \end{cases}$$

Sigue de aquí:

[XXVIII-26] $$\begin{cases} (Q_z - R_y) v_x + (R_x - P_z) v_y + (P_y - Q_x) v_z = 0 \;, \\ (Q_z - R_y) w_x + (R_x - P_z) w_y + (P_y - Q_x) w_z = 0 \;, \end{cases}$$

es decir, v y w son soluciones de *la misma* ecuación en derivadas parciales lineal de primer orden, cuyo sistema adjunto (§ 110-4) es

[XXVIII-27] $$\frac{dx}{Q_z - R_y} = \frac{dy}{R_x - P_z} = \frac{dz}{P_y - Q_x}.$$

Sean $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$, $\psi(x, y, z) = \text{const.}$, dos soluciones independientes de [XXVIII-27]; entonces v y w son funciones de φ y ψ.

Por otra parte, multiplicando la segunda [XXVIII-26] por v, y reem-

plazando vw_x, vw_y, vw_z por los despejados de [XXVIII-24] resulta la ecuación que debe verificar u:

[XXVIII-28] $$(Q_z - R_y)u_x + (R_x - P_z)u_y + (P_y - Q_x)u_z = \\ = P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) \quad ,$$

y como el anularse del segundo miembro es justamente la condición de integrabilidad [XXVIII-9] supuesta no satisfecha, u no satisface a la misma ecuación diferencial que v y w.

Sea ahora w una función cualquiera de φ y Ψ, por ejemplo:

[XXVIII-29] $$w = \varphi \quad ,$$

entonces si entre x, y, z se establece una relación de la forma

[XXVIII-30] $$\varphi(x, y, z) = \alpha \quad , \quad (\alpha \text{ constante}),$$

tal que hace $dw = d\varphi = 0$, al aplicar [XXVIII-24], [XXVIII-1] se reduce a la ecuación diferencial total exacta

[XXVIII-31] $$du = 0.$$

Entonces la relación [XXVIII-30] se usa para expresar cualquier variable, digamos z, y su diferencial dz, en términos de las otras dos variables y sus diferenciales, y reemplazando en la ecuación [XXVIII-1], ésta se transforma en una ecuación diferencial total exacta $d\omega(x, y, \alpha) = 0$; reemplazando α por $\varphi(x, y, z)$ esta ecuación se convierte en $du = 0$. Así se obtiene u, conocidas u y w se calcula v por una cualquiera de las ecuaciones [XXVIII-24], y así se obtiene la forma canónica [XXVIII-23].

Esta ecuación canónica [XXVIII-23] se puede verificar de varias maneras, obteniéndose diversos sistemas equivalentes; por ejemplo:

[XXVIII-32] $$u = \text{const.}, \qquad w = \text{const.};$$

[XXVIII-33] $$u = \text{const.}, \qquad v = 0;$$

[XXVIII-34] $$\varrho(u, w) = 0, \qquad v\varrho_u - \varrho_w = 0,$$
$$[\varrho = \varrho(u, w) \text{ función arbitraria}].$$

Este último [XXVIII-34] incluye [XXVIII-33] pero no [XXVIII-32].

Ejemplo 6. En la ecuación $z\,dx + x\,dy + y\,dz = 0$ es $P = z$, $Q = x$, $R = y$, de donde: $Q_z - R_y = R_x - P_z = P_y - Q_x = -1$ y no se cumple la condición de integrabilidad completa, pues el primer miembro de [XXVIII-9] se reduce a $-z - x - y$.

El sistema [XXVIII-27] es ahora $dx = dy = dz$; como una solución del mismo puede tomarse $\varphi(x, y, z) \equiv z - y = \alpha$, ($\alpha$ constante).

Poniendo $w = \varphi$ y eliminando z y dz de la ecuación dada se obtiene

$$(y + \alpha)dx + (x + y)dy = 0.$$

La solución de esta ecuación diferencial total exacta es

$$\omega \equiv \tfrac{1}{2}y^2 + x(y + \alpha) = \text{const.}$$

Reemplazando en ω, α por $z - y$ resulta u:

$$u = \tfrac{1}{2}y^2 + xz \quad ,$$

y de la tercera [XXVIII-24] resulta: $v = y - x$.

De la forma canónica:

$$du + v\,dw \equiv d(\tfrac{1}{2}y^2 + xz) + (y - x)d(z - y) = 0$$

resultan los sistemas integrales equivalentes:

$$\begin{cases} \tfrac{1}{2}y^2 + xz = \text{const.} \\ z - y = \text{const.} \end{cases} ; \qquad \begin{cases} \tfrac{1}{2}y^2 + xz = \text{const.} \\ y - x = 0. \end{cases}$$

i) Es fácil ver que si [XXVIII-1] es completamente integrable, las curvas de la congruencia definida por el sistema [XXVIII-27] están sobre superficies integrales. Pues son "*curvas integrales*", es decir, verifican la ecuación [XXVIII-1], pues al reemplazar en ella numeradores por denominadores de [XXVIII-27] se anula el primer miembro por la condición de integrabilidad [XXVIII-9]. Con la interpretación dada en *d*), [XXVIII-27] da las líneas de campo de rot V y el resultado anterior es evidente pues por [XXVIII-9] es V perpendicular a rot V.

j) Para el caso general de la ecuación de PFAFF en n variables

[XXVIII-35] $$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n = 0 \quad ,$$

donde las X_i son funciones de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se dirá que [XXVIII-35] es *completamente integrable* si existe una integral general de la forma

[XXVIII-36] $$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C \quad ,$$

y entonces deberá también existir un factor integrante μ tal que

[XXVIII-37] $$\partial F/\partial x_i = \mu X_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Aplicando las condiciones

$$\partial^2 F/\partial x_j \partial x_k = \partial^2 F/\partial x_k \partial x_j \quad ,$$

resultan como condiciones necesarias y suficientes para que [XXVIII-35] sea completamente integrable, las $\binom{n}{3}$ identidades

[XXVIII-38] $$X_i\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\right) + X_j\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) + X_k\left(\frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right) \equiv 0 \quad ,$$

para tres índices i, j, k cualesquiera tomados entre los 1, 2, ..., n. Sólo $\binom{n-1}{2}$ de las $\binom{n}{3}$ identidades [XXVIII-38] son independientes entre sí.

En el caso de integrabilidad completa, la obtención de [XXVIII-36] se efectúa en forma análoga a la vista en *c*). Se integra [XXVIII-35] como si todas las variables menos dos fueran constantes, reemplazando la constante de integración por una función arbitraria de las variables que se han supuesto constantes. La ecuación así obtenida se diferencia respecto de todas las variables y las condiciones necesarias para hacer coincidir el resultado con la ecuación dada, sirven para determinar la función arbitraria introducida y con ella la integral general [XXVIII-36].

EJEMPLO 7. Para la ecuación

$$(2x + y^2 + 2xt - z)\,dx + 2xy\,dy - x\,dz + x^2\,dt = 0 \quad ,$$

se cumplen las 4 condiciones [XXVIII-38] de las que hay sólo 3 independientes. Suponiendo x é y constantes, se obtiene la integral

$$-xz + x^2t = \alpha(x, y) \quad ,$$

cuya diferencial total

$$(-z + 2xt)\,dx - x\,dz + x^2\,dt - d\alpha = 0$$

si se hace coincidir con la ecuación dada, muestra que debe ser

$$-d\alpha = (2x + y^2)\,dx + 2xy\,dy.$$

Así, en lugar de una ecuación en 4 diferenciales, se ha de resolver una en 3 diferenciales: dx, dy, $d\alpha$, a la que se vuelve a aplicar el mismo método. Supuesta x constante, la integral $xy^2 + \alpha = \beta(x)$, diferenciada:

$$y^2\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}\alpha - \mathrm{d}\beta = 0 \quad , \quad \mathrm{d}a \qquad - \mathrm{d}\beta = 2x\,\mathrm{d}x \quad ,$$

es decir, $x^2 = -\beta + C$ y por tanto, $xy^2 + \alpha = x^2 + C$, para llegar a la integral general

$$x^3 + xy^2 - xz + x^2 t = C.$$

k) Al estudiar el equilibrio del estado térmico entre las distintas partes de un sistema aislado adiabáticamente del exterior y expresar que es nulo el incremento total de la cantidad de calor añadida, se llega a una ecuación diferencial de Pfaff, cuya integrabilidad completa depende de la existencia del factor integrante, lo que se supone ocurre (cfr. *e*) en virtud del segundo principio de la termodinámica que en la forma de C. Carathéodory dice:

En cualquier entorno de todo estado de un sistema aislado adiabáticamente, existen siempre estados próximos no alcanzables desde él.

Este segundo principio, así formulado, es de verificación experimental inmediata; por ejemplo, si se considera un gas a presión y volumen dados inicialmente, puede ser sometido adiabáticamente a compresión o expansión, pero el estado final del sistema no puede escogerse arbitrariamente; en el entorno del estado inicial existen como no accesibles todos aquellos no situados sobre la adiabática que pasa por el estado inicial.

El factor integrante puede escogerse de modo que coincida con el valor recíproco de la llamada ***temperatura absoluta*** (o ***termodinámica*** o de Kelvin) y convierta el incremento de calor en una diferencial exacta de la función termodinámica llamada ***entropía***, cuya importancia radica en que es una función de estado, independiente del proceso seguido para llegar a él, lo que no ocurre para la cantidad de calor (cfr. § 101-7, ejemplo 4).

II. Transformaciones de contacto. — *a*) La ecuación general en derivadas parciales de primer orden

[XXVIII-39] $$f(x, y, z, p, q) = 0$$

puede concebirse como una relación entre las 5 variables x, y, z, p, q, si se prescinde de la particular significación [110-1] de p y q respecto de una superficie integral de [XXVIII-39].

Consideremos una transformación unívoca invertible, es decir biunívoca, dada por

[XXVIII-40] $$\begin{cases} x = f_1(X, Y, Z, P, Q), \\ y = f_2(X, Y, Z, P, Q), \\ z = f_3(X, Y, Z, P, Q), \\ p = f_4(X, Y, Z, P, Q), \\ q = f_5(X, Y, Z, P, Q), \end{cases}$$

y su inversa

[XXVIII-41] $$\begin{cases} X = \varphi_1(x, y, z, p, q), \\ Y = \varphi_2(x, y, z, p, q), \\ Z = \varphi_3(x, y, z. p, q), \\ P = \varphi_4(x, y, z, p, q), \\ Q = \varphi_5(x, y, z, p, q), \end{cases}$$

tal que transforme [XXVIII-39] en

[XXVIII-42] $$F(X, Y, Z, P, Q) = 0.$$

Diremos que los elementos planos (§ 111-1) dados por funciones derivables de dos parámetros λ y μ:

[XXVIII-43] $$\begin{cases} x = \mathrm{x}(\lambda, \mu), \\ y = \mathrm{y}(\lambda, \mu), \\ z = \mathrm{z}(\lambda, \mu), \\ p = \mathrm{p}(\lambda, \mu), \\ q = \mathrm{q}(\lambda, \mu) \end{cases}$$

forman una *multiplicidad de* LIE *de dos dimensiones*, si verifican idénticamente la *ecuación de* PFAFF:

[XXVIII-44] $$dz - p\,dx - q\,dy = 0 \quad ,$$

equivalente al cumplimiento simultáneo de [111-58] y [111-59].

El conjunto de puntos (x, y, z) dado por las tres primeras ecuaciones [XXVIII-43] forma el *sostén puntual* de la multiplicidad. Si el sostén degenera en una curva, el cumplimiento de [XXVIII-44] significa que la multiplicidad [XXVIII-43] está formada por los ∞^2 planos tangentes a la curva, dando así un concepto más amplio que el de franja (§ 111-4).

Se llama *solución generalizada de* LIE de la ecuación [XXVIII-39] a una multiplicidad de LIE de dos dimensiones que verifique idénticamente dicha ecuación. Caso particular es el de una superficie integral con sus planos tangentes (§ 111-6), pero, por ejemplo, en el caso de ecuación lineal [110-9], la multiplicidad de LIE definida por una curva característica y sus ∞^2 planos tangentes forman una solución generalizada de LIE sin que constituyan "superficie". Desde este punto de vista, una ecuación $f(x, y, z) = 0$ de una superficie S es caso particular de [XXVIII-39] y admite como solución no tan sólo la multiplicidad formada por los elementos planos tangentes a la superficie S, sino también cada multiplicidad formada por la radiación plana cuyo vértice sea un punto de S.

Si sustituimos [XXVIII-43] en [XXVIII-41], el conjunto planar transformado

[XXVIII-45] $$\begin{cases} X = \varphi_1[x(\lambda, \mu), \ldots] = X(\lambda, \mu), \\ Y = Y(\lambda, \mu), \\ Z = Z(\lambda, \mu), \\ P = P(\lambda, \mu), \\ Q = Q(\lambda, \mu) \end{cases}$$

será solución generalizada de LIE de [XXVIII-42] cuando y sólo cuando formen multiplicidad de LIE, es decir, si cumplen idénticamente

[XXVIII-46] $$dZ - P\,dX - Q\,dY = 0.$$

Toda transformación T tal que [XXVIII-46] se d e d u z c a de [XXVIII-44] y recíprocamente, transforma toda s o l u c i ó n de LIE de [XXVIII-39] en solución de [XXVIII-42] y recíprocamente. De ahí la importancia de la siguiente definición:

DEF. *Una transformación biunívoca* T *dada por* [XXVIII-41] *y su inversa* [XXVIII-40] *se llama transformación de contacto, si se cumple idénticamente en las variables independientes* x, y, z, p, q:

[XXVIII-47] $$dZ - P\,dX - Q\,dY = \varrho\,.(dz - p\,dx - q\,dy),$$

donde (excepto en puntos aislados) no es nula la función arbitraria

$$\varrho = \varrho(x, y, z, p, q) \neq 0.$$

El conocimiento de las posibles transformaciones de contacto permite referir la integración de [XXVIII-39] a la de [XXVIII-42], aunque puede ocurrir que una superficie integral se transforme en solución generalizada; por ello se ha introducido este último concepto, para así obtener mediante las transformaciones de contacto todas las soluciones de la ecuación propuesta [XXVIII-39].

b) Igualando coeficientes en dx, dy, dz, dp, dq, la [XXVIII-47] equivale a cinco ecuaciones finitas, de las que mediante los símbolos

[XXVIII-48] $$\frac{\overline{d}}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot p \quad , \quad \frac{\overline{d}}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot q$$

se deducen

[XXVIII-49] $$\frac{\overline{d}Z}{dx} = P\,\frac{\overline{d}X}{dx} + Q\,\frac{\overline{d}Y}{dx} \quad , \quad \frac{\overline{d}Z}{dy} = P\,\frac{\overline{d}X}{dy} + Q\,\frac{\overline{d}Y}{dy} \;.$$

Estas pueden servir para determinar P y Q mediante las X, Y, Z; tal en el caso de transformación puntual dada por las tres primeras [XXVIII-41] dependientes sólo de x, y, z. Así resulta (cfr. teor. 1) que una transformación biunívoca puntual dada mediante funciones derivables es caso muy particular de una transformación de contacto.

Recordando el símbolo [111-97], llamado *corchete de* POISSON, que por [XXVIII-48] puede escribirse

$$[XXVIII\text{-}50] \quad [f,g] = f_p \frac{\bar{d}g}{dx} - g_p \frac{\bar{d}f}{dx} + f_q \frac{\bar{d}g}{dy} - g_q \frac{\bar{d}f}{dy},$$

para una función derivable cualquiera $V(x,y,z,p,q)$ y X, Y, Z, P, Q correspondientes a una transformación de contacto, se demuestra fácilmente que es:

$$[XXVIII\text{-}51] \quad [V,Z] = P \cdot [V,X] + Q \cdot [V,Y].$$

Para funciones derivables cualesquiera f, g, h de x, y, z, p, q, mediante un engorroso cálculo, se prueban las identidades:

$$[XXVIII\text{-}52] \quad [[f,g],h] + [[g,h],f] + [[h,f],g] = h_z \cdot [g,f] + g_z \cdot [f,h] + f_z \cdot [h,g],$$

$$[XXVIII\text{-}53] \quad [fg,h] = f \cdot [g,h] + g \cdot [f,h],$$

que sirven para demostrar el siguiente teorema:

TEOR. 1. *En toda transformación de contacto se cumplen las relaciones características*:

$$[XXVIII\text{-}54] \quad \begin{cases} [X,Y] = [Y,Z] = [Z,X] = [P,Q] = \\ \quad = [P,Y] = [Q,X] = 0 \\ [P,X] = [Q,Y] = \varrho, \quad [P,Z] = \varrho P, \quad [Q,Z] = \varrho Q. \end{cases}$$

Recíprocamente, es suficiente que tres funciones X, Y, Z *distintas* (§ 68-3, nota 1) *de x, y, z, p, q estén dos a dos en involución* (§ 111-7), *es decir, cumplan*

$$[XXVIII\text{-}55] \quad [X,Y] = [Y,Z] = [Z,X] = 0,$$

para que resulten unívocamente determinadas funciones P, Q *que junto con las tres dadas constituyan una transformación de contacto, es decir, se cumpla* [XXVIII-47] *con* $\varrho \neq 0$.

El teorema recíproco se simplifica en el interesante caso particular de que X, Y, P, Q no dependan de z. Entonces, se demuestra muy fácilmente que en [XXVIII-47] ϱ es constante (pudiéndosela tomar igual a la unidad) y que $U = z - Z$ tampoco depende de z. También se simplifica el corchete [XXVIII-50] si f, g no dependen de z, convirtiéndose en el llamado *paréntesis de* POISSON

$$[XXVIII\text{-}56] \quad (f,g) = f_p g_x - g_p f_x + f_q g_y - g_q f_y.$$

Y el dicho teorema recíproco se convierte en:

TEOR. 2. *Si se dan dos funciones* X, Y *distintas* (§ 68-3, nota 1) *de x, y, p, q que estén en involución, es decir cumplan* $(X,Y) = 0$, *entonces pueden determinarse unívocamente otras tres funciones* U, P, Q *de x, y, p, q para las que sea*

$$[XXVIII\text{-}57] \quad dU + P\,dX + Q\,dY = p\,dx + q\,dy,$$

cumpliéndose las relaciones

$$[XXVIII\text{-}58] \quad \begin{cases} (X,Y) = (P,Q) = (P,Y) = (Q,X) = 0, \\ (P,X) = (Q,Y) = 1; \\ [z-U,X] = [z-U,Y] = 0, \\ [P,z-U] = P, \quad [Q,z-U] = Q. \end{cases}$$

Supuesto $\partial(X, Y)/\partial(p, q) \neq 0$, pueden despejarse de $X = c_1$, $Y = c_2$ las $p = \varphi(x, y; c_1, c_2)$, $q = \Psi(x, y; c_1, c_2)$ con $\varphi_y = \Psi_x$, al ser $(X, Y) = 0$, es decir $(p - \varphi, q - \Psi) = 0$. Entonces $\varphi\, dx + \Psi\, dy$ es una diferencial total, dz, de una función $z = \Phi(x, y; c_1, c_2)$. Basta tomar $U(x, y, p, q) = \Phi(x, y; X, Y)$ para determinar P y Q por [XXVIII-49], es decir por

$$p - U_x = P \cdot X_x + Q \cdot Y_x \quad , \quad q - U_y = P \cdot X_y + Q \cdot Y_y \quad ,$$

de modo que se cumpla [XXVIII-57].

c) Aplicación a la resolución de la ecuación de primer orden. — c_1) Para resolver la ecuación [XXVIII-39], se busca una transformación de contacto [XXVIII-41], donde sea $Z = f$. Para aplicar el teorema 1 se han de encontrar dos funciones X, Y que cumplan [XXVIII-55] (lo que suele ser muy difícil) y entonces

[XXVIII-59] $$Z = 0 \quad , \quad X = \alpha \quad , \quad Y = \beta$$

dan una integral completa de [XXVIII-39] (cfr. § 111-8, *a*).

c_2) Si el primer miembro f de la ecuación [XXVIII-39] no depende de z, la cuestión se simplifica al poder aplicarse el teorema 2. Se toma, entonces, $X = f$ y se busca una función $Y(x, y, p, q)$ en involución con X, es decir, cumpliendo $(X, Y) = 0$. De $X = 0$, $Y = \alpha$ se obtiene $p = \varphi(x, y, \alpha)$, $q = \psi(x, y, \alpha)$ con $\varphi_y = \psi_x$ y por una cuadratura se deduce $z = U(x, y, p, q) + \beta$ tal que para $X = 0$, $Y = \alpha$ se cumpla $dz = p\, dx + q\, dy$. Entonces

[XXVIII-60] $$X = 0 \quad , \quad Y = \alpha \quad , \quad z - U = \beta$$

da una integral completa de $f(x, y, p, q) = 0$.

c_3) Conociendo muchas transformaciones de contacto puede intentarse aplicar el siguiente método general. Supongamos puedan darse tres funciones X, Y, Z de x, y, z, p, q en involución dos a dos, que determinen además la función f, de modo que

[XXVIII-61] $$f(x, y, z, p, q) = F(X, Y, Z).$$

Entonces, por el teorema 1 quedan determinadas las funciones P, Q que junto con las X, Y, Z dan una transformación de contacto que reduce la solución de [XXVIII-39] a la de

[XXVIII-62] $$F(X, Y, Z) = 0 \quad ,$$

con solución de LIE, *cumpliendo* [XXVIII-46]. De ésta y

$$F_X\, dX + F_Y\, dY + F_Z\, dZ = 0$$

se deduce

$$(F_X + P \cdot F_Z)\, dX + (F_Y + Q \cdot F_Z)\, dY = 0 \quad ,$$

y por tanto el sistema

[XXVIII-63] $$X = \alpha \quad , \quad Y = \beta \quad , \quad F = 0$$

da una integral completa de [XXVIII-62] que por el método de § 111-3, *b* origina la integral general. En efecto, recordemos que la relación arbitraria [111-19], es decir,

[XXVIII-64] $$\Phi(X, Y) = 0,$$

da [111-21], es decir,

[XXVIII-65] $$(F_X + P \cdot F_Z)\Phi_Y - (F_Y + Q \cdot F_Z)\Phi_X = 0.$$

Las [XXVIII-62], [XXVIII-64], [XXVIII-65] definen la integral general buscada.

Si, finalmente, las ecuaciones

[XXVIII-66] $$F = 0 \quad , \quad F_X + P \cdot F_Z = 0 \quad , \quad F_Y + Q \cdot F_Z = 0$$

determinan aún una multiplicidad, ésta acaso sea la integral singular, pues las [XXVIII-66] son equivalentes a las [111-31], (§ 111-3, nota 5).

d) *Ejemplos de transformaciones de contacto.* — Dada una transformación de contacto [XXVIII-41], es muy fácil ver que también son transformaciones de contacto, bien

[XXVIII-67] $\quad P, \quad Y, \quad Z - PX, \quad -X, \quad Q,$

o bien

[XXVIII-68] $\quad X, \quad X + Y, \quad Z, \quad P - Q, \quad Q.$

Así, de la identidad $X = x$, $Y = y$, $Z = z$, $P = p$, $Q = q$, por [XXVIII-67] se obtiene la *transformación de* LEGENDRE:

[XXVIII-69]
$$\begin{cases} X = p, \quad Y = q, \quad Z = z - px - qy, \\ P = -x, \quad Q = -y, \quad \text{con} \quad \varrho = 1. \end{cases}$$

Esta transformación hace corresponder a una ecuación de CLAIRAUT (§ 111-8, ejemplo 3) $\Phi(p, q, z - px - qy) = 0$ la ecuación $\Phi(X, Y, Z) = 0$ y recíprocamente. Antes hemos dicho (*a*) que la solución de LIE de $\Phi(X, Y, Z) = 0$ está constituída por los elementos planos tangentes a la superficie que define esta ecuación y por las radiaciones planas cuyos vértices son los puntos de esta superficie; la transformación [XXVIII-69] les hace corresponder la integral singular de la ecuación de CLAIRAUT y sus planos tangentes, respectivamente.

La transformación de LEGENDRE [XXVIII-69] es caso particular de la *transformación por polares recíprocas*:

[XXVIII-70]
$$\begin{cases} X = \varphi_1(p, q, z - px - qy), \\ Y = \varphi_2(p, q, z - px - qy), \\ Z = \varphi_3(p, q, z - px - qy), \\ P = \varphi_4(x, y, z), \\ Q = \varphi_5(x, y, z), \end{cases}$$

donde las funciones φ_i son fracciones racionales de términos de primer grado en las variables indicadas. Así, si se parte del paraboloide $x^2 + y^2 - 2z = 0$, su forma polar $xX + yY - z - Z = 0$ da $X = p$, $Y = q$, $P = x$, $Q = y$, y por tanto $Z = px + qy - z$, ligera variante de la transformación de LEGENDRE [XXVIII-69], correspondiendo al paraboloide, la solución singular de la ecuación de CLAIRAUT $P^2 + Q^2 - 2(PX + QY - Z) = 0$ (cfr. § 111-6, ejemplo 1).

Otras transformaciones de contacto son

[XXVIII-71]
$$\begin{cases} X = x + \dfrac{ap}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad , \quad Y = y + \dfrac{aq}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad , \\ Z = z - \dfrac{a}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad , \\ P = p \quad , \quad Q = q \quad \text{con} \quad \varrho = 1 \quad ; \end{cases}$$

[XXVIII-72]
$$\begin{cases} X = zp - x \quad , \quad Y = zq - y \quad , \quad Z = z\sqrt{p^2 + q^2 - 1} \quad , \\ P = p/\sqrt{p^2 + q^2 - 1} \quad , \quad Q = q/\sqrt{p^2 + q^2 - 1} \quad , \\ \text{con} \quad \varrho = -1/\sqrt{p^2 + q^2 - 1}. \end{cases}$$

Si [XXVIII-41] es una transformación de contacto, también lo es X, Y, $g(Z)$, $P \cdot g'(Z)$, $Q \cdot g'(Z)$, donde la función arbitraria g es tal que $g'(Z) \neq 0$.

Cuando $df_3 = p\,df_1 + q\,df_2$, entonces, es una transformación de contacto

[XXVIII-73] $$\begin{cases} X = x + f_1(p,q), & Y = y + f_2(p,q), \\ Z = z + f_3(p,q), & P = p, \quad Q = q \quad \text{con} \quad \varrho = 1. \end{cases}$$

e) Clasificación de las transformaciones de contacto. — En general, será posible eliminar p y q entre las tres primeras ecuaciones [XXVIII-41] de una transformación de contacto, para obtener *una sola relación generatriz*:

[XXVIII-74] $$F(x, y, z, X, Y, Z) = 0.$$

Ésta hace corresponder, en general, a un punto (x_0, y_0, z_0) una superficie $F(x_0, y_0, z_0, X, Y, Z) = 0$.

Si la eliminación de p y q entre las [XXVIII-41] da lugar a *dos relaciones generatrices*

[XXVIII-75] $$F(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \qquad G(x, y, z, X, Y, Z) = 0,$$

a un punto del espacio (x, y, z) corresponderá, en general, una curva del espacio (X, Y, Z).

Si, finalmente, la eliminación de p y q entre las [XXVIII-41] da lugar a *tres relaciones generatrices*

[XXVIII-76] $$F(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \qquad G = 0, \qquad H = 0,$$

quedarán, en general, definidas X, Y, Z como funciones de x, y, z y tendremos una transformación puntual como caso particular de una transformación de contacto.

Veamos cómo, con ciertas restricciones, pueden deducirse de las relaciones generatrices dadas arbitrariamente, las ecuaciones [XXVIII-41] de la transformación de contacto de cada una de las tres especies fundamentales anteriores.

e_1) Diferenciando totalmente [XXVIII-74] se obtiene la relación [XXVIII-47] que caracteriza una transformación de contacto, si se hace

[XXVIII-77] $$\begin{cases} P = -F_X/F_Z \ , \quad Q = -F_Y/F_Z \ , \quad \varrho = -F_z/F_Z \ , \\ p = -F_x/(F_zF_Z) \ , \quad q = -F_y/(F_z/F_Z). \end{cases}$$

De estas dos últimas y $F = 0$ pueden determinarse X, Y, Z como funciones de x, y, z, p, q, para sustituir en las dos primeras [XXVIII-77] y completar así las ecuaciones [XXVIII-41] de la transformación de contacto. Teniendo en cuenta los teoremas de existencia de las funciones implícitas (§ 68-2) resultará:

TEOR. 3. *Dada una relación* [XXVIII-74] *tal que* F_z, F_Z *y el determinante funcional* $\partial(F, F_x, F_y)/\partial(X, Y, Z)$ *sean distintos de cero, queda entonces definida unívocamente, a partir de valores iniciales dados, una transformación de contacto* [XXVIII-41], *para la que* [XXVIII-74] *se verifica idénticamente.*

e_2) Dadas dos relaciones distintas [XXVIII-75] respecto de x, y, es decir, con $\partial(F, G)/\partial(x, y) \neq 0$, si se diferencian totalmente, debe deducirse [XXVIII-47] como combinación lineal de $dF = 0$, $dG = 0$, para poderse obtener una transformación de contacto [XXVIII-41] que verifique idénticamente las [XXVIII-75]. Así, deben existir coeficientes λ_1, λ_2 no simultáneamente nulos tales que

[XXVIII-78] $$\begin{cases} \lambda_1 F_Z + \lambda_2 G_Z = 1 \ , \\ \lambda_1 F_z + \lambda_2 G_z = -\varrho \ , \\ \lambda_1 F_X + \lambda_2 G_X = -P \ , \\ \lambda_1 F_x + \lambda_2 G_x = \varrho p \ , \\ \lambda_1 F_Y + \lambda_2 G_Y = -Q \ , \\ \lambda_1 F_y + \lambda_2 G_y = \varrho q \ . \end{cases}$$

De las tres últimas se deduce

[XXVIII-79] $$\begin{cases} \lambda_1(F_x + pF_z) + \lambda_2(G_x + pG_z) = 0 \quad , \\ \lambda_1(F_y + qF_z) + \lambda_2(G_y + qG_z) = 0 \end{cases}$$

y por tanto debe ser nulo

[XXVIII-80] $$\Delta = \begin{vmatrix} F_x + pF_z & G_x + pG_z \\ F_y + qF_z & G_y + qG_z \end{vmatrix} = 0.$$

De ésta y las dos relaciones generatrices $F = G = 0$ pueden deducirse X, Y, Z como funciones de x, y, z, p, q, dando las [XXVIII-79] y la primera [XXVIII-78] a λ_1 y λ_2 que permiten, mediante la segunda y tercera [XXVIII-78], completar las ecuaciones [XXVIII-41] de la transformación de contacto. Teniendo en cuenta los teoremas de existencia de las funciones implícitas (§ 68-2) y que debe ser $\varrho \neq 0$, resulta:

TEOR. 4. *Dadas dos relaciones* [XXVIII-75] *tales que no se anulen simultáneamente* F_Z, G_Z, *y además sea*

$$\partial(F, G)/\partial(x, y) \neq 0 \quad , \quad \partial(F, G, \Delta)/\partial(X, Y, Z) \neq 0 \quad ,$$

donde Δ *viene dado por* [XXVIII-80], *queda entonces definida unívocamente a partir de valores iniciales dados, una transformación de contacto* [XXVIII-41], *para la que las* [XXVIII-75] *se verifican idénticamente.*

Ejemplo interesante es el de la *transformación de* AMPÈRE que parte de las dos relaciones generatrices

[XXVIII-81] $$X = x \quad , \quad Z + z - yY = 0 \quad ,$$

obteniéndose por el procedimiento explicado, la transformación de contacto

[XXVIII-82] $$X = x, \quad Y = q, \quad Z = yq - z, \quad P = -p, \quad Q = y,$$

con $\lambda_1 = p$, $\lambda_2 = 1$, $\varrho = -1$.

e_3) Dadas las tres relaciones [XXVIII-76] tales que

$$\partial(F, G, H)/\partial(X, Y, Z) \neq 0 \quad ,$$

a partir de valores iniciales dados, se determinan X, Y, Z como funciones de x, y, z, cumpliendo por tanto [XXVIII-55] al no depender de p y q, y mediante [XXVIII-49] acaban de determinarse P y Q, dando así unívocamente una transformación de contacto (b, teor. 1).

En resumen, por elección de relaciones generatrices arbitrarias, pueden formarse transformaciones de contacto cualesquiera de cada una de las tres especies establecidas.

III. **Sistemas de ecuaciones en derivadas parciales.** — a) ***Reducción del sistema.*** — En su sentido más general un tal sistema es un conjunto finito de ecuaciones $\Psi_r = 0$, donde Ψ_r es función de n variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de k funciones incógnitas $z_1, z_2, \ldots, z_k$ de esas x y de las derivadas parciales de las z hasta un cierto orden.

Pero así como en el caso de ecuaciones finitas (§§ 67 y 68) o en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias (§§ 105 y 109), el número de ecuaciones del sistema tenía que ser "en general" igual al número de funciones incógnitas, aquí, en cambio, hay, a priori, completa independencia entre ambos números. Más aun, aumentando el número de ecuaciones, *puede siempre suponerse que la función incógnita es única.* En efecto, introduciendo k nuevas variables independientes $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$, basta definir

[XXVIII-83] $$Z = x_{n+1} z_1 + x_{n+2} z_2 + \ldots + x_{n+k} z_k \quad ,$$

sustituir en el sistema dado z_i por $\partial Z/\partial x_{n+i}$, $(i=1,2,\ldots,k)$ y agregar las $\binom{k+1}{2}$ nuevas ecuaciones

[XXVIII-84] $$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_{n+i}\,\partial x_{n+j}} = 0 \quad , \quad (i,j=1,2,\ldots,k) \quad ,$$

para que determinar Z en el nuevo sistema sea, entonces, equivalente a determinar las k funciones z_i en el primitivo.

Por otra parte, aquí también (cfr. § 105-2) *es siempre posible reducir un sistema de ecuaciones en derivadas parciales a otro de primer orden que sea lineal en las derivadas.* Basta para ello introducir como nuevas funciones incógnitas las derivadas de las z, designando

$$p_{i,s} = \partial z_i/\partial x_s \quad , \quad p_{i,s,t} = \partial^2 z_i/\partial x_s\,\partial x_t \quad , \quad \text{etc.},$$

tener en cuenta la conmutabilidad de la derivación (§ 69-2):

[XXVIII-85] $$\frac{\partial p_{i,s}}{\partial x_t} = \frac{\partial p_{i,t}}{\partial x_s} \quad ,$$

$$\frac{\partial p_{i,s,t}}{\partial x_u} = \frac{\partial p_{i,t,u}}{\partial x_s} = \frac{\partial p_{i,u,s}}{\partial x_t} \quad , \quad \text{etc.},$$

y considerar las ecuaciones lineales en las derivadas obtenidas al derivar "parcialmente" las $\Psi=0$ respecto de cada variable independiente x_s, *en relación a las demás variables independientes* (§ 67-2, nota), obteniéndose

[XXVIII-86] $$0 = \left(\frac{\partial \Psi_r}{\partial x_s}\right)_x = \frac{\partial \Psi_r}{\partial x_s} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_s} + \cdots +$$
$$+ \frac{\partial \Psi_r}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial x_s} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial p_{1,1}}\frac{\partial p_{1,1}}{\partial x_s} + \cdots \quad ,$$

donde puede aún sustituirse

$$\partial z_1/\partial x_s = p_{1,s}, \ \ldots, \partial z_k/\partial x_s = p_{k,s} \quad , \quad \partial p_{1,1}/\partial x_s = p_{1,1,s}, \ \ldots$$

subsistiendo sólo las derivadas respecto de x_s de las últimas p. Véase como ejemplo § 112-1, nota 3. Las soluciones del sistema [XXVIII-85], [XXVIII-86] conservan constantes a las Ψ_r y si se eligen los valores iniciales x^0_s, z^0_i, $p^0_{i,s}$, $p^0_{i,s,t}$, ..., de modo que las Ψ_r sean nulas, así se conservarán, y por tanto, mediante las soluciones del sistema lineal [XXVIII-85], [XXVIII-86] se obtienen todas las soluciones del sistema primitivo.

Si se efectúa la reducción que se acaba de explicar y después se efectúa la reducción [XXVIII-83] a una sola función incógnita Z, quedará también demostrado que: *Todo sistema de ecuaciones en derivadas parciales puede siempre reducirse a un sistema de segundo orden con una sola función incógnita, lineal en las derivadas segundas* (aunque acaso no lo sea en las derivadas primeras).

b) *Sistemas de ecuaciones de primer orden con una sola función incógnita.* — b_1) Designemos por p_i la derivada parcial de la función incógnita z respecto de x_i, $(i=1,2,\ldots,n)$. Basta estudiar sistemas de ecuaciones de la forma

[XXVIII-87] $$f_r(x_1,\ldots,x_n,\,p_1,\ldots,p_n) = 0, \quad (r=1,2,\ldots,m),$$

que no contengan la función incógnita z. En efecto, si se tienen las ecuaciones $\Psi_r(x_1,\ldots,x_n,z,p_1,\ldots,p_n)=0$, puede buscarse la solución en forma implícita $Z(x_1,\ldots,x_n,z)=0$, y siendo $(\partial Z/\partial x_s)+p_s(\partial Z/\partial z)=0$, la Z será solución del sistema

$$\Psi_r\left(x_1,\ldots,x_n,z,-\frac{\partial Z/\partial x_1}{\partial Z/\partial z},\ \ldots,-\frac{\partial Z/\partial x_n}{\partial Z/\partial z}\right) = 0 \quad ,$$

que no contiene Z.

Supondremos, además, que en el sistema [XXVIII-87] las f_r tienen derivadas parciales segundas continuas y que son distintas (§ 68-3, nota 1) respecto de las p.

b_2) La condición de conmutabilidad en la derivación (§ 69-2) toma ahora una importancia esencial, pues al aparecer ahora derivadas parciales mixtas, calculadas por diferentes conductos, deberá afirmarse su igualdad, no como consecuencia algebraica de las ecuaciones dadas, sino por el teorema dicho de conmutabilidad. Las nuevas ecuaciones que así se presenten se llaman *consecuencias diferenciales* del sistema dado. El ejemplo más sencillo lo proporciona el estudio de las condiciones de integrabilidad de una diferencial total (nota I).

Las consecuencias diferenciales del sistema dado se formulan mediante los corchetes o paréntesis de POISSON (nota II, b) como nuevas ecuaciones también de primer orden, para así llegar a un sistema *en involución* (porque los primeros miembros de cada dos ecuaciones estarán en involución, § 111-7), si antes el sistema no se ha demostrado incompatible o se ha encontrado directamente una solución. Nuestro objetivo *aún en el caso* de que el sistema conste *de una sola ecuación en derivadas parciales*, es aplicar el siguiente teorema:

TEOR. 1. *Si las n funciones $f_r(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$, $(r = 1, 2, \ldots, n)$ tienen derivadas parciales primeras continuas respecto de las x_i, p_i, son distintas respecto de las p, es decir, $\partial(f_1, \ldots, f_n)/\partial(p_1, \ldots, p_n) \neq 0$, y están dos a dos en involución, es decir, son idénticamente nulos los paréntesis de* POISSON

[XXVIII-88] $$(f_r, f_s) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_r}{\partial p_i} \frac{\partial f_s}{\partial x_i} - \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \right) = 0 \quad , \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n),$$

entonces, al definir algebraicamente p_1, p_2, ..., p_n mediante el sistema de ecuaciones

[XXVIII-89] $$f_1 = a_1 \quad , \quad f_2 = a_2 \quad , \ldots , \quad f_n = a_n \quad ,$$

con a_1, a_2, ..., a_n constantes, resulta que

$$dz = p_1 \, dx_1 + p_2 \, dx_2 + \ldots + p_n \, dx_n$$

es una diferencial total.

En efecto, se debe demostrar que

$$\partial p_r/\partial x_s \equiv \partial p_s/\partial x_r \quad , \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n).$$

Dichas derivadas vienen dadas por

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0 \quad ,$$

de donde, multiplicando por $\partial f_s/\partial p_i$ y sumando en i:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_j} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0 \quad ;$$

si permutamos r y s, y restamos, por [XXVIII-88] queda

$$(f_r, f_s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_j} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \right) \equiv 0.$$

Como $\partial(f_1, \ldots, f_n)/\partial(p_1, \ldots, p_n) \neq 0$, las n ecuaciones homogéneas

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_j} \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \right) \right) \equiv 0, \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

admiten sólo solución nula (§ 15-6, b); y esto para cada r. Por tanto

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{f}_r}{\partial p_j}\left(\frac{\partial p_j}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_j}\right) \equiv 0, \quad (r = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, n),$$

y el mismo razonamiento prueba que

$$\frac{\partial p_j}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial p_i}{\partial x_j}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, n),$$

como queríamos demostrar.

b_3) La demostración anterior muestra también que si tenemos un sistema de ecuaciones de primer orden [XXVIII-87], una solución común z de cada dos ecuaciones $\mathrm{f}_r = 0$, $\mathrm{f}_s = 0$, debe ser también solución de $(\mathrm{f}_r, \mathrm{f}_s) = 0$. Si agregamos al sistema dado [XXVIII-87] las $\binom{m+1}{2}$ ecuaciones $(\mathrm{f}_r, \mathrm{f}_s) = 0$ y del sistema obtenido consideramos sólo las ecuaciones funcionalmente independientes (§ 68-3, nota 1), podemos ir repitiendo este proceso hasta llegar, bien a un sistema de más de n ecuaciones y entonces el sistema es incompatible por deducirse de él una relación entre las solas variables *independientes* x, o bien a un sistema en que los paréntesis de POISSON no proporcionan ecuaciones distintas (§ 68-3, nota 1) a las anteriores, en cuyo caso el sistema se llama *completo*.

Si el sistema [XXVIII-87], supuesto por numeración conveniente que $\partial(\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_m)/\partial(p_1, \ldots, p_m) \neq 0$, se resuelve respecto de las $p_1, \ldots, p_m$, se obtienen las ecuaciones

[XXVIII-90] $\quad p_r - \varphi_r(x_1, \ldots, x_n;\ p_{m+1}, \ldots, p_n) = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots, m).$

Los paréntesis de POISSON $(p_i - \varphi_i,\ p_j - \varphi_j)$ no contienen las variables $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Si dicho paréntesis es función $G(p_1 - \varphi_1, \ldots, p_m - \varphi_m)$ de los demás, ésta se reduce a una constante por tener derivadas nulas respecto de los m argumentos $p_r - \varphi_r$. Si la constante no es nula, el sistema es incompatible. Así pues, en otro caso, dichos paréntesis, o son idénticamente nulos, o igualados a cero dan ecuaciones distintas a las [XXVIII-90]. Siguiendo este proceso, se llegará a un sistema o bien de más de n ecuaciones distintas y por tanto incompatible, o bien a un sistema en involución, llamado también *sistema jacobiano*, donde los paréntesis de POISSON correspondientes a cada dos ecuaciones serán idénticamente nulos.

b_4) Si tal es el sistema [XXVIII-87], $(m \leqslant n)$, (lo es evidentemente, si el sistema consta de una sola ecuación), veremos luego cómo pueden determinarse funciones distintas $\mathrm{f}_{m+1}, \ldots, \mathrm{f}_n$, que junto con las del sistema cumplan las condiciones [XXVIII-88]. Entonces, por aplicación del teorema 1, puede determinarse mediante cuadraturas (nota I), una función $z = \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_n) + a_{n+1}$ que satisface las ecuaciones [XXVIII-89]. La función

[XXVIII-91] $\quad z = \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n;\ 0, \ldots, 0, a_{m+1}, \ldots, a_n) + a_{n+1}$

verifica entonces el sistema jacobiano [XXVIII-87] para constantes a_{m+r} $(r = 1, 2, \ldots, n - m + 1)$ cualesquiera, dando así ∞^{n-m+1} integrales. Por analogía (§ 111-3) la solución [XXVIII-91] se llama una *integral completa*. En general, una integral completa es una función $z = \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n;\ a_{m+1}, \ldots, a_n, a_{n+1})$ con $n - m + 1$ constantes arbitrarias tal que las $n + 1$ ecuaciones $z = \mathrm{F}$, $p_r = \partial \mathrm{F}/\partial x_r$, conduzcan, por eliminación de las constantes $a_{m+1}, \ldots, a_n, a_{n+1}$ al sistema [XXVIII-87].

La integral general de este sistema se obtiene de una integral completa en forma análoga a la vista anteriormente (§ 111-3, b). Así, se toman h relaciones distintas y *arbitrarias* $(h < n - m + 1)$ entre las constantes

[XXVIII-92] $\quad \Phi_1(a_{m+1}, \ldots, a_n, a_{n+1}) = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_h(a_{m+1}, \ldots, a_n, a_{n+1}) = 0,$

y a ellas se añaden las $n - m + 1$ ecuaciones

[XXVIII-93] $$\frac{\partial F}{\partial a_{m+r}} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial a_{m+r}} + \ldots + \lambda_h \frac{\partial \Phi_h}{\partial a_{m+r}} = 0 \quad , \quad (r = 1, 2, \ldots, n - m + 1),$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ son indeterminadas que se eliminan de [XXVIII-92], [XXVIII-93] para dar lugar a $n - m + 1$ ecuaciones, de las que se despejan las a_{m+r} como funciones de las x y que introducidas en la integral completa originan una integral

$$z = F[x_1, \ldots, x_n;\ a_{m+1}(x), \ldots, a_n(x), a_{n+1}(x)].$$

En efecto, fácilmente se demuestra que

$$\frac{\partial F}{\partial a_{m+1}} \frac{\partial a_{m+1}}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial a_{n+1}} \frac{\partial a_{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de donde $p_i = \partial F / \partial x_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Aún puede obtenerse una eventual *integral singular* (cfr. § 111-3), eliminando las constantes entre

[XXVIII-94] $$z - F = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial a_{m+1}} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial a_n} = \frac{\partial F}{\partial a_{n+1}} = 0 \quad ,$$

sin que dichas ecuaciones determinen necesariamente una variedad, ni tampoco una solución de [XXVIII-87].

b_6) Dado un sistema jacobiano [XXVIII-87], $(m < n)$, existen métodos debidos a JACOBI, MAYER, LIE, IMSCHENETSKY y otros, que permiten determinar funciones distintas $f_{m+1}, \ldots, f_n$ que junto a las m del sistema cumplan las condiciones [XXVIII-88]. El método de JACOBI se apoya en la identidad de POISSON (cfr. [XXVIII-52], nota II, b)

[XXVIII-95] $$((f, g), h) + ((g, h), f) + ((h, f), g) \equiv 0 \quad ,$$

respecto de tres funciones f, g, h de las x_i, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ que tengan derivadas segundas, identidad que se demuestra fácilmente observando que en ella se anulan los términos en que figuran las derivadas segundas de cada función, por ejemplo, de la f.

Para determinar las funciones $f_{m+1}, \ldots, f_n$ se opera por recurrencia y basta, por tanto, dado el sistema [XXVIII-87] cumpliendo las condiciones [XXVIII-88] $(r, s = 1, 2, \ldots, m)$, estudiar cómo se encuentra una función φ distinta de ellas, tal que $(f_r, \varphi) \equiv 0$, $r = 1, 2, \ldots, m$.

Si se pone $X_r(\varphi) \equiv (f_r, \varphi)$, la identidad de POISSON [XXVIII-95] para f_r, f_s, φ se escribe (con $(f_r, f_s) \equiv 0$ por hipótesis):

[XXVIII-96] $$X_s(X_r(\varphi)) - X_r(X_s(\varphi)) \equiv 0, \quad (r, s = 1, 2, \ldots, m).$$

Por tanto, *debemos encontrar una solución común* φ *a un sistema de* m *ecuaciones lineales homogéneas* $X_r(\varphi) = 0$, $(r = 1, 2, \ldots, m)$ *en las derivadas parciales respecto de las* $2n$ *variables* $x_1, \ldots, x_n$; $p_1, \ldots, p_n$, *tomadas como independientes, cumpliendo las condiciones* [XXVIII-96].

Sea, pues, un sistema jacobiano de m ecuaciones lineales homogéneas en las derivadas primeras

[XXVIII-97] $$X_r(\varphi) \equiv \sum_{j=1}^{k} c_{r,j}(x_1, \ldots, x_k) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

en $k > m$ variables independientes $x_1, \ldots, x_k$, cumpliendo las condiciones [XXVIII-96], y veamos cómo se halla una solución común.

Un cambio de variables de determinante no nulo transforma este sistema en otro sistema jacobiano lineal homogéneo. En efecto, si $y_1, \ldots, y_k$ son las nuevas variables, con

$$x_j = \mathrm{x}_j(y_1, \ldots, y_k) = \mathrm{x}_j(y) \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \quad ,$$

será:

$$X_r(\varphi) \equiv \sum_j c_{r,j}(x_1(y),\ldots,x_k(y)).\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right]=$$

[XXVIII-98] $$=\left(\sum_j c_{r,j}\frac{\partial y_1}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\ldots+\left(\sum_j c_{r,j}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}=$$

$$=X_r(y_1)\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\ldots+X_r(y_k)\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\equiv Y_r(\varphi)\quad,\quad(r=1,2,\ldots,m)\quad,$$

y si se cumple

$$X_s(X_r(\varphi))\equiv X_r(X_s(\varphi))\quad,$$

claro está que también será

$$Y_s(Y_r(\varphi))\equiv Y_r(Y_s(\varphi))\quad,$$

como habíamos afirmado.

Para integrar el sistema [XXVIII-97] se procede por reducciones sucesivas. Se toman para $y_2, \ldots, y_k$, $k-1$ integrales primeras distintas de la primera ecuación $X_1(\varphi)=0$, solución del sistema adjunto (§ 110-4):

[XXVIII-99] $$\frac{dx_1}{c_{1,1}(x)}=\frac{dx_2}{c_{1,2}(x)}=\ldots=\frac{dx_k}{c_{1,k}(x)}\quad,$$

que junto con otra nueva variable $y_1=y_1(x)$ den un determinante funcional no nulo respecto de las x_j. El nuevo sistema será también jacobiano, y siendo $X_1(y_j)=0$, $(j=2,3,\ldots,k)$, la primera ecuación, según [XXVIII-98], se reduce a

[XXVIII-100] $$Y_1(\varphi)\equiv X_1(y_1)\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=0\quad,$$

es decir, la posible solución φ debe ser independiente de y_1.

Los coeficientes de las otras ecuaciones $Y_r(\varphi)=0$, $(r=2,3,\ldots,m)$, son $C_{r,j}(y_1,\ldots,y_k)=X_r(y_j)$, $(j=1,2,\ldots,k)$, y entonces la condición $Y_s(Y_r(\varphi))-Y_r(Y_s(\varphi))\equiv 0$, equivale al cumplimiento de las identidades

[XXVIII-101] $$\sum_{j=1}^{k}\left[C_{s,j}\frac{\partial C_{r,i}}{\partial y_j}-C_{r,j}\frac{\partial C_{s,i}}{\partial y_j}\right]\equiv 0\quad,$$
$$(r,s=1,2,\ldots,m;\quad i=1,2,\ldots,k),$$

es decir, de

[XXVIII-102] $$\sum_{j=1}^{k}\left[X_s(y_j)\frac{\partial X_r(y_i)}{\partial y_j}-X_r(y_j)\frac{\partial X_s(y_i)}{\partial y_j}\right]\equiv 0$$
$$(r,s=1,\ldots,m;\quad i=1,\ldots,k).$$

Tomando $r=1$, $i>1$, $s>1$, al ser $X_1(y_j)=0$, $(j=2,3,\ldots,k)$, queda $-X_1(y_1)(\partial X_s(y_i)/\partial y_1)=0$, es decir $\partial C_{s,i}/\partial y_1=0$, y por tanto, las [XXVIII-101] se convierten en

[XXVIII-103] $$\sum_{j=2}^{k}\left[C_{s,j}\frac{\partial C_{r,i}}{\partial y_j}-C_{r,j}\frac{\partial C_{s,i}}{\partial y_j}\right]\equiv 0\quad,$$
$$(r,s=2,3,\ldots,m;\quad i=2,3,\ldots,k),$$

con las $C_{s,i}$ independientes de y_1. Por tanto, en las ecuaciones $Y_r(\varphi)=0$, $(r=2,3,\ldots,m)$, podemos suprimir el primer término, para obtener un sistema de $m-1$ ecuaciones

[XXVIII-104] $$\sum_{j=2}^{k}C_{r,j}(y_2,\ldots,y_k)\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}=0\quad,\quad(r=2,3,\ldots,m),$$

en $k-1$ variables $y_2, \ldots, y_k$ que es también jacobiano por cumplir las [XXVIII-103]. Toda solución de este sistema reducido, por no depender de y_1, verificará también [XXVIII-100] y las $Y_r(\varphi)=0$, $(r=2,3,\ldots,m)$.

Reiterando el procedimiento $m-2$ veces, llegaremos a una sola ecuación

$$[\text{XXVIII-105}] \qquad \sum_{j=k-m}^{k} \Gamma_{m,j}(\eta_{k-m}, \ldots, \eta_k) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_j} = 0$$

que integraremos mediante el sistema adjunto de ecuaciones ordinarias

$$[\text{XXVIII-106}] \qquad \frac{d\eta_{k-m}}{\Gamma_{m,k-m}} = \frac{d\eta_{k-m+1}}{\Gamma_{m,k-m+1}} = \ldots = \frac{d\eta_k}{\Gamma_{m,k}}.$$

Mediante las transformaciones inversas a las realizadas anteriormente, obtendremos la solución del sistema [XXVIII-97].

b_6) *Caso analítico.* — Si buscamos sólo soluciones analíticas, esto es, desarrollables en serie de TAYLOR (§ 69-5, nota 4), de ecuaciones cuyos primeros miembros sean también analíticos, puesto el sistema jacobiano en la forma [XXVIII-90], pueden darse arbitrarios no tan sólo los valores iniciales $x^0_1, \ldots, x^0_n$, sino también las derivadas parciales primeras $p^0_{m+1}, \ldots, p^0_n$, quedando ya determinadas las $p^0_1, \ldots, p^0_m$ por dichas ecuaciones [XXVIII-90]. Por derivación sucesiva de estas ecuaciones y aplicación de adecuados valores iniciales, van obteniéndose los coeficientes de un desarrollo de TAYLOR que verifique formalmente el sistema propuesto. Viendo cuáles son los valores iniciales de las derivadas sucesivas que quedan arbitrarios y los que se determinan por derivación del sistema, se concluye que *un sistema en derivadas parciales de primer orden con una función incógnita conteniendo en su forma jacobiana m ecuaciones analíticas independientes, tiene solución analítica de las n variables independientes, unívocamente determinada en cuanto se asigne arbitrariamente la función analítica de $n-m$ variables a la cual se reduce la solución buscada sobre una determinada variedad analítica de dimensión $n-m$* (condiciones de CAUCHY). La justificación rigurosa de lo afirmado y estudio de la convergencia de la serie obtenida, puede efectuarse en las obras citadas en la bibliografía (nota XI-3).

c) *Sistemas generales de ecuaciones en el caso analítico.* — Daremos sólo idea de las cuestiones que se suscitan en su resolución, remitiendo para mayores detalles a la notable memoria de B. LEVI sobre el tema (citada en nota XI-3 y en Cap. XXVII, nota IV-2).

c_1) Al considerar sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de orden cualquiera, hecha la reducción al *caso de una sola función incógnita* (a), surge el hecho nuevo y muy importante de que la aparición y número de nuevas consecuencias diferenciales del sistema dado, depende ahora esencialmente de la ordenación de las derivadas, es decir, de la determinación de una altura para ellas. Una *ordenación de las derivadas* se llama *normal* si se tiene en cuenta: 1º) el orden de derivación; 2º) en caso de dos derivadas del mismo orden, el primer orden de derivación diferente que afecta a las variables colocadas en sucesión determinada. Si la ordenación fijada para las derivadas sólo cumple la primera condición, se tiene una ordenación *casi normal.* En otro caso, se tiene una ordenación *no-normal*; puede obtenerse una tal ordenación dando un peso o cota a cada variable (por ejemplo, números primos distintos) y considerando pesos totales crecientes.

Además, es importante hacer corresponder a cada derivada el monomio entero en las variables independientes que figura como índice inferior al suprimir las ∂ en la notación de dicha derivada. Con ello, las derivadas que nacen de una dada, por sucesivas operaciones de derivación, son precisamente las que corresponden a los monomios múltiples del monomio correspondiente a la derivada inicial. Fijada arbitrariamente una ordenación en altura de las derivadas, puede considerarse cada ecuación resuelta respecto de la derivada de máxima altura que ella contiene.

Aparecerán así, después de fáciles simplificaciones, como primeros miembros, *derivadas* que iremos llamando *principales*. Irán apareciendo otras mediante las consecuencias diferenciales del sistema a agregar a éste si son algebraicamente independientes.

Llamaremos *derivadas paramétricas* a las no deducibles por derivación sucesiva de las principales; son aquellas cuyos monomios correspondientes no son múltiplos de ninguno de los monomios que forman el conjunto M correspondiente a dichos primeros miembros. Un primer lema algebraico fundamental dice que *es finita toda sucesión de monomios de n variables en que ninguno es múltiplo de uno anterior*. Este lema asegura que después de un número finito de pasos, se llega siempre a un sistema que también se puede llamar *completo*, por no deducirse de él nuevas consecuencias diferenciales. Obsérvese que en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, la finitud del sistema normal (§ 105-2) se obtiene por el hecho de que el número de ecuaciones ha de ser igual al de funciones incógnitas (§ 105-3); en el caso de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, con una función incógnita (*b*), el número final de ecuaciones no puede sobrepasar al de derivadas primeras, es decir, al de variables independientes (b_1); aquí es este primer lema algebraico el que asegura la finitud del sistema completo.

Se concluye así, que un sistema dado de ecuaciones analíticas en derivadas parciales equivale al conjunto de uno o más (en número finito) sistemas completos dependientes de una determinada ordenación de las derivadas en altura, sistemas completos que se separan de él mediante una sucesión finita y determinada de operaciones de derivación, eliminación y obtención de soluciones numéricas de sistemas analíticos en términos finitos.

Fijado ya un sistema completo con respecto a una determinada ordenación en altura de las derivadas, *se extiende el nombre de derivadas principales* a todas las que se deducen de los primeros miembros por derivación sucesiva; *todas las demás se llaman paramétricas.*

Entonces las condiciones iniciales del sistema dependen esencialmente de la manera como se distribuyen los monomios correspondientes a las derivadas paramétricas según el siguiente segundo lema algebraico fundamental: *Dado un sistema finito* M *de monomios de n variables* x_1, x_2, ..., x_n, *tales que cada dos de ellos, nunca uno sea múltiplo del otro, se puede entonces determinar* (generalmente de varios modos en número finito) *otro sistema* N *de monomios y correspondientemente a cada uno de éstos un grupo de variables* (llamadas *multiplicatrices*), *en forma tal que todos los monomios que no son múltiplos de ninguno de* M *y sólo ellos, se obtienen una y una sola vez por multiplicación de un monomio de* N *por un monomio adecuadamente formado con las correspondientes variables multiplicatrices.*

Este segundo lema algebraico fundamental permite ahora construir formalmente la serie de TAYLOR que da la solución, definida siempre que se fijen apropiadas condiciones iniciales para las derivadas paramétricas, condiciones que dependerán de los distintos sistemas N que se pueden construir en el lema, apareciendo como funciones arbitrarias o reduciéndose a constantes también arbitrarias, según haya o no variables multiplicatrices en correspondencia al monomio respectivo. En definitiva, para completar la determinación de una función incógnita de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, hay que dar condiciones iniciales que se traducen en asignar los valores de funciones (eventualmente constantes) a las que se reducen determinadas derivadas de la función incógnita (eventualmente la función misma) sobre determinadas variedades de puntos del espacio E_n de las variables independientes x_1, x_2, ..., x_n. Las condiciones iniciales se llaman de CAUCHY cuando se refieren a los valores dados sobre *una misma variedad*. Aquí, ni la estructura de las variedades (que pueden no ser lineales) ni su dimensión, es algo intrín-

seco al sistema, sino que dependen no tan sólo de la ordenación de las derivadas en altura, sino también del sistema N que se haya construído en el segundo lema algebraico antes citado.

Obsérvese que así como en los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, se da particular importancia al *número* finito de constantes arbitrarias de que depende su integración y, por consiguiente, al de condiciones iniciales que pueden fijarse (§ 105), en cambio, en el problema de la determinación de las condiciones iniciales para individualizar la solución de un sistema en derivadas parciales, condiciones representadas generalmente por funciones arbitrarias, resulta que según el procedimiento de resolución que se adopte, pueden variar el número de estas condiciones y el número de variables de que dependen las funciones que las representan. Por lo tanto, el *número* de las funciones arbitrarias que completan la definición de un problema en derivadas parciales debe considerarse estrechamente vinculado al *significado* que estas funciones van a tener.

También la existencia de un campo de convergencia suficientemente restringido de la serie de TAYLOR obtenida formalmente para la solución del sistema, está estrechamente vinculada a la determinada ordenación en altura que se adopte para las derivadas, tomando ahora importancia la ordenación normal, por asegurar siempre dicha existencia.

c_3) Otro método de resolución de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales se refiere a su reducción a *otro de primer orden lineal en las derivadas* (a) con k funciones incógnitas $z_1, z_2, \ldots, z_k$ y n variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se prueba fácilmente que el número m de ecuaciones puede siempre suponerse $m \leqslant k \cdot n$ con ecuaciones linealmente independientes. Por procesos lineales y adecuada numeración de las funciones incógnitas, todo sistema puede reducirse a una forma *conónica* en la que las m ecuaciones $\partial z_r/\partial x_i = \Psi_{r,i}$ tengan sus segundos miembros $\Psi_{r,i}$ funciones lineales de las derivadas que contengan sólo derivación respecto de x_j con índice $j > i$, o bien derivación respecto de x_i para funciones z_s con $s > r$. Entonces, las derivadas que figuran en los primeros miembros se llaman *principales* y las restantes *paramétricas*. Una derivada segunda $\partial^2 z_r/\partial x_i \partial x_j$ se llama *doblemente principal* si $\partial z_r/\partial x_i$ y $\partial z_r/\partial x_j$ son ambas principales; cuando sólo una de ellas es principal, aquella derivada segunda se llama *simplemente principal*; se llama *paramétrica*, si ambas derivadas primeras son paramétricas.

Por derivación del sistema dado se ve que las derivadas segundas simplemente principales quedan unívocamente determinadas mediante las paramétricas, mientras que las derivadas segundas doblemente principales dan lugar a consecuencias diferenciales o relaciones entre derivadas paramétricas que deben cumplirse idénticamente. En este caso, el sistema de ecuaciones se llama *completo*. Si el número de ecuaciones del reducido sistema canónico completo es el máximo posible $m = k \cdot n$, entonces la solución $z_1, z_2, \ldots, z_k$, queda unívocamente determinada para valores iniciales dados $z^0_1, z^0_2, \ldots, z^0_k$ en $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n$, y por tanto la integral general depende de k constantes arbitrarias, es decir, existen ∞^k soluciones.

En cambio, si $m < k \cdot n$, consideremos funciones analíticas arbitrarias φ_r de todas las variables x_i para las que $\partial z_r/\partial x_i$ son paramétricas y que tomen valores z^0_r en el punto inicial $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n$; entonces, existe una solución analítica unívocamente determinada $z_1, z_2, \ldots, z_k$ tal que la función z_r se convierte en la función φ_r cuando en z_r se atribuyen a todas las variables principales x_j los valores iniciales x^0_j.

En efecto, con las φ_r quedan determinados los valores de todas las derivadas paramétricas de cualquier orden de z_r en el punto inicial $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n$. Mediante el sistema se obtienen las derivadas primeras principales. Las derivadas segundas principales dependen sólo de derivadas paramétricas y son, por tanto, conocidas. Si todas las derivadas

de orden $(q-1)$ se han determinado mediante las derivadas paramétricas hasta de orden $(q-1)$, por derivación simple del segundo miembro resultan, junto con las derivadas de orden menor que q, derivadas de orden q, bien paramétricas, bien simplemente principales. Basta pues, expresar las derivadas de orden q con una sola variable principal mediante derivadas paramétricas, lo que se logra inmediatamente en las simplemente principales obtenidas por derivación de la última ecuación del sistema canónico, sustitución de ellas en la derivación de la penúltima ecuación, siguiendo así de atrás a adelante. En esta forma las derivadas de orden q quedan unívocamente determinadas como funciones de las derivadas paramétricas, y dadas éstas, quedan formalmente determinados los desarrollos de TAYLOR de las funciones incógnitas.

Para la demostración de su convergencia, justificación rigurosa del método y detalles aclaratorios del mismo, pueden consultarse las obras incluídas en la bibliografía, en particular como clara y muy asequible, la de ecuaciones en derivadas parciales de HOHEISEL (citada en nota XI-3 y Cap. XXVII, nota IV-2).

IV. Funciones de Ferrers y armónicas esféricas de superficie. — El método de separación de variables expuesto en § 112-3, *b* para ecuaciones de segundo orden de coeficientes constantes es también aplicable a ciertas ecuaciones de coeficientes variables. Consideremos, por ejemplo, la ecuación diferencial [93-28] de la armónica esférica de superficie $Y_n(\lambda, \theta)$ (§ 93, ejercicio 20):

$$\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2 Y_n}{\partial\lambda^2} + n(n+1)\operatorname{sen}^2\theta\, Y_n = 0 \quad ,$$

que con la variable independiente $\cos\theta = t$ se escribe:

$$\text{[XXVIII-107]} \quad \frac{\partial^2 Y_n}{\partial\lambda^2} + (1-t^2)\left\{\frac{\partial}{\partial t}\,(1-t^2)\,\frac{\partial Y_n}{\partial t} + n(n+1)Y_n\right\} = 0.$$

En algunas aplicaciones interesan soluciones de [XXVIII-107] de la forma $Y_n = L(\lambda).T(t)$ lo que conduce a igualar a una constante cada término de [XXVIII-107]. Así resulta L de la forma $\cos r\lambda$, ó $\operatorname{sen} r\lambda$, ó $e^{r\lambda}$. Sólo las dos primeras con r entero conducen a funciones Y_n uniformes en la esfera:

$$\text{[XXVIII-108]} \quad Y_n = \cos r\lambda\,.\,T(t), \quad \text{ó} \quad Y_n = \operatorname{sen} r\lambda\,.\,T(t).$$

Para $T(t)$ resulta de [XXVIII-107] la ecuación diferencial

$$\text{[XXVIII-109]} \quad \frac{d}{dt}\,(1-t^2)\,\frac{dT}{dt} + \left[\,n(n+1) - \frac{r^2}{1-t^2}\right] T = 0.$$

Derivando r veces la ecuación diferencial [93-29] de los polinomios de LEGENDRE escrita en la forma

$$(1-t^2)\,\frac{d^2P_n}{\partial t^2} - 2t\,\frac{dP_n}{dt} + n(n+1)P_n = 0,$$

y multiplicando luego por $(1-t^2)^{r/2}$, se llega a que la ecuación [XXVIII-109] admite la solución:

$$\text{[XXVIII-110]} \qquad T = (1-t^2)^{r/2}\,\frac{d^r}{dt^r}\,P_n(t) = P_n{}^r(t),$$

no idénticamente nula sólo si $r \leqslant n$. El último miembro de [XXVIII-110] indica la notación usual para esa solución de [XXVIII-109], que se expresa como producto de $\operatorname{sen}^r\theta$ por un polinomio de grado $n-r$ en $\cos\theta$. La función $P_n{}^r(t)$ se llama *función de* FERRERS *de orden r, asociada a la función de* LEGENDRE *de grado n.*

De [XXVIII-108] y [XXVIII-110] resultan para $r = 0, 1, \ldots, n$, las $2n + 1$ armónicas esféricas:

$$\mathrm{P}_n(t), \quad \mathrm{P}_n^1(t)\cos\lambda, \quad \mathrm{P}_n^1(t)\operatorname{sen}\lambda, \ \ldots, \ \mathrm{P}_n^n(t)\cos n\lambda, \quad \mathrm{P}_n^n(t)\operatorname{sen} n\lambda.$$

Se demuestra que cualquier otra armónica esférica de grado n se expresa como combinación lineal de ellas. Integrando el producto de dos distintas respecto de λ, de 0 a 2π, se ve que forman un sistema ortogonal sobre la esfera. Cada función $\mathrm{P}_n^r(t)\cos r\lambda$, ó $\mathrm{P}_n^r(t)\operatorname{sen} r\lambda$, $(0 < r < n)$, se anula en la esfera sobre una red ortogonal de meridianos equidistantes (correspondientes a $\cos r\lambda = 0$ ó $\operatorname{sen} r\lambda = 0$) y ciertos paralelos [correspondientes a los ceros de $\mathrm{P}_n^r(t)$]. Esta red divide a la esfera en *trozos rectangulares* y las funciones, llamadas *armónicas teseladas* (inglés: *tesseral harmonics*), resultan adecuadas para problemas en conexión con estos trozos rectangulares o con dominios espaciales que resultan de proyectarlas desde el origen O, y limitar con esferas de centro O. Para $r = n$, $\mathrm{P}_n^n(t)$ se anula para $t = \pm 1$, $\theta = \pm \pi/2$, la esfera queda dividida en *sectores* comprendidos entre meridianos equidistantes, y por eso $\mathrm{P}_n^n(t)\cos n\lambda$, $\mathrm{P}_n^n(t)\operatorname{sen} n\lambda$ suelen llamarse *armónicas sectoriales*. Para $r = 0$ se tienen *zonas esféricas* comprendidas entre los paralelos $\theta = \theta_i$ con $\mathrm{P}_n(\cos\theta_i) = 0$, por esta razón los polinomios de LEGENDRE $\mathrm{P}_n(t)$ se llaman también *armónicas zonales*.

V. Vibraciones y equilibrio de hilos y varillas. — *a*) *Cuerda vibrante no homogénea.* — Fué éste el problema físico estudiado por STURM y LIOUVILLE, quienes abordaron en él por primera vez los problemas de contorno de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Por eso lleva sus nombres la teoría desarrollada en Cap. XXVII, nota III, acerca de las ecuaciones del tipo [XXVIII-56], que son una generalización no esencial de la ecuación original de STURM-LIOUVILLE [XXVIII-113] que vamos a estudiar.

Si es $\varrho(x)$ la densidad de masa en el punto x (o masa unitaria, o derivada de la masa respecto de la longitud) y $\mathrm{r}(x)$ el producto del módulo de elasticidad por la sección, la ecuación de la cuerda $u = \mathrm{u}(x, t)$, por el mismo razonamiento usual para el caso de masa homogénea, debe satisfacer a la ecuación

[XXVIII-111] $$\varrho(x)\mathrm{u}_{tt}(x, t) = [\mathrm{r}(x)\mathrm{u}_x(x, t)]_x.$$

Con el método usado en § 112-3, *b*, pongamos $u = \mathrm{z}(t)\mathrm{y}(x)$ y la ecuación obtenida:

$$\varrho(x)\mathrm{z}''(t)\mathrm{y}(x) = (ry')'\mathrm{z}(t)$$

se desdobla en dos ecuaciones, y para el caso de *extremos fijos* [XXVII-47] tendremos:

[XXVIII-112] $$\mathrm{z}''(t) = -\lambda\mathrm{z}(t), \quad \mathrm{z}(t) = a\cos kt + b\operatorname{sen} kt, \quad (k^2 = \lambda);$$

[XXVIII-113] $$(ry')' = -\lambda\varrho(x)\mathrm{y}(x), \quad \mathrm{y}(0) = 0, \quad \mathrm{y}(l) = 0,$$

problema lineal de contorno de donde sacaremos los valores de λ para ponerlos en [XXVIII-111].

Que los autovalores λ_n sean todos *positivos* como resulta de Cap. XXVIII, nota III, teor. 5, por ser $\mathrm{r}(x) \geqslant 0$ tiene especial importancia en este como en todos los problemas vibratorios. Si fuesen *negativos* los valores suministrados por la ecuación [XXVIII-113], al sustituirlos en la ecuación temporal $z'' = -\lambda z$ resultaría $\mathrm{z}(t)$ no periódica, de tipo exponencial infinitamente creciente. Esto sólo puede acontecer en otros problemas físicos donde es $\mathrm{q}(x) > 0$ en [XXVII-56] y aún en ellos, sólo un número finito de veces.

Finalmente, observemos que una vez normalizadas las soluciones y φ_n de [XXVIII-113], con las soluciones $\mathrm{z}_n(t)\varphi_n(x)$ de [XXVIII-111],

se pueden componer soluciones polinómicas de variables disociadas, y series del tipo:

[XXVIII-114] $u(x,t) = \sum (a_n \cos k_n t + b_n \operatorname{sen} k_n t) \varphi_n(x)$, $(k_n^2 = \lambda_n)$

con las que se pueden satisfacer las condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, siendo $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas que cumplen las condiciones $f(0) = f(l) = 0$, $g(0) = g(l) = 0$; pues basta elegir los coeficientes a_n y b_n tales que para $t = 0$ sea:

[XXVIII-115] $f(x) = \sum a_n \varphi_n(x)$, $g(x) = \sum a_n k_n \varphi_n(x)$.

Si estas series convergen absoluta y uniformemente, también [XXVIII-115]; y por tanto es la solución del problema.

Análogamente se estudian las condiciones de contorno de tipos B y C de Cap. XXVII, nota III, c_1, que corresponden a extremos libres y a extremos ligados elásticamente.

b) Vibración forzada de una cuerda homogénea. — Si sobre la cuerda vibrante actúan fuerzas exteriores $h(x,t)$, la ecuación del movimiento es (cfr. § 112-6, *a*):

[XXVIII-116] $u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t)$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

refiriéndonos especialmente al caso de la cuerda tensa en $[0,\pi]$. He aquí un problema *no homogéneo* (Cap. XXVII, nota III, *a*) en que la separación de variables debe hacerse también en la $h(x,t)$. Sin presuponer que sea desarrollable en serie de FOURIER, sean h_n sus c. F. y c_n los de $u(x,t)$, es decir:

[XXVIII-117] $$\begin{cases} c_n(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi u(x,t) \operatorname{sen} nx \, . \, dx \quad , \\ h_n(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi h(x,t) \operatorname{sen} nx \, . \, dx \quad ; \end{cases}$$

para deducir los c_n de los h_n que son funciones conocidas, multipliquemos [XXVIII-116] por $(2/\pi) \operatorname{sen} nx$ integrando después en $(0,\pi)$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_{tt} \operatorname{sen} nx \, . \, dx = \frac{2c^2}{\pi}\int_0^\pi u_{xx} \operatorname{sen} nx \, . \, dx + $$
$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\pi h(x,t) \operatorname{sen} nx \, . \, dx \quad ;$$

la primera y tercera se expresan mediante [XXVIII-117]; la segunda también, previa integración por partes que la transforma en

$$- n^2 \int u \operatorname{sen} nx \, . \, dx \quad ;$$

luego, la ecuación en derivadas parciales se ha reducido a esta ordinaria:

[XXVIII-118] $c''_n(t) = - n^2 c^2 c_n(t) + h_n(t)$.

Como la integral general de la ecuación homogénea $c''_n + n^2 c^2 c_n = 0$ es: $a_n \cos nct + b_n \operatorname{sen} nct$, basta sumarle una integral particular de la ecuación completa (§ 107-3) para obtener la solución general de [XXVIII-118]:

[XXVIII-119] $$c_n(t) = \frac{1}{nc}\int_0^t \operatorname{sen} nc(t-s) h_n(s) ds + $$
$$+ a_n \cos nct + b_n \operatorname{sen} nct .$$

Para $t = 0$ es $c_n(0) = a_n$, $c'_n(0) = ncb_n$, números que según [XXVIII-115] son los c. F. de las funciones iniciales: $f(x) = u(x,0)$,

$g(x) = u_t(x, 0)$; luego con la expresión [XXVIII-119] quedan unívocamente determinados los c. F. de $u(x, t)$.

Si converge uniformemente la serie $\sum c_n(t) \operatorname{sen} ncx$, esta función es la única solución del problema, y en caso contrario la función $u(x, t)$ queda determinada por convergencia cuadrática, que es segura por ser función continua, y ser completo el sistema ortogonal $\operatorname{sen} nx$ en $(0, \pi)$, (§ 97-6).

El caso en que la fuerza $h(x, t)$ sea *periódica* en t y por tanto $h_n(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \operatorname{sen} \omega t$ tiene gran interés. Si es $\omega \neq nc$, el c. F. expresado por [XXVIII-119] se compone de una parte periódica de frecuencia nc y otra de frecuencia ω. En cambio, si para algún n es $\omega = nc$ (caso de *resonancia*), $c_n(t)$ no está acotado (§ 108-5, *b*).

c) *Varilla homogénea vibrante.* — Como ejemplo de problema lineal homogéneo expresado por una ecuación de orden superior a 2, estudiemos la del movimiento vibratorio de una varilla homogénea (cfr. § 113-5, *d*):

[XXVIII-120] $$u_{x^4} + u_{tt} = 0.$$

Se hace la usual separación de variables poniendo $u = y(x) . z(t)$ y la ecuación se desdobla en estas dos:

[XXVIII-121] $z'' + \lambda z = 0, \quad z = a \cos k^2 t + b \operatorname{sen} k^2 t, \quad (\lambda = k^4)$

[XXVIII-122] $y^{IV} - \lambda y = 0,$ *cuatro condiciones de contorno*,

donde el parámetro λ está determinado por las cuatro condiciones de contorno. Suponiendo elegida la unidad de longitud tal que la longitud de la varilla sea π, la integral de la primera expresa el movimiento vibratorio de cada punto, y la integral general de la segunda, mediante su ecuación característica $r^4 = k^4$, es:

[XXVIII-123] $$y = \alpha \cos kx + \beta \operatorname{sen} kx + \gamma \operatorname{ch} kx + \delta \operatorname{sh} kx.$$

Si las condiciones de contorno son

[XXVIII-124] $y(0) = y'(0) = 0, \quad y(\pi) = y'(\pi) = 0,$
(*extremos empotrados*),

las constantes se determinan así:

$$\alpha + \gamma = 0, \qquad \alpha(\cos k\pi - \operatorname{ch} k\pi) + \beta(\operatorname{sen} k\pi - \operatorname{sh} k\pi) = 0,$$
$$\beta + \delta = 0, \quad -\alpha(\operatorname{sen} k\pi + \operatorname{sh} k\pi) + \beta(\cos k\pi - \operatorname{ch} k\pi) = 0,$$

y los autovalores λ_n (o bien $k\pi$) vienen definidos por la ecuación, obtenida anulando el determinante del sistema homogéneo en (α, β) (§ 15-6, *b*):

[XXVIII-125] $\Delta = 2(1 - \cos k\pi . \operatorname{ch} k\pi) = 0$
es decir $\cos k\pi . \operatorname{ch} k\pi = 1.$

La solución $k = 0$, o sea $\lambda = 0$, invalida la expresión [XXVIII-123], pues la ecuación [XXVIII-122] es ahora $y^{IV} = 0$ y su integral:

[XXVIII-126] $$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \quad ,$$

condiciones $\alpha = \beta = 0$, $\gamma + \delta\pi = 0$, $2\gamma + 3\delta\pi = 0$ (incompatibles).

Por tanto, el número $\lambda = 0$ no es autovalor.

La sucesión de autovalores λ_n o bien k_n se obtiene gráficamente (Fig. 389) y es con buena aproximación $k_n \sim (n + \frac{1}{2})\pi$.

Si las condiciones de contorno son

$$y''(0) = y'''(0) = 0, \quad y''(\pi) = y'''(\pi) = 0 \quad (\textit{extremos libres}),$$

derivadas segundas de [XXVIII-124], resulta la misma ecuación [XXVIII-125]; pero $k = 0$ o sea $\lambda = 0$ es autovalor, pues las condiciones de contorno sólo imponen $\gamma = \delta = 0$, resultando las autofunciones $u = 1$, $u = x$, y toda combinación lineal $\alpha + \beta x$. Es decir: $\lambda = 0$ es autovalor *doble*.

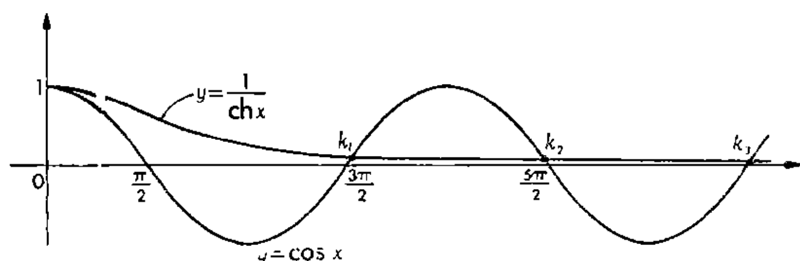


Fig. 389.

Otras condiciones de contorno son, por ejemplo, éstas:

$$y(0) = y''(0) = 0, \quad y(\pi) = y''(\pi) = 0 \quad (\textit{extremos fijos}),$$
$$y(0) = y''(0) = 0, \quad y(\pi) = y'(\pi) = 0$$
$$(\textit{extremos fijo y empotrado})$$

En todo caso, resultan cuatro ecuaciones lineales para α, β, γ, δ, e igualado a 0 el determinante, se obtiene la ecuación que determina los autovalores.

EJERCICIOS: 1. Demostrar para cada par de autovalores λ_m, λ_n y sus correspondientes autofunciones

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^\pi y_m y_n \, dx = \left(y_n y'''_m - y_m y'''_n - y'_n y''_m + y'_m y''_n \right)_0^\pi .$$

2. Deducir la ortogonalidad de y_m é y_n en $(0, \pi)$.

d) *Equilibrio de vigas y varillas.* — Si una viga elástica cuyos extremos tienen abscisas $x = a$, $x = b$, está sometida a ciertas fuerzas (carga continua o bien cargas aisladas en ciertos puntos, reacciones de apoyos, etc.), la teoría elástica de NAVIER-KIRCHHOFF admite que la fibra neutra de los baricentros de las secciones carece de tensiones y esa *línea elástica* tiene en cada punto x, curvatura proporcional al *momento flector* M (momento de las cargas y reacciones a uno u otro lado de x), e inversamente proporcional al momento de inercia I de la sección; y como para pequeñas deformaciones la curvatura es muy aproximadamente y'', la ecuación de la línea elástica es (§ 106-2, *b*):

[XXVIII-127] $y'' = -k\mathrm{M}(x)$; $(k = 1/\mathrm{EI})$, E = módulo de elasticidad;

(momento flector a la izquierda retrógrado positivo; y positivas hacia abajo).

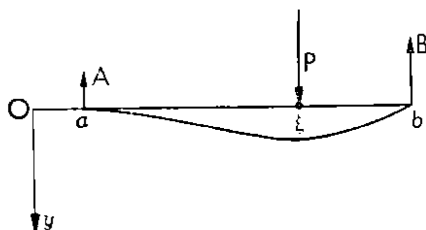


Fig. 390.

El caso más sencillo es el de una carga aislada P en el punto ξ (fig. 390); suponiendo la viga apoyada en los extremos, es decir, condiciones de contorno de tipo A (Cap. XXVII, nota III, c_1), $y(a) = y(b) = 0$, las reacciones A, B de los extremos están determinadas por la doble condición (fuerza hacia abajo positiva):

$$\frac{-\mathrm{A}}{b - \xi} = \frac{-\mathrm{B}}{\xi - a} = \frac{\mathrm{P}}{b - a} .$$

En (a, ξ): $\mathrm{M}_1(x) = (x - a) \cdot (-\mathrm{A})$;
En (ξ, b): $\mathrm{M}_2(x) = (b - x) \cdot (-\mathrm{B})$.

Las integrales son del tipo:

$$y = k\mathrm{A}\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{a}{2}x^2\right) + c_1x + c_2 \quad ,$$

$$y = k\mathrm{B}\left(\frac{b}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + c_3x + c_4 \quad ,$$

y las cuatro constantes se determinan por las condiciones de contorno, y la igualdad de valores y', y'' en ξ, pues los de y'' lo son por la proporcionalidad arriba escrita.

Si la carga es continua y es $\mathrm{f}(x)$ la *carga unitaria*, o sea, la derivada de la función de carga $\mathrm{y}_1(x)$ o *esfuerzo de corte*, se tiene esta escala de funciones:

$y = \mathrm{f}(x)$ función de *cargas unitarias* (continuas),

$y_1 = \int_0^x \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ función de *esfuerzos cortantes*,

$y_2 = \int_0^x \mathrm{f}(\xi)\,(x - \xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x \mathrm{y}_1(x)\,\mathrm{d}x$ función de *momentos flectores*.

La ecuación de la línea elástica es, por tanto, $y'' = -k\mathrm{y}_2(x)$ y sus primitivas sucesivas son:

$y_3 = y' = -k\int_0^x \mathrm{y}_2(x)\,\mathrm{d}x$ función de *pendiente*,

$y_4 = y = \int_0^x \mathrm{y}_3(x)\,\mathrm{d}x$ función de la *línea elástica*.

Si se parte de la función $\mathrm{f}(x)$ de cargas, la ecuación será

[XXVIII-128] $$y^{\mathrm{IV}} = -k\mathrm{f}(x)$$

y el problema de equilibrio está íntimamente ligado con el de la vibración tratado en c), presentándose en ambos estos tres casos importantes de problema de contorno, que generalizan los tipos A y B de Cap. XXVII, nota III, c_1:

Ecuación

Equilibrio $y^{\mathrm{IV}} = -k\mathrm{f}(x)$

Vibración $y_{x^4} = -y_{tt}$

Apoyada en los extremos $\begin{cases} \mathrm{y}(0) = \mathrm{y}(l) = 0 \\ \mathrm{y}''(0) = \mathrm{y}''(l) = 0 \end{cases}$

Empotrada en los extremos $\begin{cases} \mathrm{y}(0) = \mathrm{y}(l) = 0 \\ \mathrm{y}'(0) = \mathrm{y}'(l) = 0 \end{cases}$

Extremos libres $\begin{cases} \mathrm{y}''(0) = \mathrm{y}''(l) = 0 \\ \mathrm{y}'''(0) = \mathrm{y}'''(l) = 0 \end{cases}$

Estas últimas expresan que en los extremos es nulo el momento flector y el esfuerzo cortante.

e) *Equilibrio de cuerdas.* — Si en una cuerda tensa (tensión τ) actúan en un punto de abscisa x una carga q, la condición de equilibrio, que resulta de considerar la componente vertical de la tensión en ambos trozos a partir de P (fig. 391) es:

$$\tau\,[\mathrm{y}'(x^+) - \mathrm{y}'(x^-)] = -q\,.$$

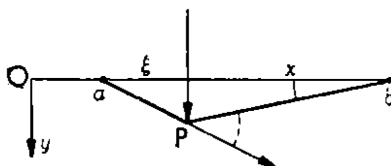


Fig. 391.

De aquí se deduce la ecuación de equilibrio:

Carga aislada en ξ: $\tau[y'(\xi^+) - y'(\xi^-)] = -q$
Carga continua $q(x)$: $\tau y''(x) = -q(x)$

Consideremos solamente el caso de carga aislada; si la línea elástica de equilibrio se compone de dos segmentos rectilíneos:

$$y_1(x) = y(\xi)\frac{x-a}{\xi-a}, \quad y_2(x) = y(\xi)\frac{b-x}{b-\xi},$$

de la condición de equilibrio $\tau[y'_2(\xi) - y'_1(\xi)] = -q$ se deduce $y(\xi) = (q/\tau l)(b-\xi)(\xi-a)$.

Para poner de manifiesto la dependencia del punto ξ en que actúa la carga, designaremos por $V(x,\xi)$ la deformación en el punto x debida a la carga 1 en el punto ξ. A uno y otro lado es:

$$\text{[XXVIII-129]} \quad \begin{cases} x \leqslant \xi, & V(x,\xi) = \dfrac{1}{\tau l}(b-\xi)(x-a) \\ x \geqslant \xi, & V(x,\xi) = \dfrac{1}{\tau l}(b-x)(\xi-a) \end{cases}$$

$$V'(\xi^+,\xi) - V'(\xi^-,\xi) = -\frac{1}{\tau},$$

donde salta a la vista la simetría $V(x,\xi) = V(\xi,x)$; pues si $x < \xi$ es aplicable la primera en el primer miembro y la segunda en el segundo, y al revés si $x > \xi$. Este hecho notable, que se generaliza a casos más complicados, se enuncia así: *la deformación en un punto x producida por una carga en ξ es igual a la deformación en ξ por la misma carga en x.*

Si la cuerda soporta varias cargas aisladas q_i, en ξ_i, por el principio de superposición, viene expresada así la deformación: $y(x) = \sum V(x,\xi_i)q_i$, y en el límite:

$$y(x) = \int_a^b V(x,\xi)q(\xi)d\xi,$$

función que satisface a la ecuación $\tau y'' = -q(x)$. En efecto,

$$y = \int_a^x + \int_x^b, \quad y' = \int_a^x V'q + \int_x^b V'q + \text{términos nulos},$$
$$y'' = V'(x,x^-)q(x) - V'(x,x^+)q(x),$$

pues siendo V lineal, es $V'' = 0$. Resulta, pues, $y'' = -q/\tau$.

De la ecuación del equilibrio se pasa a la del movimiento por el método de D'Alembert, poniendo en vez de $q(\xi)$ la fuerza de inercia. Si se pone $y(x,t) = \varphi(x)\cos kt$, la aceleración es $-k^2\varphi(x)\cos kt$, y llamando μ a la masa unitaria, la resistencia de inercia es $k^2\mu\varphi(x)\cos kt$, luego la ecuación homogénea que determina $\varphi(x)$ en el caso de cuerda no homogénea, es la *ecuación integral homogénea* (Apéndice II):

$$\text{[XXVIII-130]} \qquad \varphi(x) = k^2\int_a^b V(x,\xi)\mu(\xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

VI. Problemas de Sturm-Liouville en varias variables. — *a*) *Problemas lineales.* — a_1) *Homogéneos.* — Gran parte de la teoría expuesta en Cap. XXVII, nota III, se traslada paralelamente a las ecuaciones parciales con cualquier número de variables, aunque estudiaremos especialmente el caso de dos: x, y, llamando D a su dominio de variabilidad y Γ a su contorno, que supondremos formado por una o varias curvas con tangentes en todos sus puntos, pero con leves cambios de palabras se extiende la teoría a n variables. Un "problema lineal homogéneo" está definido por una *ecuación* lineal homogénea $L[u] = 0$ y *una condición* lineal homogénea de contorno: $l(u, u_n) = 0$, indicando con u_n la derivada según la *normal interior* n. Estas condiciones de contorno se clasifican análogamente a las de una variable (Cap. XXVII, nota III, c_1) así:

Problemas puros de contorno:

Tipo A. *Ordenadas nulas*: $u = 0$ en Γ;
Tipo B. *Pendientes nulas*: $u_n = 0$ en Γ.

Problemas mixtos de contorno:

Tipo C. $\alpha u + \beta u_n = 0$ siendo α y β funciones del punto en Γ; en particular, si cada una es nula en uno o varios arcos, que en conjunto forman Γ, se tiene: $u = 0$ en Γ_1 y $u_n = 0$ en el complemento $\Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1$. Algunos autores se refieren a este caso particular al hablar de condiciones mixtas.

a_2) *No homogéneos*. — Se clasifican análogamente. Por ejemplo, igual que en el caso de una variable, llamaremos condición de tipo C no homogénea a la que liga los valores de u y u_n en cada punto de Γ por una relación lineal $\alpha u + \beta u_n = \gamma$, cuyos coeficientes α, β, γ varían sobre Γ, siendo $\gamma \neq 0$; en particular: $u = \gamma$ en uno o varios arcos y $u_n = \delta$ en el complemento en Γ.

a_3) *Relación entre problemas homogéneos y no homogéneos*. — El estudio previo de los problemas homogéneos permitirá pasar a los lineales no homogéneos, siendo sorprendente la analogía con las relaciones ya conocidas del Álgebra elemental (cfr. Cap. XXVII, nota III), explicable, sin embargo, por el tránsito a la ecuación integral (Apéndice II), que engloba en una sola expresión la ecuación diferencial con la condición de contorno, expresión única que es caso límite de aquel sistema de ecuaciones algebraicas lineales. Tres distantes cuerpos de doctrina aparecen así en íntima relación, reveladora de una identidad de esencia.

a_{31}) El paso de un problema no homogéneo $L[u] = g$ (función de las mismas variables que u), con condición $l(u, u_n) = \gamma$, al correspondiente problema homogéneo $L[u] = 0$, $l(u, u_n) = 0$, se efectúa, como en Álgebra, partiendo de una solución particular u^*, es decir, tal que $L[u^*] = g$, $l(u^*, u^*_n) = \gamma$; adoptando como nueva función $v = u - u^*$, la cual debe satisfacer a $L[v] = 0$, $l(v, v_n) = 0$, problema que ya es homogéneo (cfr. §§ 107-3, 112-2 y 5).

a_{32}) La no homogeneidad de la ecuación o de la condición de contorno son equivalentes; refiriéndonos al tipo A, he aquí dos problemas no homogéneos:

1º) $L[u] = 0$, $u = \gamma$; 2º) $L[v] = g$, $v = 0$ en Γ.

Sea u una solución del primero; suponiendo que γ está definida en todo el dominio D, o es prolongable en él, y llamando $L[\gamma] = g$, la función $v = \gamma - u$ satisface al segundo. Recíprocamente, si v es solución del segundo, la función $u = \gamma - v$ satisface al primero.

En general, toda ecuación *homogénea*, con condición *no homogénea* de contorno, es equivalente a una ecuación *no homogénea* con condición *homogénea* de contorno.

a_{33}) La relación alternativa entre un problema no homogéneo y el correspondiente homogéneo se ve muy clara en el importante problema de DIRICHLET (o primer problema de contorno) de la teoría del potencial (Cap. XXIII, nota II, b_2), donde Δ es el laplaciano:

En el dominio D: $\Delta u(x, y) = 0$.
En el contorno Γ: $u(x, y) = \gamma$.

El correspondiente problema homogéneo es éste:

En D: $\Delta u(x, y) = 0$. *En* Γ: $u(x, y) = 0$.

Como por la propiedad extremal de las funciones armónicas (§ 114-3

y 6; íd. § 115-7, nota 2), el máximo y el mínimo de u lo alcanza en el contorno, y en él es $u=0$, resulta $u(x,y)\equiv 0$ en D; el problema homogéneo es, por tanto, *imposible* (es decir, sólo admite solución trivial), y entonces (Cap. XXVII, nota III, *b*) debe poderse probar que es *determinado* el problema no homogéneo. Una solución u^* de $\Delta u=0$ con la condición $u^*(x,y)= =\gamma$ en Γ se construye por diversos métodos, y poniendo $u=u^*+v$ debe ser $\Delta v=0$ en D, $v=0$ en Γ, luego $v\equiv 0$, lo que confirma que la solución u es *única*, si existe. Resulta así *una parte* del teorema de la alternativa (Cap. XXVII, nota III, *b*). La *existencia* de solución del problema no homogéneo, y por ende la conclusión de que éste es *determinado*, se logrará, en ciertos casos, mediante el tránsito a la ecuación integral equivalente (Apéndice II-2, *b*).

a_1) ¿No hay contradicción con el teorema de existencia de CAUCHY, que exige *dos* condiciones iniciales sobre una curva, mientras aquí solamente damos una? En efecto, damos la condición $u=\gamma$ sobre Γ, pero *además* imponemos la condición de ser u *regular* en D, sin excepción. Admítase un punto excepcional, uno solo, interior a D, y el problema de contorno es indeterminado, aún exigiendo otras condiciones complementarias.

EJEMPLO. En el círculo $0<r=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1$, sin el punto $(0,0)$, satisface $k.\ln r$ a la ecuación de LAPLACE $\Delta u=0$, y en la circunferencia es $u=0$; hay, pues, *infinitas* superficies armónicas de revolución además del plano $u\equiv 0$, única solución, según $a_{(3)}$, si se impone la regularidad. El problema de CAUCHY es *local*, es decir, sólo exige regularidad en un entorno de Γ, mientras que el de STURM-LIOUVILLE es *integral*.

Los problemas no homogéneos reaparecerán en la nota IX sobre la función de GREEN; en lo que sigue y en las notas VII y VIII nos limitaremos al estudio de problemas *homogéneos*, muy especialmente al tipo A, $u=0$ en Γ.

b) *Problemas de tipo* STURM-LIOUVILLE. *Propiedades fundamentales.* — Repasemos los resultados obtenidos en Cap. XXVII, nota III, *d*, para el caso de una sola variable, destacando analogías y diferencias. Aunque el tipo más importante de operador diferencial de segundo orden es $L[u]= =\Delta u$, incluído cuando r es constante en los dos primeros términos del tipo más general, análogo al de STURM-LIOUVILLE:

[XXVIII-131] $$L_\lambda[u]=(ru_x)_x+(ru_y)_y+[q(x,y)+\lambda\varrho(x,y)]u=0,$$

como esta generalización no complica en nada el cálculo, preferimos abordar esta teoría paralelamente a la desarrollada en Cap. XXVII, nota III, para una variable, incluyendo así algunas otras aplicaciones físicas, tales como la vibración de membranas y placas no homogéneas (notas VII y VIII). A partir del teor. 2 de Cap. XXVII, nota III, podemos seguir *mutatis mutandis* el camino ya transitado.

Sean u, v dos autofunciones correspondientes a los autovalores $\lambda_1\neq\lambda_2$, es decir:

[XXVIII-132] $$L_{\lambda_1}[u]=0 \quad , \quad L_{\lambda_2}[v]=0 \quad ;$$

restando estas relaciones después de multiplicarlas por v y u respectivamente, se obtiene:

$$[v(ru_x)_x-u(rv_x)_x]+[v(ru_y)_y-u(rv_y)_y]=(\lambda_2-\lambda_1)\varrho uv.$$

Integrando por partes en D (§ 88-6, nota 3) aparece otra integral doble, de integrando:

$$[v_xru_x-u_xrv_x]+[v_yru_y-u_yrv_y]\equiv 0 \quad ,$$

luego sólo queda la integral curvilínea sobre Γ, cuyo integrando:

$$(vru_x-urv_x)dy-(vru_y-urv_y)dx$$

es nulo en Γ por ser allí $u = v = 0$ (también es fácil probar que se anula con las condiciones generales de contorno de tipo C homogéneas), y resulta:

[XXVIII-133] $$(\lambda_2 - \lambda_1) \int\int_D \varrho uv \, dx \, dy = 0 \quad ;$$

finalmente, como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, es nula la integral, es decir: *Son ortogonales cada dos autofunciones*, respecto del núcleo ϱ sobre el dominio D (teor. 2).

Por el mismo razomiento resulta: *Todos los autovalores y autofunciones son reales, en la hipótesis* $\varrho \geqslant 0$ (teor. 4).

La normalización de cada autofunción u se hace dividiéndola por la raíz cuadrada de la norma

$$\int\int \varrho u^2 \, dx \, dy \quad ,$$

y las autofunciones φ así normalizadas, forman un sistema *ortonormal*.

Con el mismo artificio de Cap. XXVII, nota III, teor. 5, se tiene, despejando $\lambda\varrho\varphi$ de la ecuación [XXVIII-131], suponiendo $q = 0$:

$$\lambda = \lambda \int\int_D \varrho\varphi^2 \, dx \, dy = - \int\int_D [\varphi\,(r\varphi_x)_x + \varphi\,(r\varphi_y)_y] dx \, dy \quad ,$$

e integrando por partes (§ 88-6, nota 3):

[XXVIII-134] $$\lambda = \int_\Gamma \varphi r\,(\varphi_x \, dy - \varphi_y \, dx) + \int\int_D r\,(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \, dx \, dy .$$

Pero siendo $\varphi = 0$ en Γ (tipo A), es nula la integral a lo largo de Γ, y lo mismo sucede en el tipo B, luego queda la segunda, de integrando positivo. El sumando q introduce una integral:

$$- \int\int_D q\varphi^2 \, dx \, dy \geqslant 0 \quad \text{por ser} \quad q \leqslant 0 \quad ,$$

luego, subsiste la conclusión $\lambda > 0$. El primer integrando de [XXVIII-134] puede escribirse así: $-\varphi r \, \varphi_n \, ds$, siendo s una abscisa curvilínea en Γ, luego, también es $\lambda > 0$ si la condición, de tipo C, es $\varphi_n = - \alpha\varphi$ (donde $\alpha > 0$). Problema importante en el que se presenta esta última condición de contorno es el de la irradiación del calor.

Conclusión: *Si* $r > 0$, $q \leqslant 0$, *el problema lineal homogéneo de tipos* A ó B, *o también* C *con* $\varphi_n = - \alpha\varphi$, $(\alpha \geqslant 0)$ *en* Γ, *tiene sus autovalores positivos* (teor. 5).

Nótese la ausencia del teor. 3 de Cap. XXVII, nota III. Los autovalores en los problemas lineales bidimensionales *pueden tener cualquier orden de multiplicidad*, y en nota VII veremos problemas en que todos son múltiples.

VII. Autofunciones y líneas nodales de membranas. — *a*) *Problemas de contorno para la membrana.* — ¿Por qué se concede tanta atención a la ecuación del tipo de STURM-LIOUVILLE (nota VI), $(rv_x)_x + (rv_y)_y + (q + \lambda\varrho) v = 0$, y muy especialmente, para r constante, a la $\Delta v + \lambda v = 0$?

La contestación está dada por la frecuencia con que se encuentra, partiendo de problemas tan distintos como los de *vibraciones elásticas*, con o sin fuerzas exteriores, gobernados por la "ecuación hiperbólica de la onda" (cfr. § 112-6, *b*): $u_{tt} = \Delta u$ [con un término $p(x, y, t)$ si hay fuerzas exteriores], y por otra parte los problemas de *propagación del calor* y *de difusión*, regidos por la ecuación parabólica $u_t = \Delta u$ (cfr. § 112-6, *d*).

La razón es obvia, pues al aplicar el método ideado por BERNOULLI para el caso más simple, consistente en buscar soluciones de variables separadas (cfr. § 112-3, b):

$$\mathrm{u}(x, \ldots, t) = \mathrm{v}(x, \ldots) \cdot \mathrm{w}(t),$$

el factor espacial v debe satisfacer a una ecuación de este tipo $\Delta v + \lambda v = 0$ (cfr. nota V, a), y la distribución en el dominio D, sea de la elongación, temperatura, u otra perturbación en cada momento, *sólo depende de los autovalores y autofunciones, que están determinados por la forma y tamaño de* D. El factor temporal que expresa la variación en el tiempo (periódica o exponencial amortiguada), es el que distingue unos de otros fenómenos físicos.

La determinación de los autovalores λ_n de la ecuación $\Delta v + \lambda v = 0$ para cada dominio es, por tanto, previa y esencial para la integración de aquellas ecuaciones; y esos números λ_n, o bien $\sqrt{\lambda_n}$, tienen importante significado físico, distinto en cada problema, donde expresan magnitudes muy diversas (frecuencias de vibración, coeficientes de enfriamiento, etc.).

También las curvas $\mathrm{v}(x, y) = 0$ (en el caso de dos variables espaciales) tienen significación diversa en cada problema; pues siendo en ellas $\mathrm{u}(x, y, t) = 0$ para todo t, son *curvas nodales*, que permanecen inmóviles en la vibración de la membrana o lámina, o *isotermas* en el problema de la propagación del calor.

La *determinación de los autovalores y autofunciones*, es decir, la resolución de la ecuación con condición de contorno y la consiguiente determinación de las líneas nodales, solamente se ha logrado para pocos tipos de recinto, especialmente los rectangulares y circulares, que vamos a estudiar.

b) *Membrana rectangular homogénea.* — b_1) Si el dominio es $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, se obtienen infinitas soluciones de $\Delta v + \lambda v = 0$ del tipo $v = \operatorname{sen} \alpha x \cdot \operatorname{sen} \beta y$, pues cada derivada segunda reproduce v salvo un factor $-\alpha^2$, $-\beta^2$, luego α, β pueden ser números reales cualesquiera tales que $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ y (para el problema homogéneo de tipo A) queda satisfecha la condición $v = 0$ en los lados $x = 0$, $y = 0$ (por eso hemos elegido senos y no cosenos). Para satisfacerlas en los lados $x = a$, $y = b$, deben ser α y β del tipo $m\pi/a$, $n\pi/b$ (m, n enteros), luego, el problema sólo es posible para estos autovalores y autofunciones:

[XXVIII-135]
$$\begin{cases} \lambda_{m,n} = \pi^2 \left[\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2} \right], \\ v_{m,n} = \operatorname{sen} \dfrac{\pi m}{a} x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\pi n}{b} y \\ (m, n = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

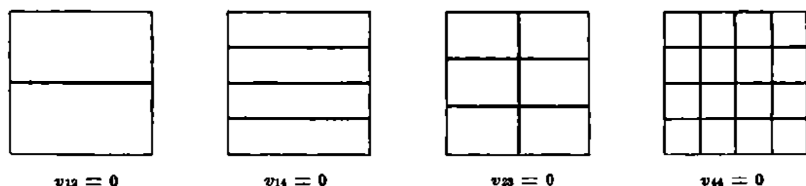
Con estas autofunciones, que forman sistema denso (§ 97-3), se construyen todas las demás como combinaciones lineales:

[XXVIII-136]
$$v = \sum\sum c_{m,n} \operatorname{sen} \frac{\pi m}{a} x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{b} y.$$

Si a/b es racional, puede haber varios valores enteros m, n que produzcan el mismo λ. Por ejemplo, para el cuadrado $a = b = \pi$ son al menos *dobles* todos los autovalores no principales ($m \neq n$), pues para $\lambda_{m,n} = \lambda_{n,m}$ corresponden dos autofunciones $v_{m,n} = \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} ny$, $v_{n,m} = \operatorname{sen} nx \cdot \operatorname{sen} my$. Los autovalores son de orden superior si la suma $m^2 + n^2$ se puede formar de varios modos; por ejemplo, la triple descomposición del número 50: $1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$ da un λ triple:

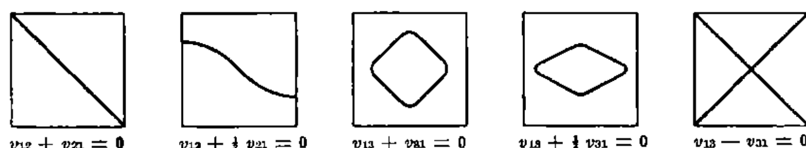
$$\lambda_{1,7} = \lambda_{5,5} = \lambda_{7,1}.$$

Las curvas nodales de la vibración definida por una solución u del problema lineal, es decir, las curvas $v(x, y) = 0$, salvo en el caso $v_{m,n} = 0$ en que están formadas por rectas paralelas a los ejes (fig. 392), adoptan formas variadísimas. Algunas curvas del tipo $v_{m,n} + h \cdot v_{n,m} = 0$ se representan en la figura 393.

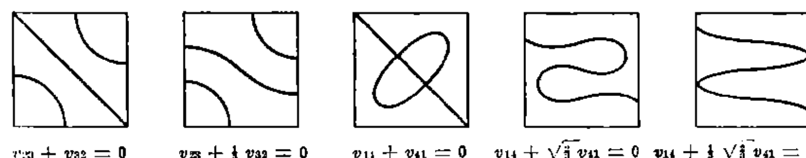


$v_{12} = 0$ $v_{14} = 0$ $v_{23} = 0$ $v_{44} = 0$

Fig. 392.



$v_{12} + v_{21} = 0$ $v_{12} + \frac{1}{2} v_{21} = 0$ $v_{13} + v_{31} = 0$ $v_{13} + \frac{1}{2} v_{31} = 0$ $v_{13} - v_{31} = 0$



$v_{23} + v_{32} = 0$ $v_{23} + \frac{1}{2} v_{32} = 0$ $v_{14} + v_{41} = 0$ $v_{14} + \sqrt{\frac{2}{3}}\, v_{41} = 0$ $v_{14} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}\, v_{41} = 0$

Fig. 393.

b_2) *Crecimiento asintótico de los autovalores.* — En virtud de [XXVIII-135] el número de autovalores $\leqslant \lambda_{m,n}$ es igual al número de puntos de coordenadas enteras contenidos en el cuadrante de elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = k^2.$$

Para los valores $k = 1/2$, 1, 3/2, elegidos en la figura 394, esos números son 3, 8, 15, respectivamente, y cada uno lleva su número de orden.

El valor que corresponde a cada punto, es el mismo de orden de la elipse en que está situado, y multiplicando k^2 por π^2 resulta el autovalor λ. Nótese cuán lentamente crecen, y obsérvese este hecho importante: la solución que en [XXVIII-136] hemos expresado por una *serie doble*, puede darse como *serie simple* si los autovalores se ordenan en sucesión creciente, como en la figura 394.

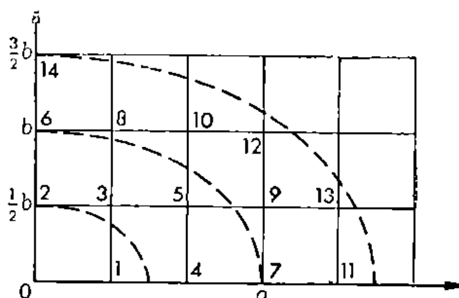


Fig. 394.

Asintóticamente, el número de autovalores $\leqslant \lambda = \pi^2 k^2$ es el área del cuadrante de elipse, o sea: $n = \pi abk^2/4 = \lambda ab/(4\pi)$. Esto se puede expresar de otro modo: $\lambda_n/n \to 4\pi/(ab)$.

Resulta así este hecho singular: *el crecimiento asintótico de los autovalores de la lámina rectangular, no depende de su forma* (*es decir de la razón* a/b), *sino de su área* $a \cdot b$, *y es inversamente proporcional a ella.* Esta propiedad se puede generalizar a toda forma de recinto: el crecimiento de λ_n, o la expresión asintótica de λ_n *depende del área y no de la forma.* En general, si es A el área se verifica: $\lambda_n/n \to 4\pi/A$.

El significado matemático del mayor o menor crecimiento de los autovalores es el mismo en los problemas de vibraciones y de propagación del calor, que se traduce en el crecimiento rápido o lento de las series; en cada problema físico tiene importancia distinta. Así, en la membrana vibrante, la anulación de armónicos graves (frecuencias pequeñas) será tanto mayor cuanto más extensa, y una membrana pequeña produce sonidos agudos.

c) *Membrana y lámina circular.* — Pasando a coordenadas polares (r, φ), la ecuación cartesiana $\Delta v + \lambda v = 0$ se transforma por [92-33] en ésta:

[XXVIII-137]
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0, \\ \mathrm{v}(r, \varphi + 2\pi) = \mathrm{v}(r, \varphi), \end{cases}$$

expresando esta periodicidad que v es función uniforme del punto. Hay dos casos que conducen a fórmulas muy distintas:

c$_1$) *Problema circular.* — Llamamos así al problema en que v no depende de φ; tal sucede cuando el recinto es circular, y no sólo la condición de contorno (que supondremos de tipo A), sino también las condiciones iniciales, son independientes del argumento φ; y también lo es, por tanto, v. Reducido así el problema a una sola variable r, la función $\mathrm{v}(r)$ está determinada por estas condiciones:

[XXVIII-138]
$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + k^2 v = 0, \qquad \mathrm{v}(1) = 0.$$

Dividiendo por k^2 y poniendo $k \cdot r = x$, se obtiene la ecuación de Bessel (Cap. XXVII, nota I):

[XXVIII-139]
$$\mathrm{J}_0''(x) + \frac{1}{x}\mathrm{J}_0'(x) + \mathrm{J}_0(x) = 0, \qquad \mathrm{J}_0(k) = 0,$$

cuyas soluciones $\mathrm{J}_0(x) = \mathrm{J}_0(kr)$ vienen dadas por la función de Bessel de primera especie de orden 0.

La condición de contorno $\mathrm{v}(1) = \mathrm{J}_0(k) = 0$ indica que *los autovalores del problema* [XXVIII-138] *son los ceros de* J_0:

$$k_1 = 2{,}40; \quad k_2 = 5{,}52; \quad k_3 = 8{,}65; \quad k_4 = 11{,}79;$$

y las correspondientes autofunciones son $\mathrm{J}_0(k_n r)$.

Como consecuencia de lo que hemos de ver en nota IX, *g*, existen infinitos ceros, que por Cap. XXVII, nota III, *d*, son positivos y cada par de autofunciones son ortogonales en $[0, 1]$ respecto del núcleo r, es decir:

[XXVIII-140]
$$\int_0^1 r \cdot \mathrm{J}_0(k_i r)\,\mathrm{J}_0(k_j r)\,dr = 0, \qquad (i \neq j);$$

en efecto, el término ρ de [XXVII-56] es aquí la variable r, como se ve escribiendo [XXVIII-138] así: $(rv_r)_r + \lambda rv = 0$.

c_2) *Problema general sobre recinto circular.* — Si la condición de contorno en [XXVIII-137] no es circular, sino del tipo C general:

[XXVIII-141] $$v_r(1, \varphi) + \alpha(\varphi)\, v(1, \varphi) = 0,$$

el problema es muy difícil; la teoría se limita al tipo A: $v(1, \varphi) = 0$, o al tipo B: $v_r(1, \varphi) = 0$, que trataremos sucesivamente.

c_{21}) *Tipo* A. — Ecuación y condición de uniformidad [XXVIII-137], y condición A de contorno:

[XXVIII-142] $$v(1, \varphi) = 0.$$

Ensayemos la separación de variables $v(r, \varphi) = y(r) \,.\, w(\varphi)$, que conduce, en efecto, a una solución con dos factores de distinta variable, debiendo ser, por tanto:

$$\frac{r^2[y''(r) + r^{-1}y'(r) + \lambda y(r)]}{y(r)} = -\frac{w''(\varphi)}{w(\varphi)} = \text{constante.}$$

Como v es función uniforme del punto (condición [XXVIII-137]), también debe serlo w, por tanto:

[XXVIII-143] $$w(\varphi + 2n\pi) = w(\varphi),$$

luego esa constante debe ser positiva (§ 108-1), y llamándola n^2, resulta la ecuación:

$$w''(\varphi) + n^2 w(\varphi) = 0, \quad \text{de donde} \quad w = a \cos n\varphi + b \operatorname{sen} n\varphi,$$

y para que haya período 2π, debe ser n *entero.*

La ecuación que determina la función y en $[0, 1]$ para el valor fijo n, con su condición de contorno, es:

[XXVIII-144] $$y'' + \frac{1}{r} y' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right) y = 0;$$
$$y \textit{ continua en } r = 0, \qquad y(1) = 0.$$

He aquí un nuevo tipo de condición mixta de contorno: la *continuidad* en un extremo del intervalo, punto singular de la ecuación, y el *valor* en el otro extremo.

Esta ecuación [XXVIII-144] sería la de BESSEL (Cap. XXVII, nota I) si en vez de λ figurase 1, y esto se consigue si $\lambda = k^2 > 0$, adoptando la nueva variable $\varrho = kr$, pues en los dos primeros términos aparece el factor $k^2 = \lambda$, y dividiendo por él, la ecuación *respecto de la variable* ϱ es:

[XXVIII-145] $$y'' + \frac{1}{\varrho} y' + \left(1 - \frac{n^2}{\varrho^2}\right) y = 0;$$
$$y \text{ continua en } \varrho = 0, \qquad y(k) = 0.$$

La solución regular en 0 es la función de BESSEL de orden n, $J_n(\varrho)$. Restituyendo la variable r resulta $J_n(kr)$ como autofunción, si cumple la condición de contorno $J_n(k) = 0$ (la otra la cumple, pues es continua en el punto $r = 0$).

Los cuadrados de los infinitos ceros k_{n_i} de las infinitas funciones J_n son, pues, los autovalores *simples* (puesto que cada uno corresponde a una sola función) y la autofunción que define k_{n_i}, es

$$J_n(\varrho_i) = J_n(k_{n_i} r).$$

Estas propiedades resultan de la teoría general desarrollada en Cap. XXVII, nota III, d; y en particular, teor. 2, resulta la ortogonalidad que comprende a la [XXVIII-140]:

[XXVIII-146] $$\int_0^1 r \,.\, J_n(k_{n_i} r) J_n(k_{n_j} r)\, dr = 0, \qquad i \neq j,$$

y vale también en el caso general de condición de contorno tipo C, o sea, cuando k_{n_i} son las raíces de la ecuación: $\alpha J_n + J'_n = 0$.

Como las autofunciones $v_n(r, \varphi)$ del problema para la condición de contorno [XXVIII-142], que corresponden al autovalor k_{n_i} son:

[XXVIII-147] $$J_n(k_{n_i} r)\cos n\varphi, \qquad J_n(k_{n_i} r)\,\mathrm{sen}\, n\varphi,$$

y toda combinación lineal de ellas, resulta: *todos los autovalores son, por lo menos, dobles.*

Las *líneas nodales* para estas funciones [XXVIII-147] forman un haz de rectas por el origen, y argumentos:

$$\varphi = \pi/n, \quad 2\pi/n, \quad 3\pi/n, \quad \ldots, \quad (n-1)\pi/n,$$

o bien:

$$\varphi = \pi/(2n), \quad 3\pi/(2n), \quad 5\pi/(2n), \quad \ldots, \quad (2n-1)\pi/(2n),$$

en que se anula el segundo factor; y el haz de circunferencias concéntricas en que se anula el primero:

$$r = k_{n_j}/k_{n_i}, \quad (n, i \text{ fijos}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, i).$$

Para las funciones compuestas de dos o más [XXVIII-147]:

[XXVIII-148] $$v(r, \varphi) = \Sigma_n \Sigma_i J_n(k_{n_i} r) \, . \, (a_n \cos n\varphi + b_n \,\mathrm{sen}\, n\varphi),$$

ya en el caso de dos sumandos se presentan curvas nodales muy complicadas al crecer n, y para más sumandos no parece que hayan sido calculadas.

c_{22}) *Tipo* B. — Ecuación y condición de uniformidad [XXVIII-137], y condición de contorno:

$$v_r(1, \varphi) = 0, \qquad \text{o sea:} \qquad y'(1) = 0.$$

Este caso se presenta en la propagación del calor cuando el disco está aislado, y en el problema de la vibración de lámina empotrada.

La única modificación que debe hacerse en lo expuesto para el tipo A, es que la condición $y'(1) = 0$, o sea,

$$J_n'(k) = 0,$$

determina otros ceros k_i, es decir, distintos autovalores, pero la solución del problema tiene la misma forma [XXVIII-148].

c_{23}) *Tipo* C. — Ecuación y condición de uniformidad [XXVIII-137], y condición de contorno:

$$v_r(1, \varphi) + \alpha v(1, \varphi) = 0, \qquad (\alpha \textit{ constante}).$$

La ecuación que determina los autovalores $\lambda_{n_i} = k_{n_i}^2$ es:

$$kJ'_n(k) + \alpha J_n(k) = 0,$$

pero subsiste la forma [XXVIII-148] de la solución.

VIII. **Equilibrio y vibraciones de membranas y placas.** — *a*) *Ecuaciones de equilibrio y movimiento de la membrana.* — Si se imagina un pequeño corte ideal en la membrana tensa, sería preciso introducir una fuerza entre los dos bordes del mismo para conservar el equilibrio; esa fuerza por unidad de longitud es función del punto y se llama *tensión* $\tau(x, y)$.

Si además de esa fuerza elástica actúa sobre la membrana una carga $p(x, y)$ kg/cm² (por ejemplo, el propio peso), la ecuación de equilibrio (cfr. *c* y nota V) es:

[XXVIII-149] $(ru_x)_x + (ru_y)_y + \mathrm{p}(x,y) = 0,$

siendo $u = \mathrm{u}(x,y)$ la ecuación de la superficie de equilibrio.

La ecuación del movimiento a que debe satisfacer $\mathrm{u}(x,y,t)$, se deduce por el método de D'ALEMBERT, sumando a la carga (que puede variar con t) la resistencia de inercia $-\varrho(x,y)u_{tt}$, siendo ϱ la densidad superficial; resulta así:

[XXVIII-150] $\varrho(x,y)u_{tt} = (ru_x)_x + (ru_y)_y + \mathrm{p}(x,y,t).$

Las *vibraciones libres* son los movimientos producidos por la simple alteración del equilibrio, sin ulterior introducción de fuerzas exteriores ($p = 0$), por la sola acción de la fuerza elástica; están, pues, determinadas por la función inicial $\mathrm{u}(x,y,0) = \mathrm{f}(x,y)$ y la velocidad inicial $\mathrm{u}_t(x,y,0) = \mathrm{g}(x,y)$.

Si el propio peso de la membrana produce deformación sensible, basta calcularla según [XXVIII-150] (ϱ = masa unitaria) y sumarla a la solución $\mathrm{u}(x,y,t)$ de la ecuación de las vibraciones libres. Es el método usual para resolver problemas no homogéneos.

Vamos a estudiar sucesivamente estos casos importantes:

Vibración libre de membrana homogénea (ϱ, r, constantes; $p = 0$):

[XXVIII-151] $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad a^2 = r/\varrho.$

Vibración libre de membrana no homogénea con resistencia elástica q:

[XXVIII-152] $\varrho u_{tt} = (ru_x)_x + (ru_y)_y + qu.$

Vibración forzada de membrana homogénea:

[XXVIII-153] $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + \mathrm{p}(x,y,t), \quad a^2 = r/\varrho.$

b) *Vibraciones libres de membranas homogéneas.* — Ya hemos visto que la función $\mathrm{u}(x,y,t)$ debe satisfacer en el recinto a la ecuación $u_{tt} = a^2\Delta u$; y en el contorno, a la $u = 0$.

Fijados x, y, representa u como función de t el movimiento vibratorio de ese punto (x,y). El problema es, como ahora veremos, *de contorno* de tipo C respecto de las variables x, y, y es de tipo CAUCHY, o sea, con dos condiciones *iniciales* para la variable t, que son: $\mathrm{u}(x,y,0) = \mathrm{f}(x,y)$, $\mathrm{u}_t(x,y,0) = \mathrm{g}(x,y)$.

Siguiendo la pauta que dió BERNOULLI para la cuerda vibrante, que hemos seguido en nota V, buscaremos soluciones de variables separadas $\mathrm{u}(x,y,t) = \mathrm{z}(t)\mathrm{v}(x,y)$; y como al derivar respecto de las variables espaciales, es constante el segundo factor temporal y viceversa, la ecuación [XXVIII-151] se transforma en $z_{tt}v = a^2 z\Delta v$, de donde:

[XXVIII-154] $$\frac{\Delta v}{v} = \frac{z_{tt}}{a^2 z} = \text{const.}$$

Llamando $-\lambda$ a esta constante, la ecuación [XXVIII-149] se ha desdoblado en estas dos:

[XXVIII-155] $z_{tt} + \lambda a^2 z = 0, \quad \Delta v + \lambda v = 0;$ (*más condición* C).

La primera es la ya conocida del movimiento armónico, cuya solución general, con dos coeficientes arbitrarios, es:

[XXVIII-156] $\mathrm{z}(t) + a_0 \cos kat + b_0 \operatorname{sen} kat,$ poniendo $\lambda = k^2;$

siendo legítima esta hipótesis $\lambda > 0$, pues solamente podemos dar a λ los valores que hagan posible la segunda ecuación, conjuntamente con la condición de contorno, es decir, los autovalores λ_n de ese problema lineal, los cuales existen, como se ha visto, y son positivos (nota VI, *b*), estando esto de acuerdo con el significado físico de pequeña deformación, mientras que para $\lambda < 0$ resultaría z con término exponencial infinitamente creciente (§ 108 1).

Las *frecuencias* de los respectivos movimientos vibratorios, únicos posibles, son proporcionales a k_n. Tal condición de contorno C puede ser de diversos tipos: el más importante es el de la membrana tensa de contorno Γ en el plano x, y, es decir, $u(P) = 0$ sobre todo punto P de Γ (tipo A); de otros tipos hablaremos después.

Puesto que para cada λ_n tenemos infinitas soluciones del tipo [XXVIII-156] con dos coeficientes arbitrarios, siguiendo la pauta usual formaremos una serie

[XXVIII-157] $$u(x, y, t) = \sum (a_n \cos k_n at + b_n \operatorname{sen} k_n at) \,.\, v_n(x, y),$$

que será derivable término a término dos veces si se eligen los coeficientes a_n b_n, de modo que se satisfagan las condiciones iniciales:

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y),$$

si f y g son desarrollables en series de autofunciones v_n (nota VI, *b*; § 97; cfr. Ap. II-4):

[XXVIII-158] $$f(x, y) = \sum a_n v_n(x, y), \quad g(x, y) = \sum k_n b_n v_n(x, y)$$

y las series derivadas primeras y segundas de estas dos son *uniformemente convergentes*; pues entonces, siendo legítima la derivación término a término, y satisfaciendo cada término a la ecuación [XXVIII-151], otro tanto ocurrirá con la suma, y esta función cumple las condiciones iniciales [XXVIII-158].

En el caso más importante de la membrana tensa de contorno Γ situado en el plano $u = 0$, las funciones f y g, que definen la *elongación inicial y velocidad inicial*, deben cumplir las condiciones evidentes $f(P) = 0$, $g(P) = 0$ sobre Γ; y lo mismo dicen los desarrollos [XXVIII-158], pues $v_n(P) = 0$, por ser soluciones del problema lineal.

Caso menos importante es el de *ligadura elástica* del contorno, expresada por una condición $u_n = \alpha(P)u$ sobre Γ, pero ésta tiene excepcional importancia en la propagación del calor.

c) Sobre el caso de contorno alabeado. — El lector notará la omisión del caso del contorno alabeado, definido por una función $u(P)$ sobre los puntos P del circuito plano; pero tal condición *no es homogénea* y además el problema no encuadra en las ecuaciones [XXVIII-149] ó [XXVIII-150], sólo válidas para pendientes muy pequeñas, pues en la deducción sólo se consideran términos de *primer* grado en u_x, u_y. El caso de contorno alabeado conduce a la ecuación, más complicada, de las superficies de área mínima (§ 113-5, *d*).

El cálculo de los autovalores λ_n y autofunciones v_n ha sido efectuado en nota VII para los casos importantes de membrana rectangular y circular. Para la membrana elíptica se puede aplicar el método variacional (ver nota X, 3, *d*).

d) Equilibrio y vibración de membranas rectangulares. — El estudio hecho en nota VII de la ecuación $\Delta v + \lambda v = 0$ es aplicable tanto al problema de la propagación del calor como al de la vibración, el cual está definido por la ecuación [XXVIII-151] en el caso más sencillo, o bien:

[XXVIII-159] $$\left\{ \begin{array}{ll} & u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + qu \\ \textit{Contorno}: & \textit{Condiciones iniciales}: \\ u = 0 \text{ en } \Gamma & u(x, y, 0) = f, \quad u_t(x, y, 0) = g \end{array} \right.$$

si hay resistencia elástica proporcional a la deformación u, con coeficiente $q(x, y)$. Separando variables:

$$u = v(x, y)\tau(t) \qquad \text{resulta:} \qquad v\tau'' = (a^2\Delta v + qv)\tau(t)$$

de donde:

$$\frac{a^2\Delta v + qv}{v} = \frac{\tau''}{\tau} = -\lambda = -k^2,$$

y la ecuación [XXVIII-159] se desdobla en:

$$\tau'' + \lambda\tau = 0, \quad \textit{de donde} \quad \tau = a_0 \cos kt + b_0 \operatorname{sen} kt,$$
$$a^2\Delta v + qv + \lambda v = 0, \quad \textit{con} \quad v = 0 \quad \textit{en } \Gamma.$$

El método de las soluciones particulares, productos de senos, sólo vale si $q = 0$; y para este caso, llamando α, β a los lados del rectángulo, se tiene la solución (que también puede escribirse como serie simple):

[XXVIII-160]
$$u(x, y, t) = \Sigma\Sigma \operatorname{sen} \frac{\pi m}{a\alpha} x \,.\, \operatorname{sen} \frac{\pi n}{a\beta} y \;(a_{mn} \cos k_{mn}t + b_{mn} \operatorname{sen} k_{mn}t)$$

con coeficientes determinados por los desarrollos:

$$f(x, y) = \Sigma\Sigma a_{mn} \operatorname{sen} \frac{\pi m}{a\alpha} x \,.\, \operatorname{sen} \frac{\pi n}{a\beta} y,$$

$$g(x, y) = \Sigma\Sigma b_{mn} k_{mn} \operatorname{sen} \frac{\pi m}{a\alpha} x \,.\, \operatorname{sen} \frac{\pi n}{a\beta} y.$$

El problema del equilibrio se reduce a integrar la ecuación:

[XXVIII-161] $$a^2(u_{xx} + u_{yy}) + p(x, y) = 0,$$

de tipo Poisson; esto se logra (nota IX), mediante la función de Green.

e) Equilibrio y vibraciones de membranas circulares. — Tanto la vibración de la membrana circular, como la propagación del calor en disco circular, conducen al mismo problema de contorno resuelto en nota VII, c; ahora estudiaremos la vibración, empleando como entonces coordenadas polares y la expresión [92-33] para Δu (independiente de z).

Caso general: $u(r, \varphi, t)$. Ecuación del movimiento vibratorio:

[XXVIII-162] $$u_{tt} = a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \right)$$

Condiciones iniciales: $u(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi)$, $u_t(r, \varphi, 0) = g(r, \varphi)$.

De contorno: $u(1, \varphi) = 0$.

Solución:

[XXVIII-163] $$u(r, \varphi, t) =$$
$$= \Sigma\Sigma J_n(k_{n_i} r)\,(a_n \cos n\varphi + b_n \operatorname{sen} n\varphi)\,(a_{n_i} \cos k_{n_i} t + b_{n_i} \operatorname{sen} k_{n_i} t),$$

donde los coeficientes se calcularán mediante las condiciones iniciales:

$$f(r, \varphi) = \Sigma\Sigma a_{n_i}\, J_n(k_{n_i} r)\,(a_n \cos n\varphi + b_n \operatorname{sen} n\varphi),$$

$$g(r, \varphi) = \Sigma\Sigma b_{n_i}\, k_{n_i}\, J_n(k_{n_i} r)\,(a_n \cos n\varphi + b_n \operatorname{sen} n\varphi).$$

Caso especial de problema circular. — Funciones iniciales: $f(r)$, $g(r)$:

Función: $u(r, t)$

Ecuación: $$u_{tt} = a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right)$$

Condiciones iniciales: $u(r, 0) = f(r)$, $u_t(r, 0) = g(r)$

De contorno: $u(1, t) = 0$, $u(0, t) = \text{const.}$

Poniendo

$$u = \mathrm{v}(r)\zeta(t), \quad \text{de donde} \quad v\zeta'' = a^2\left(v'' + \frac{1}{r}v'\right)\zeta.$$

la ecuación se desdobla en:

$$\zeta'' + \lambda a^2\zeta = 0, \quad \zeta = a_n \cos k_n at + b_n \operatorname{sen} k_n at,$$

$$v'' + \frac{1}{r}v' + \lambda v = 0, \quad v_n = \mathrm{J}_0(k_n r), \quad \mathrm{J}_0(k_n) = 0.$$

La solución es:

[XXVIII-164] $u = \sum \mathrm{J}_0(k_n r)\,(a_n \cos k_n at + b_n \operatorname{sen} k_n at)$,

estando los coeficientes determinados por los desarrollos:

$$\mathrm{f}(r) = \sum a_n \mathrm{J}_0(k_n r), \quad \mathrm{g}(r) = a\sum b_n k_n \mathrm{J}_0'(k_n r),$$

que dan:

[XXVIII-165]
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2z}{\mathrm{J}_1^2(k_n)}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{f}(r)\,\mathrm{J}_0(k_n r)\,\mathrm{d}r \\[2ex] b_n = \dfrac{2}{ak_n\mathrm{J}_1^2(k_n)}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{g}(r)\,\mathrm{J}_0(k_n r)\,\mathrm{d}r \end{cases}$$

Equilibrio de la membrana circular. — La integración de la ecuación de POISSON

$$a^2\Delta u + \mathrm{p}(x, y) = 0$$

se hace mediante la función de GREEN, que es conocida para el círculo (nota IX, h_2).

En el caso especial en que u no dependa de φ, es decir, sea $\mathrm{u}(r)$, y la función de carga sea $\mathrm{p}(r)$, la ecuación

$$u'' + \frac{1}{r}u' + \mathrm{p}(r) = 0$$

se integra, como veremos, por la fórmula [XXVIII-174], mediante la función de GREEN (nota IX) correspondiente al intervalo $(0, 1)$.

f) Vibraciones libres de membranas no homogéneas. — La ecuación de la vibración de la membrana no homogénea es:

[XXVIII-166] $\varrho u_{tt} = (ru_x)_x + (ru_y)_y + qu$

[$\varrho(x, y)$ densidad superficial de masa en cada punto; $\mathrm{r}(x, y)$ producto del módulo de elasticidad por el espesor; $\mathrm{q}(x, y)$ resistencia elástica]. Con el método disociativo ponemos $u = \mathrm{v}(x, y)\mathrm{w}(t)$, y la ecuación se desdobla en dos:

$$\mathrm{w}''(t) + \lambda\mathrm{w}(t) = 0, \quad \text{de donde}$$

[XXVIII-167] $\mathrm{w}(t) = a_0 \cos kt + b_0 \operatorname{sen} kt, \quad (k^2 = \lambda)$,

y

[XXVIII-168] $(rv_x)_x + (rv_y)_y + [\mathrm{q}(x, y) + \lambda\varrho(x, y)] = 0,$

$$\text{con} \quad \mathrm{v(P)} = 0 \quad \text{en } \Gamma.$$

Los valores k_n que deben ponerse en [XXVIII-167] son las raíces cuadradas de los autovalores λ_n de [XXVIII-168]; su existencia ha sido demostrada para ciertos recintos en nota VII.

Si son $\mathrm{v}_n(x, y)$ las correspondientes autofunciones, la solución de [XXVIII-166] es, por tanto:

[XXVIII-169] $\mathrm{u}(x, y, t) = \sum(a_n \cos k_n t + b_n \operatorname{sen} k_n t) \cdot \mathrm{v}_n(x, y)$,

y si $f(x, y)$, $g(x,y)$ representan la elongación inicial y velocidad inicial, los coeficientes están determinados por los desarrollos:

[XXVIII-170] $f(x, y) = \sum a_n v_n(x, y)$, $g(x, y) = \sum b_n k_n v_n(x, y)$,

calculándose los coeficientes por las fórmulas:

[XXVIII-171] $a_n = \int\int \varrho f v_n \, dx \, dy, \qquad b_n = \frac{1}{k_n}\int\int \varrho g v_n \, dx \, dy.$

γ) Vibraciones de placas. — Por razonamientos análogos a los de otros problemas, o bien por método variacional, se llega a la ecuación:

$$u_{tt} + u_{x^4} + 2u_{x^2y^2} + u_{y^4} = 0, \quad \text{o sea:} \quad u_{tt} + \Delta\Delta u = 0,$$

y separando variables:

$$u = v(x, y) z(t)$$

resulta:

$$vz'' + z\Delta\Delta v = 0, \quad \text{de donde:} \quad \frac{-z''}{z} = \frac{\Delta\Delta v}{v} = \lambda = k^2,$$

y la ecuación se desdobla en estas dos:

$$z'' + \lambda z = 0, \qquad \Delta\Delta v - \lambda v = 0.$$

La primera da el factor periódico $z = a_0 \cos kt + b_0 \operatorname{sen} kt$, donde k está sujeta a las condiciones de contorno de la segunda. Si λ_1 y λ_2 son autovalores, v_1, v_2 las correspondientes autofunciones, se demuestra la ortogonalidad de éstas suponiendo estas *dos* condiciones de contorno: $v = 0$, $\partial v/\partial n = 0$. Esta novedad apareció ya en la línea elástica para la ecuación de cuarto orden (nota V).

Placa circular. — En coordenadas polares el laplaciano se puede escribir así:

$$\Delta = D'' + \frac{1}{r} D' \quad ;$$

la ecuación $\Delta\Delta v - \lambda v = 0$ adopta esta forma simbólica:

$$\left(D'' + \frac{1}{r} D' - k \right)\left(D'' + \frac{1}{r} D' + k \right) v = 0, \qquad \lambda = k^2,$$

y además de las soluciones $J_0(kr)$ aparecen $J_0(ikr)$. El estudio, que desborda nuestro cuadro, puede verse en COURANT-HILBERT (cit. en Cap. XVI, nota IV, 4), vol. I, Cap. V, § 6.

IX. Función de Green de un problema de Sturm-Liouville. — *a) Definición y existencia.* — Hemos visto (Cap. XXVII, nota III, c_1) que el problema diferencial homogéneo dado por la ecuación

[XXVIII-172] $L[y] = [r(x) . y']' + q(x) . y = 0,$

con las condiciones C de contorno:

[XXVIII-173] $\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0,$

carece de solución si es $\Delta \neq 0$, siendo Δ el determinante dado por [XXVII-52]. Pero esta imposibilidad se vence con el auxilio de adecuadas soluciones fundamentales (§ 107-4, b) obtenidas para cada ξ, $a < \xi < b$, buscando sendas soluciones de la ecuación $L[y] = 0$ partiendo de dos independientes y_1, y_2 así:

$$\begin{aligned} &en\ (a, \xi): \quad g_1(x) = c_1 y_1 + d_1 y_2 \quad , \\ &en\ (\xi, b): \quad g_2(x) = c_2 y_1 + d_2 y_2 \quad , \end{aligned}$$

de modo que $g_1(x)$ cumpla la primera condición [XXVIII-173] en a,

prescindiendo del extremo ξ, y $g_2(x)$ sólo la segunda en el extremo b. Los dos problemas que conducen a g_1 y g_2 son determinados (salvo factor arbitrario), pues en cada uno el sistema [XXVII-51] se reduce a una sola ecuación que determina la razón de las dos constantes.

Si formamos ahora en (a, b) la función $g(x)$ con las $g_1(x)$ y $g_2(x)$ definidas en sus respectivos intervalos, (salvo los dos factores arbitrarios), logramos la continuidad imponiendo en el punto ξ de soldadura la condición $g_1(\xi) = g_2(\xi)$ que se logra multiplicando una de ellas por un número. Lograda la continuidad de $g(x)$ el punto ξ es anguloso, pues si en él fuese $g_1'(\xi) = g_2'(\xi)$ la función $g(x)$ satisfaría, incluso en ξ, a la ecuación $L[y] = 0$ y a las condiciones [XXVIII-173] en a y b, luego sería $\Delta = 0$ contra lo supuesto. Hay, pues, en ξ, un salto $g_2'(\xi^+) - g_1'(\xi^-) \neq 0$; y como todavía podemos multiplicar por un coeficiente numérico cualquiera, se puede disponer de él de modo que el salto de la derivada en ξ, tenga precisamente el valor $1/r(\xi)$. La función así construída $G(x)$ depende del parámetro ξ; y si lo hacemos variar en (a, b) resulta determinada la *función de* GREEN del problema de contorno, cuya utilidad vamos a probar en los párrafos siguientes.

Explicada la génesis de la función y demostrada su existencia definámosla con toda precisión:

Función de GREEN $G(x, \xi)$ del operador diferencial $L[u]$ con condiciones homogéneas de contorno [XXVIII-173] en el intervalo (a, b) es una función $G(x, \xi)$ de cada par de puntos (x, ξ) del intervalo, que cumple estas condiciones:

1ª) Para cada ξ es $G(x, \xi)$ función *continua* de x en (a, b) y satisface a las condiciones de contorno [XXVIII-173] en los extremos a, b;

2ª) Las derivadas G', G'' respecto de x son continuas en todo punto $x \neq \xi$; en el punto ξ hace G' un salto, que es precisamente $1/r(\xi)$;

3ª) Para todo $x \neq \xi$, satisface G a la ecuación homogénea $L[G] = 0$ respecto de la variable x.

b) *Cálculo de las constantes.* — Como complemento de la demostración anterior, es útil ejercicio el cálculo efectivo de c_1, d_1, c_2, d_2. Basta escribir la matriz del sistema originado así:

Condiciones		Ecuaciones respectivas
$g_1(\xi) = g_2(\xi)$	$\rightarrow$	$c_1 y_1(\xi) + d_1 y_2(\xi) - c_2 y_1(\xi) - d_2 y_2(\xi) = 0,$
$\alpha g_1(a) + \beta g_1'(a) = 0$	$\rightarrow$	$c_1[\alpha y_1(a) + \beta y_1'(a)] + d_1[\alpha y_2(a) + \beta y_2'(a)] = 0,$
$\gamma g_2(b) + \delta g_2'(b) = 0$	$\rightarrow$	$-c_2[\gamma y_1(b) + \delta y_1'(b)] - d_2[\gamma y_2(b) + \delta y_2'(b)] = 0,$

dando:

$$\left\| \begin{matrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ \alpha y_1(a) + \beta y_1'(a) & \alpha y_2(a) + \beta y_2'(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma y_1(b) + \delta y_1'(b) & \gamma y_2(b) + \delta y_2'(b) \end{matrix} \right\|$$

Los valores buscados son, pues, proporcionales a los cuatro determinantes de tercer orden de esta matriz de cuatro columnas encabezadas por $y_1(\xi)$, $y_2(\xi)$, $y_1(\xi)$, $y_2(\xi)$, con signos adecuados (§ 15-6, *d*); y la razón de proporcionalidad queda determinada por la nueva condición

$$c_2 y_1'(\xi) + d_2 y_2'(\xi) - c_1 y_1'(\xi) - d_1 y_2'(\xi) = \frac{1}{r(\xi)}.$$

El lector podrá ejercitarse en este sencillo cálculo, hasta llegar a la expresión de las cuatro constantes, que no necesitamos para nuestro problema.

e) Solución de $L[y]=h(x)$ por emanantes de la función de GREEN. — Si la función $y(x)$ es *emanante* (al. *Quellenmässig dargestellte Funktion*) de G, es decir, transformada de una función continua $h(x)$ por el operador $G(x,\xi)$ en la forma:

$$[XXVIII\text{-}174] \quad y(x)=\int_a^b G(x,\xi).\,h(\xi)d\xi, \quad h(\xi) \textit{ continua en } (a,b),$$

vimos (§ 107-4, *b*, teor.) que $y(x)$ es una solución de la ecuación no homogénea $L[y]=h(x)$. Más precisamente tenemos:

TEOR. 1. *La función emanante de* G *dada por* [XXVIII-174], *satisface a la ecuación* $L[y]=h(x)$ *y a las* c o n d i c i o n e s *de contorno* [XXVIII-173].

Basta observar que en a y en b se anula y ó y' por anularse G ó G'; y en general cumple y la misma condición de contorno [XXVIII-173] que G.

TEOR. 2. *Recíprocamente, la única función que satisface a la ecuación no homogénea* $L[y]=h(x)$ *y a las condiciones homogéneas de contorno* [XXVIII-173], *es precisamente* [XXVIII-174].

La demostración se basa en la *fórmula de* GREEN:

$$[XXVIII\text{-}175] \quad \int_a^b (vL[u]-uL[v])dx=\Big[\, r(vu'-uv')\,\Big]_a^b,$$

identidad evidente si $L[u]=(ru')'$, pues el binomio integrando es la derivada de $v(ru')-u(rv')$, y válida también si $L[u]=(ru')'+qu$, pues este nuevo término se elimina al restar.

Si $y(x)$ es solución de $L[y]=h(x)$ y cumple las condiciones de contorno [XXVIII-173], basta aplicar la fórmula de GREEN [XXVIII-175] en los intervalos (a,ξ), (ξ,b), poniendo $u=y(x)$, $L[u]=h(x)$, y para ξ fijo $v=G(x,\xi)$:

$$\int_a^\xi g_1(x,\xi)h(x)dx=\Big[\, r(y'g_1-yg_1')\,\Big]_a^\xi=$$
$$=r(\xi)\,[y'(\xi)g_1(\xi,\xi)-y(\xi)g_1'(\xi,\xi)] \quad ,$$
$$\int_\xi^b g_2(x,\xi)h(x)dx=\Big[\, r(y'g_2-yg_2')\,\Big]_\xi^b=$$
$$=-\,r(\xi)\,[y'(\xi)g_2(\xi,\xi)-y(\xi)g_2'(\xi,\xi)] \quad ,$$

pues en a es nulo el primer paréntesis por cumplir g_1 é y la condición $\alpha y(a)+\beta y'(a)=0$; y análogamente se anula en b el segundo paréntesis. Sumando y teniendo en cuenta que

$$g_1(\xi,\xi)=g_2(\xi,\xi), \quad g_2'(\xi,\xi)-g_1'(\xi,\xi)=\frac{1}{r(\xi)}$$

resulta:

$$[XXVIII\text{-}176] \qquad \int_a^b G(x,\xi)h(x)dx=y(\xi).$$

El resultado dado por el teorema 1 y su recíproco 2, es uno de los más fecundos y elegantes de toda esta rama del Análisis. En primer lugar nos da la siguiente solución del problema lineal no homogéneo:

Problema lineal:	Solución:
$L[y]=h(x)$; *y condición* C;	$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)h(\xi)d\xi$

en el caso en que $L[y] = 0$ no la tiene, es decir, resulta el problema correlativo al de la regla de CRAMER. Pero además demuestra la equivalencia entre estos dos hechos: ser $y(x)$ *emanante* de G, y ser *solución* del problema lineal. Dos capítulos que parecían independientes quedan así fundidos en uno solo. Esta llave nos da ahora el acceso a una copiosa cosecha de resultados importantes.

d) Simetría de la función de GREEN. — Se observa que las fórmulas [XXVIII-174] y [XXVIII-176] no son idénticas, pues en una actúa x como variable y en otra ξ; esta disparidad desaparece apenas demostremos la simetría de ambas variables.

Sean $\xi_1 < \xi_2$ dos puntos interiores de (a, b) y definamos las funciones

$$G_1 = G(x, \xi_1),$$
$$G_2 = G(x, \xi_2).$$

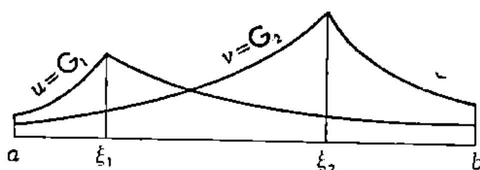


Fig. 395.

Aplicada la fórmula [XXVIII-175] de GREEN, se anula el primer miembro, por ser $L[G_1] = 0$, $L[G_2] = 0$ en todo punto x distinto de ξ_1, ξ_2; luego en los tres intervalos (a, ξ_1), (ξ_1, ξ_2), (ξ_2, b) es (fig. 395):

$$r(a)[G(a,\xi_2)G'(a,\xi_1) - G(a,\xi_1)G'(a,\xi_2)] = r(\xi_1)[G(\xi_1,\xi_2)G'(\xi_1^-,\xi_1) - G(\xi_1,\xi_1)G'(\xi_1,\xi_2)]$$

$$r(\xi_1)[G(\xi_1,\xi_2)G'(\xi_1^+,\xi_1) - G(\xi_1,\xi_1)G'(\xi_1,\xi_2)] = r(\xi_2)[G(\xi_2,\xi_2)G'(\xi_2,\xi_1) - G(\xi_2,\xi_1)G'(\xi_2^-,\xi_2)]$$

$$r(\xi_2)[G(\xi_2,\xi_2)G'(\xi_2,\xi_1) - G(\xi_2,\xi_1)G'(\xi_2^+,\xi_2)] = r(b)[G(b,\xi_2)G'(b,\xi_1) - G(b,\xi_1)G'(b,\xi_2)]$$

Sumando y agrupando términos subrayados de igual modo, y prescindiendo de los binomios inicial y final en a y b, que son nulos, queda

$$r(\xi_1)G(\xi_1,\xi_2)[G'(\xi_1^+,\xi_1) - G'(\xi_1^-,\xi_1)] = r(\xi_2)G(\xi_2,\xi_1)[G'(\xi_2^+,\xi_2) - G'(\xi_2^-,\xi_2)]$$

pero teniendo en cuenta que estos paréntesis, o sea, los saltos, valen $1/r(\xi_1)$, $1/r(\xi_2)$, resulta $G(\xi_1, \xi_2) = G(\xi_2, \xi_1)$.

TEOR. 3. *La función de* GREEN *del problema* $L[u]$ *con condición* C *es simétrica respecto de* x, ξ, *es decir,* $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.

La superficie que la representa sobre el cuadrado $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant \xi \leqslant b$, es, por tanto, simétrica respecto de la diagonal $x = \xi$.

e) Reducción de los problemas de STURM-LIOUVILLE *a ecuaciones integrales.* — Veamos ahora que todo problema lineal de tipo STURM-LIOUVILLE definido por una ecuación diferencial (homogénea o no) de segundo orden con parámetro y condición homogénea de contorno:

[XXVIII-177] $$L[y] + \lambda\varrho y = k(x),$$

con la condición de contorno [XXVIII-173], se puede reducir a una ecuación integral (Apénd. II), suponiendo conocida la función de GREEN definida por el operador $L[u]$ y las condiciones de contorno, es decir, la función que además de cumplir éstas y la $L[G] = 0$ tenga en el punto ξ el salto $1/r(\xi)$ en su derivada.

Hemos visto en *a*) que tal función G existe cuando el problema homogéneo carece de solución, es decir, cuando λ *no es autovalor*. Dentro

de esta hipótesis, y en virtud del teorema 1, la solución del problema homogéneo o no [XXVIII-177] viene expresada así:

[XXVIII-178] $$y(x) = \int_a^b G(x,\xi)h(\xi)d\xi, \qquad h(x) = k(x) - \lambda\varrho y(x),$$

que también se puede escribir:

[XXVIII-179] $$y(x) + \lambda \int_a^b G(x,\xi)\varrho(\xi)y(\xi)d\xi = g(x),$$

siendo

[XXVIII-180] $$g(x) = \int_a^b G(x,\xi)k(\xi)d\xi.$$

He aquí en [XXVIII-179] una ecuación donde la función incógnita $y(x)$ aparece bajo una integral, o *ecuación integral*; más precisamente (Apénd. II) una ecuación integral de segunda especie del tipo de FREDHOLM, equivalente al problema lineal [XXVIII-177], pues recíprocamente, para toda solución de [XXVIII-179] siendo $y - g$ función emanante del núcleo G respecto de $-\lambda\varrho y$, se verifica [XXVIII-177] con su condición de contorno.

En particular, son equivalentes el *problema homogéneo*:

[XXVIII-181] $$L[y] + \lambda\varrho y = 0,$$

y condición de contorno [XXVIII-173], y la *ecuación integral homogénea*:

[XXVIII-182] $$y(x) + \lambda \int_a^b G(x,\xi)\varrho(\xi)y(\xi)d\xi = 0.$$

Obsérvese que mientras el parámetro λ es coeficiente de la función y que figura *fuera del operador diferencial*, en cambio en la ecuación integral equivalente es *coeficiente del operador integral*. Por eso FREDHOLM y HILBERT lo colocaron así, contrariando la costumbre de la Geometría analítica, que ahorra escritura; pero, si bien en ella es indiferente, aquí no hay opción, pues en casos importantísimos como el de la Mecánica ondulatoria, tiene significado físico esencial (nivel de energía) precisamente ese λ y no el recíproco, y lo mismo acontece en los movimientos vibratorios, etc.

También debe notarse que aunque $G(x,\xi)$ es simétrica por teor. 3, no lo es su producto por $\varrho(\xi)$, pero basta multiplicar [XXVIII-179] por $\sqrt{\varrho(x)}$ y poner:

[XXVIII-183] $$y(x)\sqrt{\varrho(x)} = v(x), \qquad k(x,\xi) = G(x,\xi)\sqrt{\varrho(x)\varrho(\xi)}$$

para obtener la ecuación integral *de núcleo* $k(x,\xi)$ *simétrico*:

[XXVIII-184] $$v(x) + \lambda \int_a^b k(x,\xi)v(\xi)d\xi = g(x) \cdot \sqrt{\varrho(x)}$$

que asegura (Apénd. II-4) la existencia de autovalores λ_n con sus correspondientes autofunciones v_n de las que se deducen las correspondientes y_n dividiendo por $\sqrt{\varrho(x)}$.

f) Teorema de la alternativa para los problemas diferenciales. — Gracias a esta equivalencia se extienden a los problemas lineales definidos por ecuaciones diferenciales autoadjuntas y condiciones C de contorno, importantes propiedades válidas para las ecuaciones integrales (Apénd. II).

Teorema de la alternativa. — Si el problema homogéneo [XXVIII-181] es *imposible* para un valor λ (es decir, no autovalor) el problema no homogéneo es *determinado*.

Si el problema homogéneo [XXVIII-181] tiene solución u_i para $\lambda = \lambda_i$ (autovalor), condición necesaria y suficiente para que admita solución [XXVIII-177] es la ortogonalidad de g, dada por [XXVIII-180], a todas las autofunciones φ_i correspondientes al autovalor λ_i, es decir

$$\int_a^b \varrho g \varphi_i \, dx = 0.$$

Dem. Si [XXVIII-181] es imposible, también lo es la ecuación [XXVIII-182], pero entonces [XXVIII-179] tiene una sola solución que también lo es de [XXVIII-177].

Si [XXVIII-181] tiene solución u_i para $\lambda = \lambda_i$ también [XXVIII-182], y la condición para que [XXVIII-177] ó [XXVIII-179] tenga solución es la obtenida en Apénd. II-2, b_2.

g) Existencia y propiedades de autovalores y autofunciones. — En Apénd. II-3, *f*, se demuestra la existencia de una sucesión de autovalores λ_1, λ_2 ..., de [XXVIII-184], que también lo son de [XXVIII-177], con sus correspondientes autofunciones v_1, v_2, ..., ortogonales entre sí, es decir:

$$\text{[XXVIII-185]} \quad \int_a^b v_i v_j \, dx = 0, \quad \textit{o sea} \quad \int_a^b \varrho y_i y_j \, dx = 0, \quad (i \neq j).$$

Aplicando Apénd. II-4, teor. 5, llegamos a este resultado capital:

Teor. 4. (Desarrollo en serie de autofunciones). — *Toda función con derivada primera continua y segunda continua o casi continua, que cumpla la condición* C *de contorno, es desarrollable en serie uniformemente convergente de autofunciones del problema* [XXVIII-181] *ó* [XXVIII-182].

Pues, si aplicamos el operador L a esa función y, formamos otra función $L[y] = h(x)$, y si $G(x, \xi)$ es la función de Green correspondiente al problema (L, C), es según Teor. 1:

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) h(\xi) d\xi.$$

Luego $\sqrt{\varrho(x)}\, y(x)$ es emanante de $k(x, \xi) = G(x, \xi) . \sqrt{\varrho(x)} . \sqrt{\varrho(\xi)}$ y por tanto le es aplicable el Teor. 5 de Apénd. II-4, es decir: $y(x)$ es desarrollable en serie uniformemente convergente de las autofunciones v_n del núcleo k, que son las mismas y_n del problema [XXVIII-181] por el factor $\sqrt{\varrho(x)}$.

Por tanto

$$y(x) \sqrt{\varrho(x)} = \sum c_n \sqrt{\varrho(x)}\, y_n(x) \quad ; \quad y(x) = \sum c_n y_n(x),$$

cuyos coeficientes son $c_n = \int y \varrho y_n \, dx$.

Teor. 5. *Las autofunciones del problema* [XXVIII-181] = = [XXVIII-182] *forman un sistema ortogonal respecto de* ϱ, *que es cerrado y por tanto completo.*

Pues toda función continua $f(x)$ se puede aproximar cuadráticamente con error $< \varepsilon$ por un polinomio que cumpla la condición C.

Como $y(x)$ es desarrollable en serie $\sum c_n u_n(x)$, se puede aproximar con error $< \varepsilon$ por un polinomio $c_1 u_1(x) + \ldots + c_n u_n(x)$ el cual aproxima también a $f(x)$ con error $< 4\varepsilon$; luego el sistema ortogonal $u_n(x)$ es *cerrado.*

h) Función de Green *en dos variables.* — *h_1) Propiedad fundamental.* — La teoría de la función de Green que en los apartados anteriores nos condujo a importantes resultados, se amplía para varias variables, considerando el operador $L_\lambda[u]$ dado por [XXVIII-131], en el caso más importante de primer coeficiente constante, o sea la ecuación de D'Alem-

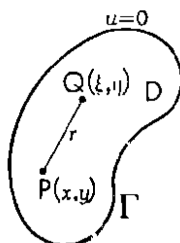


Fig. 396.

BERT (§ 91-6, *d*) $\Delta u = 0$, con condiciones de contorno de tipo A, B, o más general C (Cap. XXVIII, nota VI, a_1) en un dominio simplemente conexo D, con un solo punto singular $Q(\xi, \eta)$. La novedad impuesta por la ulterior aplicación, es que G no será finita con punto anguloso como en el caso de una variable, sino infinita, con infinitud logarítmica. Así, pues, damos esta definición, paralela a la vista en *a*) para una variable:

Función de GREEN $G(x, y, \xi, \eta)$ del operador diferencial Δu, con condición de contorno C en el dominio D, es una función de cada par de puntos $P(x, y)$, $Q(\xi, \eta)$ de D (fig. 396), que cumple estas condiciones:

1ª) Para cada (ξ, η) es función *continua* de (x, y) en D excepto en $Q(\xi, \eta)$, y satisface a la condición C en el contorno Γ.

2ª) G y sus derivadas primera y segunda son continuas en D [excepto en el punto (ξ, η)], en cuyo contorno es*:

$$[\text{XXVIII-186}] \qquad G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln r + \gamma(x, y, \xi, \eta),$$

con r distancia entre los puntos P y Q; es decir: restando ese término $\frac{1}{2\pi} \ln r$ desaparece la singularidad y resulta una función γ, con derivadas *continuas* en *todo* punto de D, incluso Q.

3ª) En todo punto $P \neq Q$ satisface a la ecuación $\Delta G = 0$.

El punto $Q(\xi, \eta)$ donde hay una singularidad con infinitud logarítmica, se llama *polo* de la función de GREEN $G(x, y, \xi, \eta)$.

La demostración de la simetría

$$[\text{XXVIII-187}] \qquad G(x, y, \xi, \eta) = G(\xi, \eta, x, y)$$

es análoga a la dada en *d*), y el lector puede hacer el cálculo. También es análoga a la demostración del teorema paralelo a los teoremas 1 y 2:

TEOR. 6 *. *La función emanante de* G:

$$[\text{XXVIII-188}] \qquad u(x, y) = \iint_D G(x, y, \xi, \eta)\, h(\xi, \eta)\, d\xi \,.\, d\eta \quad ,$$

(*h con derivadas continuas en* D), *satisface a la ecuación de* POISSON $\Delta u = h(x, y)$ *y a la condición de contorno* C.

Recíprocamente, la única función que satisface a las condiciones $\Delta u = h(x, y)$ *y* C, *es precisamente* [XXVIII-188].

Omitimos el cálculo, que puede verse en COURANT-HILBERT (citado en Cap. XVI, nota IV, 4), vol. I, págs. 316-7; pero subrayemos la equivalencia entre la expresión [XXVIII-188] y la *ecuación de* POISSON $\Delta u = h(x, y)$ con la condición C, problema que queda resuelto unívocamente por la fórmula [XXVIII-188].

---

* Lo análogo al salto de $G_x(x, \xi)$ en $x = \xi$, o sea,

$$\lim [G_x(\xi + \delta, \xi) - G_x(\xi - \delta, \xi)] = 1/r(\xi),$$

es aquí la integral de G_n, que debe ser en un entorno circular de Q de radio $\rho \to 0$:

$$\lim \int G_n \, ds = 1/r(\xi, \eta) \qquad \text{(en nuestro caso 1).}$$

Para $\ln r$ es

$$\int \frac{ds}{\rho} = 2\pi \quad ,$$

luego esta definición coincide con la dada arriba, pues el salto integral vale 1.

h_2) *Función de* GREEN *para el círculo.* — La dificultad se presenta al plantear el problema de *existencia* de la función de GREEN, que en el caso de una variable era sencillísima cuando se conocía la integral general, y ahora presenta un aspecto diverso para cada forma de recinto *.

Para el círculo, si Q′ es el simétrico de Q (es decir, inverso, fig. 397) y son r, r' las distancias a ellos desde P(x, y), la función de GREEN es:

[XXVIII-189] $$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{r'} - \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

En efecto, si P está en la circunferencia, es r/r' constante; y llamando $d = OQ$, esa constante, para todo punto de la circunferencia, vale:

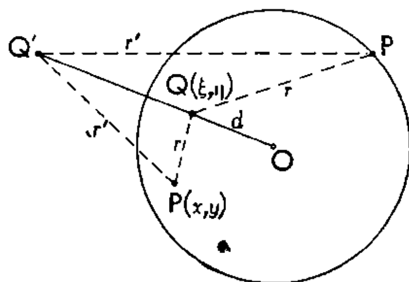


Fig. 397.

$$\frac{r}{r'} = \frac{1 - d}{\frac{1}{d} - 1} = d = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \;,$$

luego en la circunferencia es $G = 0$. Por otra parte, la función de x, y: $\ln r = \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, satisface a $\Delta u = 0$, así como también, $\ln r'$ en todo punto $P \neq Q$; luego es, $\Delta G = 0$ en todo el plano, excepto en el punto Q.

Finalmente, el término singular $\frac{1}{2\pi} \ln r$ es el impuesto en la definición; luego [XXVIII-189], es la función de GREEN para el círculo, con valor nulo en la circunferencia.

h_3) *Reducción a ecuación integral del problema de* STURM-LIOUVILLE *y desarrollos en serie.* — El mismo cálculo hecho en *e*), transforma el problema lineal homogéneo:

[XXVIII-190] $$\Delta v + \lambda \varrho(x, y) v = 0, \quad (v = 0 \text{ en } \Gamma)$$

en la equivalente ecuación integral homogénea:

[XXVIII-191] $$v(x, y) + \lambda \int\int_D G(x, y, \xi, \eta) \varrho(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi \,.\, d\eta = 0,$$

cuyo núcleo se hace simétrico multiplicando por $\sqrt{\varrho(x, y)}$; y aplicando el método de las ecuaciones integrales (Apénd. II-4), resulta la existencia de autovalores λ_n y autofunciones de [XXVIII-191], que también lo son de [XXVIII-190].

El mismo método esbozado en *g*, para el caso de una variable, conduce a este importante teorema:

TEOR. 7. *Toda solución* $u(x, y)$ *de* [XXVIII-190], *con derivadas primeras y segundas, que cumple la condición* C *de contorno, es desarrollable en serie uniformemente convergente de autofunciones*:

[XXVIII-192] $$\Sigma c_n u_n(x, y) \quad \textit{donde} \quad c_n = \int\int \varrho(x, y) w(x, y) v_n(x, y) dx \,.\, dy.$$

COROLARIO. *Las autofunciones* $\sqrt{\varrho} v_n$ *forman un sistema ortogonal denso* (§ 97-3) *y, por tanto, completo* (§ 97-7).

---

* En Cap. XXIX, nota VI, c), puede verse que el problema de la determinación de la función de GREEN [XXVIII-186] de Δu para un recinto simplemente conexo, con valor nulo en el contorno, es equivalente al de la representación conforme de ese recinto en un círculo.

h_4) Solución del problema no homogéneo para el círculo.

TIPO I. — La solución dada por POISSON a la ecuación de D'ALEMBERT para el círculo, puede expresarse por serie o integral, en la forma siguiente: dados los valores de contorno sobre la circunferencia de radio 1, mediante una función $g(\theta)$ de cuadrado integrable, que sea desarrollable en serie convergente de FOURIER:

[XXVIII-193] $$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta$$

(por tanto, $a_n \to 0$, $b_n \to 0$) la solución de $\Delta u = 0$, con los valores de contorno $g(\theta)$, viene expresada así:

[XXVIII-194] $$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) r^n.$$

En efecto, para $r = 1$, resulta $u(1,\theta) = g(\theta)$; y para $r < 1$ la serie es absoluta y uniformemente convergente, así como todas sus series derivadas en r y θ, por tener como mayorante la serie geométrica $\sum r^n$ o sus derivadas. Por tanto, es legítima la derivación término a término (§ 85-2). Ahora bien, cada término es armónico, como componente de una potencia compleja z^n, luego también u_n es armónica. De otro modo: se comprueba que cada término u_n satisface a la ecuación:

[XXVIII-195] $$\Delta u \equiv r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0,$$

pues al derivar, multiplicar y sumar, queda u_n multiplicado por $n(n-1) + n - n^2 = 0$; y como es legítima la derivación término a término respecto de r y de θ, resulta $\Delta u = 0$. En virtud del teorema de unicidad ya demostrado en nota VI, a_{33}, la solución así construída es la única posible.

Esta solución se puede expresar también (fig. 398), por la integral de POISSON (Cap. XXIX, nota VI, c_2):

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)}{1 - 2r\cos(\omega - \theta) + r^2} g(\omega)\, d\omega.$$

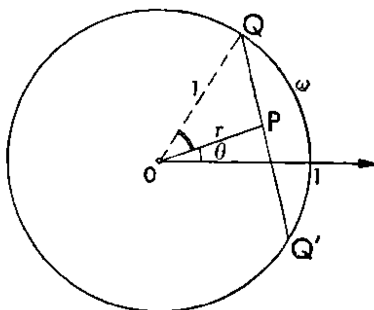


Fig. 398.

TIPO II. — Si se da sobre el contorno la derivada normal expresada por la serie convergente [XXVIII-193], basta formar la serie:

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} r + \sum \frac{1}{n} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) r^n,$$

y por el mismo razonamiento anterior, ésta es la solución única del problema:

$$\Delta u = 0, \qquad u_r(1,\theta) = g(\theta).$$

Nótese la íntima relación entre el problema de tipo I y la integral llamada de DIRICHLET:

$$D(u) = \int\int (u_x^2 + u_y^2)\, dx \,.\, dy \quad ,$$

en la que RIEMANN basó la integración de la ecuación $\Delta u = 0$: 1º) Toda función u que haga mínima $D(u)$ es armónica, es decir, satisface a $\Delta u = 0$ (§ 113-5, d); 2º) Hay funciones armónicas que hacen $D(u) = \infty$. Ejemplo: $\sum (\cos n!\, \theta) n^r$.

h_5) *Reducción del problema de* DIRICHLET *a ecuación integral.* — h_{51}) Una función armónica bien definida en todo punto interior (x, y), es el argumento del radio vector que lo une con el punto σ del contorno, es decir (fig. 399):

[XXVIII-196] $$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta - y}{\xi - x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y - \eta}{x - \xi}.$$

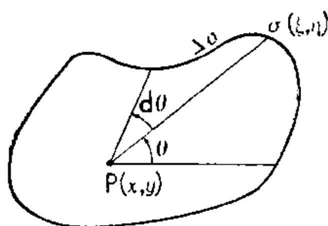


Fig. 399.

Esta función de (x, y) contiene el parámetro σ, y puede escribirse $\theta(x, y, \sigma)$. Su derivada $\theta_\sigma = \mathrm{k}(x, y, \sigma)$ también es armónica para cada valor de σ, y asimismo lo es toda combinación lineal de tales funciones para diversos valores de σ; y también, por tanto, toda combinación lineal continua de coeficiente continuo $\nu(\sigma)$, es decir:

[XXVIII-197] $$\mathrm{u}(x, y) = \int_0^{2\pi} \nu(\sigma)\,\mathrm{k}(x, y, \sigma)\,d\sigma = \int \nu(\sigma)\,d\theta.$$

Veamos ahora cómo debe elegirse ese coeficiente $\nu(\sigma)$ para que esta función armónica en el interior de Γ tienda hacia los valores prefijados $\mathrm{U}(\sigma)$ sobre el contorno, al tender el punto $\mathrm{P}(x, y)$ hacia el punto de abscisa s en Γ.

Ante todo, observemos que la función:

$$\mathrm{k}(x, y, \sigma) = \frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

si es $r = \mathrm{r}(\theta)$ la ecuación polar de centro P, está definida aunque P esté en Γ, con la sola condición $\sigma \neq s$; y abreviaremos la notación escribiendo $\mathrm{K}(s, \sigma)$; pero sería grave error creer que se puede pasar al límite en [XXVIII-197], sin más que sustituir $\mathrm{K}(s, \sigma)$ en vez de $\mathrm{k}(x, y, \sigma)$.

En efecto, trazando por P (fig. 400), la paralela a la tangente en el punto s, el contorno queda dividido por la cuerda AB en dos arcos; en el $(s - \delta', s + \delta)$ varía θ de π a 2π (si se adopta PA como origen) y en el otro varía de 0 a π, pero conviene conservar la variable σ, quedando la integral descompuesta así:

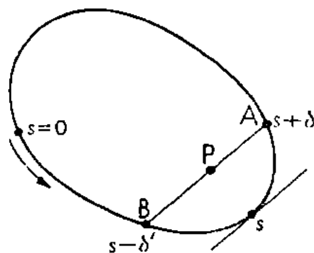


Fig. 400.

$$\mathrm{u}(x, y) = \int_A^B \nu(\sigma)\,\mathrm{k}(x, y, \sigma)\,d\sigma + \int_\pi^{2\pi} \nu(\sigma)\,d\theta.$$

Por la continuidad de $\nu(\sigma)$, sus valores en el arco BA difieren arbitrariamente poco del valor $\nu(s)$, es decir:

$$\nu(\sigma) = \nu(s) + \delta(\sigma), \qquad |\delta(\sigma)| < \varepsilon,$$

luego:

$$\int_\pi^{2\pi} \nu(\sigma)\,d\theta = \pi\nu(s) + \int_\pi^{2\pi} \delta(\sigma)\,d\theta \to \pi\nu(s).$$

La integral entre $s + \delta$ y $s - \delta'$ de $\mathrm{k}(x, y, \sigma)$ tiende hacia la integral en Γ de $\mathrm{K}(s, \sigma)$, luego la condición de contorno queda expresada por esta ecuación integral de segunda especie:

$$[\text{XXVIII-198}] \qquad \pi\nu(s) + \int_\Gamma \mathrm{K}(s,\sigma)\,\nu(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \mathrm{U}(s).$$

Obsérvese la ventaja de este método: el cálculo de la función potencial $u(x, y)$ se reduce al de la función $\nu(\sigma)$ de una sola variable. Además, sorprende la unificación lograda al reducir a un mismo tipo de ecuación problemas tan diversos.

h_{32}) *Interpretación gráfica.* — Es interesante el significado geométrico del núcleo:

$$\mathrm{k}(x, y, \sigma) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

siendo $r = \mathrm{r}(\theta)$ la ecuación polar de la curva.

Si es μ el ángulo de la tangente en Q (fig. 401) con el radio vector PQ, es (§ 34-7): $\operatorname{ctg}\mu = r'/r$, luego

$$\mathrm{k}(x, y, \sigma) = \frac{\operatorname{sen}\mu}{r} = \frac{1}{\mathrm{QN}}$$

siendo N la intersección con la normal QN de la recta PN ⊥ PQ.

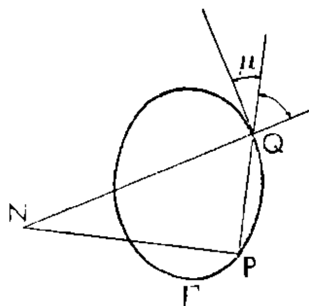


Fig. 401.

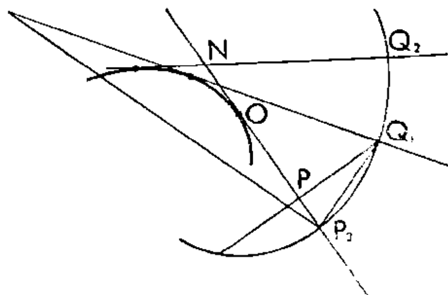


Fig. 402.

Esta expresión vale, aunque P esté en la curva c (abscisa s), para todo $\sigma \neq s$.

Si Q → P se conserva la continuidad; y adoptando P como origen, y su tangente como eje x, se tiene:

$$\operatorname{sen}\mu \sim \operatorname{tg}\mu \sim y' \sim \frac{y}{x}, \qquad r \sim x \quad \therefore \quad \frac{\operatorname{sen}\mu}{r} \sim y''.$$

Suponiendo, pues, la curvatura finita $c(s)$ en todo punto s, es:

$$\lim_{\sigma \to s} \mathrm{K}(s, \sigma) = c(s).$$

h_{33}) *Problema tridimensional de* DIRICHLET. — El método para reducir a ecuación integral el problema tridimensional de DIRICHLET es análogo al explicado en h_{31}. Partiendo de la función armónica:

$$\frac{1}{r} = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

su derivada en dirección normal es también armónica; y también, por tanto, toda combinación lineal continua:

$$u(\mathrm{P}) = u(x, y, z) = \int \nu(\mathrm{P}) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \mathrm{d}\sigma.$$

¿Cómo elegir coeficiente $\nu(P)$ de modo que u satisfaga a las condiciones de contorno? Razonamiento análogo al desarrollado, conduce a estas ecuaciones integrales:

$$2\pi\nu \pm \int \nu(P)\frac{\cos\varphi}{r^2}\, dS = \pm\, U(P)$$

que resuelven estos cuatro problemas:

+ — Problema interno de DIRICHLET,
— + „ externo de DIRICHLET,
+ + „ externo de NEUMANN,
— — „ interno de NEUMANN.

X. Métodos variacionales directos. — 1. MÉTODOS DIRECTOS E INDIRECTOS. — *a) Planteamiento funcional.* — Los problemas variacionales constituyen un capítulo muy especial del Análisis funcional. Una integral simple o múltiple, cuyo integrando es función de la función y, o de las funciones y_i de una o varias variables x_j y de sus derivadas, es un número real que depende de los entes y_i y se llama *funcional*: $f[y]$. El campo de variabilidad Y es el *espacio* formado por las funciones consideradas, y éstas son sus *puntos* o elementos.

EJEMPLOS: 1. En el problema clásico de la superficie de revolución mínima (§ 113-4, ejemplo 2), el espacio Y está formado por todas las funciones $y = y(x)$ que cumplen estas condiciones (fig. 403): $y(x)$ *uniforme* y *continua* en (a, b); $y'(x)$ continua, salvo, quizá, en número finito de puntos; $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

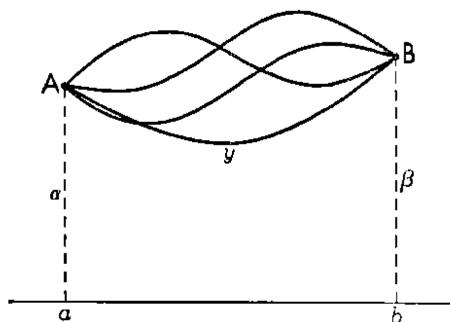


Fig. 403.

2. En el problema de las superficies mínimas de contorno C definido por una función g(P) sobre el circuito plano c (§ 113-5, d), el espacio Y está formado por las funciones derivables definidas en el dominio de contorno c, tales que $y(P) = g(P)$ para todo punto P de c.

Las propiedades del espacio funcional Y, que previamente debe ser estudiado, son decisivas para la resolución de los problemas variacionales que generalizan los problemas extremales del Análisis elemental, en la forma siguiente: determinar en el espacio Y los puntos y (es decir, las funciones) en que alcanza valor máximo o mínimo relativo la funcional $f[y]$.

Las palabras *puntos* y *espacio* están justificadas, porque cabe definir la proximidad de puntos, la acumulación y los entornos, mediante la *distancia* entre cada dos puntos, es decir, entre cada dos funciones. Una vez organizada la teoría de tales espacios funcionales (caso muy especial de los espacios abstractos más generales, llamados *topológicos*), el Cálculo de variaciones se desarrolla paralelamente al capítulo del Análisis elemental que trata de los *extremos* (máximo y mínimo absolutos) de una función; y de los *máximos y mínimos relativos*, distinción esencial (§ 70-1) que en el Análisis funcional es más delicada y difícil.

Antes de decir algo sobre esta moderna organización del Cálculo de

variaciones como capítulo del Análisis general, urge subrayar esta distinción previa: los modernos métodos, tanto *existenciales* como *constructivos*, se llaman *directos*, porque no se apoyan en las ecuaciones diferenciales de EULER, completadas con las condiciones de LEGENDRE, JACOBI, WEIERSTRASS, etc. (§ 113), tal como quedó organizado el viejo cálculo de BERNOULLI-EULER a mediados del siglo XIX y ha sido expuesto en los clásicos tratados de BOLZA y KNESER y en los más modernos de CARATHÉODORY, BLISS, etc. (ver nota XI, 9).

b) *Sucesiones extremales y principio de* DIRICHLET. — Mientras el método indirecto euleriano comprende los dos problemas que podemos llamar *estacionario* (máximos y mínimos relativos) y *extremal* (máximos y mínimos absolutos, o sea, extremos de la funcional), los métodos directos se concretan a atacar este último. Veamos cómo.

Supongamos, para fijar las ideas, que la integral es $f[u] \geqslant 0$ para cierta familia U de funciones, como acontece en los casos más importantes; el conjunto de números reales $f[u]$ tiene, por tanto, un extremo inferior $l = \inf f[u]$ y hay, por tanto, una *sucesión extremal* de tales valores, convergente hacia l; es decir, una sucesión de funciones u_n tales que $f[u_n] \to l$. Si ese extremo l es accesible, es decir, si existe una función u_0 de la familia U, tal que $f[u_0] = l$, esa función *minimal* debe satisfacer a la ecuación de EULER; la existencia de mínimo de una integral implica, pues, la existencia de solución de una ecuación diferencial con las mismas condiciones de contorno. Tal fué el método de RIEMANN en un problema especialmente importante.

En efecto, la relación notable existente entre la integral llamada de DIRICHLET y la ecuación llamada de LAPLACE *:

$$[\text{XXVIII-199}] \qquad D[u] = \iint (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy; \qquad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

es la originada por aparecer ésta como ecuación de EULER (§ 113-5, *d*) del problema $D[u] =$ *mínimo absoluto*; es decir: si entre todas las funciones $u = u(x, y)$ que toman valores prefijados en el contorno c de un dominio y dan valor finito a la integral $D[u]$, hay una que la hace mínima, esa función satisface a $\Delta u = 0$.

RIEMANN admitió que el extremo inferior l de los valores $D[u] > 0$ producidos por todas las funciones que hacen $D[u] < \infty$ con valores g en c es accesible; y esa función tal que $D[u] = l$ es, por tanto, solución de $\Delta u = 0$, con los prefijados valores de contorno.

Esa falta de rigor (suponer *accesible* el extremo) fué denunciada por WEIERSTRASS; y tal hipótesis, que recibió el impropio nombre de "principio de DIRICHLET", fué desechada desde entonces y no sin razón (véanse ejemplos 3 a 5 en que falla la hipótesis), ideándose diversos métodos rigurosos, pero complicados, para la construcción de esa solución al problema de contorno; solución que es única, como ya se vió en nota IX. El método *alternado* de SCHWARZ, el de NEUMANN, que le condujo a las ecuaciones integrales, el de *barrido* (*balayage*) de POINCARÉ, permitieron demostrar la existencia de solución para tipos de recintos cada vez más complicados; y otros métodos constructivos lograron resolver por aproximaciones sucesivas el problema que es capital en la Física clásica. Por otra parte, su resolución, sea teórica o práctica, lleva consigo la existencia y construcción de la función de GREEN para cada recinto, que permite su representación conforme sobre el círculo; es así como RIEMANN de-

* De la integral que lleva su nombre no se ocupó DIRICHLET. La ecuación llamada de LAPLACE fué estudiada antes por D'ALEMBERT; lo que hizo LAPLACE fué generalizarla para tres variables.

mostraba sobre insegura base su teorema fundamental de las funciones analíticas.

En 1900 rehabilita HILBERT el abandonado "principio de DIRICHLET", convirtiéndole en teorema para algunos casos especiales e iniciando así los *métodos directos*, que abrieron una nueva era en el Cálculo de variaciones. Los trabajos de RITZ (1909), LEBESGUE (1910), COURANT (desde 1912), FRIEDRICH (1927), RELLICH (1930), etc., han elaborado todo un cuerpo de doctrina que desborda el plan de este libro. En resumen, se llaman *métodos directos* del Cálculo de variaciones a todos los que demuestran la *existencia* de la función que hace mínima una integral (y a veces la construyen) sin apoyarse en la ecuación diferencial de EULER que por sí sola no garantiza el paso recíproco, ni en los viejos criterios complementarios de LEGENDRE, JACOBI, WEIERSTRASS, etc., que dieron condiciones excesivas, pero *suficientes*.

c) Problemas en que no hay solución. — EJEMPLOS: 3. Si se propone encontrar el más corto entre todos los arcos de extremos (0; 0), (1; 0), con derivada infinita en ambos, salta a la vista (fig. 404) que las longitudes son forzosamente mayores que 1, y tienen el extremo inferior 1, que es inaccesible, pues el segmento [0; 1] no pertenece al espacio prefijado Y, por no cumplir la condición impuesta en los extremos. El problema carece, pues, de solución.

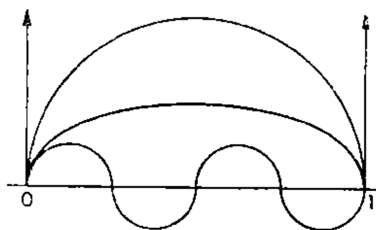


Fig. 404.

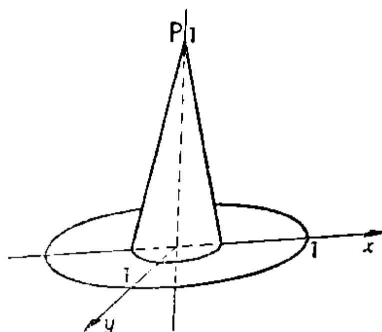


Fig. 405.

4. Si se pide la superficie de área mínima entre todas las superficies uniformes de contorno dado c (por ejemplo una circunferencia de radio 1) y que pasan por un punto exterior P [en la figura 405 el punto (0; 0; 1)] es obvio que se obtienen superficies con área que supera a la encerrada por c tan poco como se quiera; pero esa área (que en la figura 405 vale π) es inaccesible.

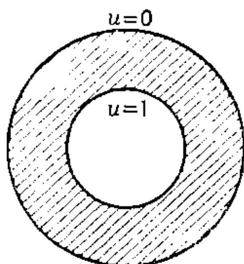


Fig. 406.

5. Superficies uniformes $u(x, y)$ de contorno formado por las circunferencias: $u = 0$ (radio 1), $u = 1$ (radio $\frac{1}{2}$) que forman con el anillo circular (fig. 406) y superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 1/4$ un cuerpo anular de volumen mínimo. Evidentemente no hay solución. El extremo inferior *inaccesible* de los volúmenes es 0.

Estos ejemplos y muchos más a los que conceden excesiva importancia los tratadistas modernos, no

son nada sorprendentes, ni enseñan nada nuevo sobre el sencillísimo problema de la *caja* de área dada S y volumen mínimo $x \cdot y \cdot z$; pues el volumen 0 es inaccesible, ya que las soluciones $xy = S/2$, $z = 0$; $xz = S/2$, $y = 0$ no responden al problema, porque esas figuras no son cajas.

Los tres ejemplos 3, 4 y 5 son paralelos a este problema de una variable: $u = x(1 - x)$ en $(0; 1)$, que no tiene mínimo, pues el extremo 0 es inaccesible.

d) Problemas en que hay solución, pero algunas sucesiones extremales no convergen. — EJEMPLO 6. Función con derivadas primeras continuas en un círculo, nula en la circunferencia y que hace mínima a la integral de DIRICHLET:

[XXVIII-200] $$\mathrm{D}[u] = \iint (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy = \iint \left(u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta{}^2\right) r\,dr\,d\theta \quad ,$$

cuyo extremo inferior es 0.

Construyamos esta sucesión de funciones (fig. 407):

$$\begin{cases} u = 0 & \text{para} \quad r \geqslant a; \\ u = \dfrac{1}{\ln a} \ln \dfrac{r}{a} & \text{para} \quad a^2 \leqslant r \leqslant a < 1; \\ u = \dfrac{1}{\ln a} \ln a = 1 \ \text{para} & r \leqslant a^2; \end{cases}$$

$$\mathrm{D}[u] = \frac{2\pi}{(\ln a)^2} \int_{a^2}^{a} \frac{r\,dr}{r^2} = -\frac{2\pi}{\ln a} \to 0.$$

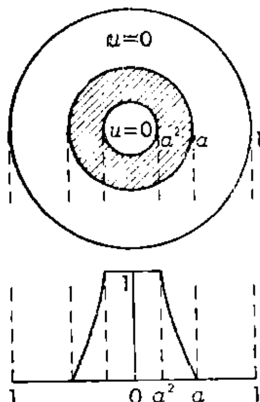


Fig. 407.

He aquí, pues, una sucesión extremal u, que para $a \to 0$ tiene como límite la función *discontinua* $\mathrm{u}(x, y) = 0$, $\mathrm{u}(0, 0) = 1$, mientras la solución es la función continua $\mathrm{u}(x, y) = 0$ en todo el círculo.

Nótese que este ejemplo responde a la misma idea que la función $u = x(1 - x)$ en $(0; 1)$, pues siendo el mínimo $u = 0$ accesible para $x = 0$, no lo es para $x \to 1$, a pesar de ser minimal esta sucesión.

2. *Principio de* DIRICHLET *y problemas de contorno.* — *a) Relación entre la integral de* DIRICHLET *y la ecuación de* LAPLACE. — En nota IX, h_2, hemos construído, según POISSON, la función $u = \mathrm{u}(r, \theta)$ que satisface a la ecuación $\Delta u = 0$ en el interior de un círculo y toma en el contorno valores prefijados por una función $g = \mathrm{g}(\theta)$ de cuadrado integrable, con la sola condición de ser desarrollable en serie de FOURIER:

[XXVIII-201] $$\mathrm{g}(\theta) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta).$$

Cabe, pues, que tenga discontinuidades de primera especie; pero ni la restricción de admitir sólo esta clase de discontinuidades, ni la más fuerte de la continuidad, bastan para que $\mathrm{g}(\theta)$ admita tal desarrollo (§ 98-3). Sin embargo, mediante la moderna sumación de series divergentes (Cap. V, nota I), es claro que no hace falta la convergencia ordinaria; basta la de CESÀRO (§ 98-5) y, por tanto, entran todas las funciones *continuas* de contorno y aún basta la sumación más amplia de ABEL, donde no se precisa la igualdad [XXVIII-201] (obtenida de la relación

de más abajo [XXVIII-202] para $r = 1$), sino solamente $\lim u(r, \theta) = g(\theta)$ para $r \to 1$.

Admitida la convergencia de [XXVIII-201], como $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, converge absoluta y uniformemente en todo círculo de radio $r < 1$ la serie potencial:

[XXVIII-202] $$u(r, \theta) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)\, r^n,$$

que es función armónica para todo $r < 1$, por serlo todos sus términos, coincide con $g(\theta)$ para $r = 1$ y es, por tanto, la solución buscada.

Volviendo al punto de vista de RIEMANN encontramos que esta solución de nada nos sirve para el problema de mínimo de $D[u]$, porque cabe que *todas* las funciones $u(r, \theta)$ con los mismos valores de contorno $g(\theta)$, hagan divergente la integral y entonces carece de sentido el problema extremal.

Supongamos, por ejemplo, que estos valores vengan dados así:

[XXVIII-203] $$g(\theta) = \cos(1!\theta) + \frac{\cos(2!\theta)}{2^2} + \frac{\cos(3!\theta)}{3^2} + \dots$$

serie, absoluta y uniformemente convergente, que define una función *continua* pero no derivable [pues es la parte real (cfr. § 114-3) de la serie $z + (z^{2!}/2^2) + (z^{3!}/3^2) + \dots + (z^{n!}/n^2) + \dots$, que tiene la circunferencia unidad como frontera natural, cfr. § 115-12]. La correspondiente serie de potencias de r define una función continua $u(r, \theta)$, que es armónica en el interior y coincide con $g(\theta)$ para $r = 1$, pero $D[u]$ es infinita y el problema de mínimo carece de sentido.

Cambiemos, pues, de planteamiento, de uno u otro de estos modos:

A) Imponiendo a $g(\theta)$ condiciones más restrictivas (derivadas continuas primeras y segundas). O mejor:

B) Considerando solamente la familia de funciones $g(r, \theta)$ definidas en *todo* el círculo, que hacen *finita* $D[u]$; y adoptando exclusivamente los valores de contorno $g(1, \theta)$ para la ecuación $\Delta u = 0$.

De ambos modos queda excluída la función [XXVIII-203] y sus análogas.

Antes de estudiar ambos tipos de restricciones, calculemos $D[u]$ cuando u es armónica, resultando una expresión notable por su sencillez.

Por la uniformidad de la convergencia absoluta de la serie [XXVIII-202] en cada círculo de radio $r < 1$, y la de sus series derivadas, son legítimas las operaciones siguientes:

$$u_r = \sum n(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)\, r^{n-1}$$
$$u_\theta = \sum n(-a_n \operatorname{sen} n\theta + b_n \cos n\theta)\, r^n$$
$$u_r^2 = \sum n^2(a_n^2 \cos^2 n\theta + b_n^2 \operatorname{sen}^2 n\theta)\, r^{2n-2} + \dots ,$$
$$u_\theta^2 = \sum n(a_n^2 \operatorname{sen}^2 n\theta + b_n^2 \cos^2 n\theta)\, r^{2n} + \dots ,$$

significando los puntos suspensivos que siguen términos productos de senos y cosenos distintos, llamados a desaparecer al integrar en $(0, 2\pi)$ respecto de θ. Para $r < 1$ estas series convergen absoluta y uniformemente y es legítima la integración siguiente en $D[u]$, dada por [XXVIII-200] en coordenadas polares

[XXVIII-204] $$\int_0^{2\pi}\left(u_r^2 + \frac{1}{r^2}\, u_\theta^2\right) d\theta = 2\pi\sum n^2(a_n^2 + b_n^2)\, r^{2n-2} ,$$
$$(n = 1, 2, \dots).$$

Nótese que no es legítimo hacer $r = 1$, pues sin nueva restricción a $g(\theta)$ puede resultar serie divergente. Por esta misma causa, al calcular $D[u]$, multiplicando por $r\,dr$, e integrando en $(0; 1)$, la expresión:

[XXVIII-205] $$D[u] = \pi\sum n(a_n^2 + b_n^2)r^{2n}\Big|_0^1 = \pi\sum n(a_n^2 + b_n^2)$$

puede ser infinita. Tal sucede en el ejemplo [XXVIII-203] antes citado, cuyos coeficientes son: $a_n = 1/m^2$ para $n = m!$; $a_n = 0$ para $n \neq m!$; $b_n = 0$ para todo n; dando $D[u] = \pi\sum(m!/m^4) = \infty$.

b) Demostración del principio de DIRICHLET *para el círculo.* — b_1) *Restricción de tipo* A. — Entre todas las funciones que toman en la circunferencia valores prefijados $u(1,\theta) = g(\theta)$ y hacen $D[u] < \infty$, ¿hay alguna que haga mínima esta integral?

Podemos contestar afirmativamente y construir la solución si imponemos a $g(\theta)$ estas condiciones:

α) Es desarrollable en serie de FOURIER [XXVIII-201]:

β) Tiene derivadas continuas $g'(\theta)$, $g''(\theta)$.

Estas condiciones implican (§ 98-1) la acotación de las sucesiones n^2a_n, n^2b_n. Consideremos la familia de todas las funciones definidas en el círculo por series:

[XXVIII-206] $$u(r,\theta) = \tfrac{1}{2}\alpha_0(r) + \sum(\alpha_n(r)\cos n\theta + \beta_n(r)\operatorname{sen} n\theta),$$

con coeficientes funciones de r tales que $\alpha_n(1) = a_n$, $\beta_n(1) = b_n$. Es:

$$\begin{aligned} u_r &= \tfrac{1}{2}\alpha_0' + \sum(\alpha_n'\cos n\theta + \beta_n'\operatorname{sen} n\theta);\\ u_\theta &= \sum n(-\alpha_n\operatorname{sen} n\theta + \beta_n\cos n\theta);\\ u_r^2 &= \tfrac{1}{4}\alpha_0' + \sum(\alpha_n'^2\cos^2 n\theta + \beta_n'^2\operatorname{sen}^2 n\theta) + \dots;\\ u_\theta^2 &= \sum n^2(\alpha_n^2\operatorname{sen}^2 n\theta + \beta_n^2\cos^2 n\theta) + \dots; \end{aligned}$$

donde los puntos suspensivos indican los términos que desaparecerán al integrar [XXVIII-200] entre 0 y 2π, por ser productos de senos y cosenos de múltiplos de θ, resultando:

[XXVIII-207] $$\int_0^{2\pi}\left(u_r^2 + \frac{1}{r^2}u_\theta^2\right)d\theta = \tfrac{1}{2}\pi\alpha_0'^2 + \pi\sum(\alpha_n'^2 + \beta_n'^2) + \frac{\pi}{r^2}\sum n^2(\alpha_n^2 + \beta_n^2).$$

Necesario y suficiente para que sea mínima la integral de esta suma es que sean mínimas, para cada $n = 1, 2, 3, \dots$ las integrales:

[XXVIII-208] $$\int_0^1 \alpha_0'^2 r\,dr\;,\quad \int_0^1\left(\alpha_n'^2 + \frac{n^2}{r^2}\alpha_n^2\right)r\,dr\;,\quad \int_0^1\left(\beta_n'^2 + \frac{n^2}{r^2}\beta_n^2\right)r\,dr\;,$$

pues si para un n se lograra otra α_n ó β_n con integral menor, resultaría menor la integral D de la función así modificada.

La primera exige que sea $\alpha_0' = 0$, por consiguiente $\alpha_0 =$ constante; la segunda (y análogamente la tercera) se puede escribir así:

[XXVIII-209] $$\int_0^1\left(\alpha_n' - \frac{n}{r}\alpha_n\right)^2 r\,dr + 2n\int_0^1\alpha_n\alpha_n'\,dr\;,$$

donde esta segunda integral vale $n\alpha_n^2(1) - n\alpha_n^2(0) = na_n^2$; pues por la condición de contorno es $\alpha_n(1) = a_n$, y debe ser $\alpha_n(0) = 0$, pues de lo contrario sería divergente la integral a causa del denominador r.

En definitiva, la doble condición $D[u] =$ mínimo, $u(1,\theta) = g(\theta)$, se traduce en éstas: $\alpha_n' = (n/r)\alpha_n$, de donde $\ln\alpha_n = \ln r^n + \ln c$, $\alpha_n = cr^n$, y como debe ser $\alpha_n(1) = a_n$, resulta:

$$\alpha_n(r) = a_n r^n \quad \text{y análogamente} \quad \beta_n(r) = b_n r^n\;,$$

y el mínimo de $D[u]$ que es $\pi\sum n(a_n^2+b_n^2)$, lo da la serie de POISSON [XXVIII-202]. Como la condición de EULER para el mínimo de $D[u]$ es $\Delta u=0$, y ahora resulta el recíproco, queda demostrada la equivalencia entre los dos problemas:

Mínimo de $D[u]$ con la condición de contorno $u(1,\theta)=g(\theta)$;

Ecuación $\Delta u=0$ con la condición de contorno $u(1,\theta)=g(\theta)$.

b_2) *Restricción de tipo* B. — Que la solución de ecuación de LAPLACE entre las funciones que cumplen este tipo de restricción hace mínima la integral de DIRICHLET, queda demostrado con este sencillo teorema:

TEOR. 1. *Si* $g(r,\theta)$ *está definida en el círculo* $r\leqslant 1$, *siendo* $D[g]<<\infty$, *y es* $u(r,\theta)$ *la solución de* $\Delta u=0$ *que toma en* c *los valores* $g(1,\theta)$, *se verifica*: $D[u]\leqslant D[g]$. *Si es* $g\neq u$, *es* $D[g]>D[u]$.

Para evitar dificultades en el manejo de las series, consideremos en [XXVIII-202] las sumas finitas $u_\nu(r,\theta)$ de ν sumandos y llamemos:

$$v_\nu(r,\theta)=g(r,\theta)-u_\nu(r,\theta);$$

para $r=1$ los ν primeros c. F. de $g(1,\theta)$ son los mismos de $u_\nu(1,\theta)$, luego son nulos los de $v_\nu(1,\theta)$, es decir, esta función es ortogonal a estas $2\nu+1$ funciones:

[XXVIII-210] $\quad 1,\ \cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta,\ \ldots,\ \cos\nu\theta,\ \operatorname{sen}\nu\theta.$

Llamando

$$D(u_\nu,v_\nu)=\iint[(u_\nu)_x(v_\nu)_x+(u_\nu)_y(v_\nu)_y]dx\,dy\quad,$$

como u_ν es regular en todo el plano, es legítima la integración por partes sobre el círculo de dicha integral (§ 88-6, nota 3):

$$D(u_\nu,v_\nu)=\int(u_\nu)_xv_\nu\,dy-\int(u_\nu)_yv_\nu\,dx-$$
$$-\iint\Big[(u_\nu)_{xx}v_\nu+(u_\nu)_{yy}v_\nu\Big]dx\,dy.$$

Pero esta integral doble es nula, por ser $\Delta u_\nu=0$; y la simple es

$$\int v_\nu\frac{\partial u_\nu}{\partial n}d\theta=0\quad,$$

pues la derivada normal, o sea $(u_\nu)_r$ para $r=1$, es combinación lineal de las funciones [XXVIII-210] y, por tanto, ortogonal a v_ν. En definitiva: $D(u_\nu,v_\nu)=0$ y, por tanto $D[g]=D[u_\nu+v_\nu]=D[u_\nu]+D[v_\nu]$.

De aquí resulta: $D[u_\nu]=\pi\sum n(a_n^2+b_n^2)\leqslant D[g]$, $(n=1,2,\ldots,\nu)$. Para $\nu\to\infty$ se obtiene $D[u]=\pi\sum n(a_n^2+b_n^2)\leqslant D[g]$, $(n=1,2,\ldots)$.

Si también fuese solución minimal $g=u+v$, al ser el valor de la integral de DIRICHLET para $u+tv$ (t número real):

$$D[u+tv]=D[u]+2tD(u,v)+t^2D[v],$$

éste habría de ser mínimo para $t=0$ y para $t=1$ simultáneamente, de donde debe ser $D(u,v)=0$ y $D[v]=0$, deduciéndose de la última igualdad $v=0$.

La función armónica u hace, por tanto, la integral de DIRICHLET *menor que cualquier otra función con los mismos valores de contorno si* éstos cumplen la restricción B.

c) Correlación entre problemas variacionales y de contorno. — La relación estudiada entre la ecuación de LAPLACE y la integral $D[u]$ es un caso muy particular de otra relación general entre *toda ecuación elíptica* y una integral doble de la que aquélla es la ecuación de EULER (§ 113-5, *d*).

Consideremos en lugar de la $D[u]$ esta integral muy general:

$$[\text{XXVIII-211}] \quad E[u] = \int\int [r(u_x^2 + u_y^2) + 2auu_x + 2buu_y + qu^2]\,dx\,dy \quad ; \quad (r > 0,\ q \geqslant 0)$$

de coeficientes a, b, q derivables dos veces y r tres veces.

La ecuación de EULER correspondiente (§ 113-5, *d*) es $L[u] = 0$, donde

$$[\text{XXVIII-212}] \quad L[u] = (ru_x)_x + (ru_y)_y - q^*u, \quad (q^* = q - a_x - b_y),$$

es del tipo STURM-LIOUVILLE ya estudiado en nota VI.

El doble problema resuelto para el caso $r = 1$, $a = b = q = 0$, sobre el círculo, queda así generalizado al ampliar la familia de integrales y ecuaciones; pero la nueva dificultad no reside ahí, sino en la forma general del dominio D, cuyo contorno puede ser muy complicado. Aunque figuras como la adjunta (fig. 408) no se presentan en la Física, son frecuentes los recintos múltiplemente conexos con puntos o líneas singulares y conviene abordar el tipo general de dominio *acotado* con la sola restricción siguiente: sobre cada recta de un cierto haz paralelo *interseca un número finito de segmentos*. Suprímase en la figura 408 el punto espiriforme, o supóngase finito el número de sus espiras, y el bizarro dominio triplemente conexo con infinitos tajos y sin tangentes determinadas, entra bajo el alcance de nuestro método.

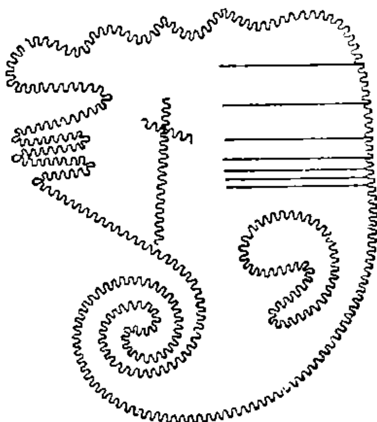


Fig. 408.

Problema variacional: Entre todas las funciones que hacen $D[u] < \infty$ en el dominio D, encontrar una que coincida en c con $g(x, y)$ y haga mínima la integral $E[u]$.

Problema de contorno: Encontrar u que satisfaga a la ecuación $L[u] = f$ dentro de D, y en el contorno c coincida con $g(x, y)$.

Para abordarlos necesitamos manejar estas integrales sobre D:

$$D(u, v) = \int\int r(u_x v_x + u_y v_y)\,dx\,dy \quad ,$$

$$D[u] = D(u, u) = \int\int r(u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy \quad ;$$

$$E(u, v) = D(u, v) + \int\int [a(uv)_x + b(uv)_y + quv]\,dx\,dy \quad ,$$

$$E[u] = E(u, u).$$

Estas expresiones definen dos tipos de *distancia* entre las funciones definidas sobre el dominio D, con la condición $D[u] < \infty$. (La teoría ge-

neral de la *métrica cuadrática* en el espacio de HILBERT puede estudiarse en la obra de STONE citada en el capítulo XXV, nota IV-8).

Como la familia de funciones consideradas está definida por la finitud $D[u] < \infty$, y el problema de mínimo se refiere a $E[u]$, conviene estudiar el término en que difieren ambas integrales, o sea:

[XXVIII-213] $$\int\int [a(u^2)_x + b(u^2)_y + qu^2] dx\, dy =$$
$$= \int\int (q - a_x - b_y) u^2\, dx\, dy = \int\int q^* u^2\, dx\, dy \quad ,$$

como resulta integrando por partes (§ 88-6, nota 3), pues $au^2 + bu^2 = 0$ en c, si suponemos $u = 0$ en el contorno. Este integrando es *positivo* si imponemos la condición $a_x \leqslant 0$, $b_y \leqslant 0$, la cual se verifica, desde luego, si a y b son constantes, y aun en el caso interesante $a(y)$, $b(x)$. Por tanto:

c_1) *Si en D se conserva* $a_x \leqslant 0$, $b_y \leqslant 0$ *y en c es* $u = 0$, *entonces es*:

[XXVIII-214] $$E[u] = D[u] + (q^*, u^2) \geqslant D[u] \quad ,$$

y el signo $=$ *se presenta solamente si* $a_x = b_y = q = 0$ *en D, o bien si es* $u = 0$ *en D*. En [XXVIII-214] se representa por (q^*, u^2) el último miembro de [XXVIII-213] (cfr. § 96-3).

c_2) Resulta, además, para toda u que haga $D[u] < \infty$:

[XXVIII-215] $E[u] \geqslant 0$ (solamente signo $=$ si $u = 0$ en D).

c_3) Como corolario resulta la *unicidad del problema de contorno*, es decir: *Si* $L[u_1] = f$, $L[u_2] = f$ *dentro de D*, $u_1 = u_2 = 0$ *en c, entonces se verifica en D*: $u_1 = u_2$.

En b_2) hemos apoyado esta unicidad en una propiedad especial de las funciones armónicas y ahora resultará como caso particular, puesto que $L[u] = 0$, $u = 0$ en c, implica $u = 0$ en D.

d) *Fórmula generalizada de* GREEN. — Para eludir el inconveniente de la complejidad del contorno que puede no ser rectificable, y ni siquiera curva de JORDAN, conviene deducir una fórmula que presta servicios análogos a las de GREEN, pero sin integral curvilínea.

Si es $v = 0$ en c, se verifica:

[XXVIII-216] $$\int\int_D v\Delta u\, dx\, dy = -\int\int_D (u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy .$$

Más general, siendo $v = 0$ en c:

[XXVIII-217] $$\int\int v[(ru_x)_x + (ru_y)_y + (a_x + b_y - q)u] dx\, dy =$$
$$= -\int\int r(u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy - \int\int [a(uv)_x + b(uv)_y + quv] dx\, dy .$$

DEMOSTRACIÓN: Pasando todos los términos al primer miembro, aparece el integrando $(vru_x)_x + (vru_y)_y + (auv)_x + (buv)_y$, pero al efectuar la integración en x resulta vru_x, que es nulo en ambos extremos; y análogamente sucede en los otros, luego la integral doble es nula.

Cuando se desarrolla la teoría completa es útil abreviar la escritura, escribiendo simbólicamente la fórmula [XXVIII-217] así:

[XXVIII-217'] $(L[u], v) = -E(u, v)$ si es $v = 0$ en c,

y en particular, para $r = 1$, $a = b = q = 0$:

[XXVIII-216'] $(\Delta u, v) = -D(u, v)$ si es $v = 0$ en c.

e) Generalización del principio de DIRICHLET. — Que toda función u extremal de la integral $E[u]$ satisface a la ecuación $L[u] = 0$, ya ha sido visto, por ser ésta la ecuación de EULER (§ 113-5, d). Ahora veremos el recíproco, generalizando el teorema 1 de HILBERT, y abordaremos el caso más general de ecuación $L[u] = f$ con su correspondiente integral que comprende a la E cuando sea $f = 0$.

Si u es una solución del problema de contorno $L[u] = f$, $u = 0$ en c y $u + v$ otra solución cualquiera, con la misma condición de contorno, es decir, $v = 0$, $L[v] = 0$, la fórmula [XXVIII-217'] expresa:

$$(f, v) = -\,E(u, v), \qquad (u = v = 0 \text{ en } c).$$

Para comparar los valores que ambas funciones dan a la integral $E[u]$ desarrollaremos:

$$\text{[XXVIII-218]} \qquad E[u + v] = E[u] + E[v] +$$
$$+\, 2\int\!\!\int [r(u_x v_x + u_y v_y) + a(uv)_x + b(uv)_y + quv]\,dx\,dy \quad ,$$

integrando por partes la última integral (§ 88-6, nota 3) se anulan en los extremos los términos que contienen el factor u o bien v y queda este integrando:

$$-2[(ru_x)_x + (ru_y)_y + a_x u + b_y u - qu]v = -\,2L[u]v = -\,2fv \quad ,$$

luego recordando [XXVIII-215], resulta:

$$E[u + v] = E[u] + E[v] - 2(f, v) \geqslant E[u] - 2(f, v),$$

o sea

$$E[u + v] + 2(f, u + v) \geqslant E[u] + 2(f, u).$$

Resulta así este teorema que generaliza amplísimamente el teorema 1, por la naturaleza del recinto y la forma general de la ecuación y de la integral:

TEOR. 2. *Si se conserva* $a_x \leqslant 0$, $b_y \leqslant 0$ *en* D *y si* $g(x, y)$ *está definido en* D, *siendo* $D[g] < \infty$, *y es* $u = u(x, y)$ *la solución de* $L[u] = f$ *que toma en* c *los mismos valores que* g, *entonces es* $E[u] + 2(f, u) \leqslant \leqslant E[g] + 2(f, g)$.

En particular, para $f = 0$ en D:

COROLARIO. *Si* $L[u] = 0$ *y es* $u = g$ *en* c, *se verifica* $E[u] \leqslant E[g]$.

En el caso $\Delta u = 0$ resulta el teorema 1 para todo recinto D, es decir, queda generalizado el principio de DIRICHLET, convertido en teorema.

3. *Método variacional directo y autoproblemas.* — *a) Ecuación variacional de* EULER *para funciones ligadas.* — Refiriéndonos a dos variables, pero con validez para más, deduzcamos la ecuación a que debe satisfacer $u = u(x, y)$ para hacer mínima:

$$\text{[XXVIII-219]} \qquad \begin{cases} I[u] = \displaystyle\int\!\!\int_D f(x, y, u, p, q)\,dx\,dy, \text{ con ligadura} \\[2ex] J[u] = \displaystyle\int\!\!\int_D \varphi(x, y, u, p, q)\,dx\,dy = \text{const.}, \end{cases}$$

donde $p = u_x$, $q = u_y$.

Elegidas $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$ nulas en c, hagamos variar u poniendo $u + rv + tw$ (r, t números reales) y para que sea mínima $I(r, t)$ con ligadura $J(r, t) = \text{const.}$ para $r = t = 0$, *es necesaria*, según el método de LAGRANGE (§ 70-8), la anulación de la diferencial $I - \lambda J$, es decir, de las derivadas parciales $I_r - \lambda J_r = 0$, $I_t - \lambda J_t = 0$, para $r = t = 0$ (empleando el parámetro $-\lambda$ en lugar de $+\lambda$, por conveniencia

posterior). Desarrollada ésta, pues el cálculo es el mismo para las otras, tenemos:

[XXVIII-220] $$\int\int_D [(f_u - \lambda\varphi_u) w + (f_p - \lambda\varphi_p) w_x + (f_q - \lambda\varphi_q) w_y] dx\, dy = 0.$$

Integrando por partes (§ 88-6, nota 3) los términos en w_x, w_y, se tiene

$$\int_c (f_p - \lambda\varphi_p) w\, dy - \int_c (f_q - \lambda\varphi_q) w\, dx - \int\int_D w D_x (f_p - \lambda\varphi_p) dx\, dy -$$
$$- \int\int_D w D_y (f_q - \lambda\varphi_q) dx\, dy \quad ,$$

pero las integrales curvilíneas son nulas, por anularse w en c, y la ecuación [XXVIII-220] se reduce a ésta:

$$\int\int_D w[(f_u - \lambda\varphi_u) - D_x(f_p - \lambda\varphi_p) - D_y(f_q - \lambda\varphi_q)] dx\, dy = 0 \quad ,$$

que debe verificarse en todo dominio parcial en D, debiendo ser, por tanto, nulo su integrando; es decir, puesto que w no es idénticamente nula:

[XXVIII-221] $$(f_u - D_x f_p - D_y f_q) - \lambda(\varphi_u - D_x\varphi_p - D_y\varphi_q) = 0.$$

El cálculo análogo para la v daría el *mismo* resultado. He aquí una novedad notable, pues por resultar dos ecuaciones equivalentes, no queda determinado λ; pero tampoco puede ser arbitrario, pues u está sujeta además a la condición de contorno $u = 0$ en c; hay solamente ciertos autovalores λ_n compatibles con esa condición, como ahora veremos en el caso más importante.

b) *Integral de* DIRICHLET *con ligadura y autoproblema correlativo.* — Para la integral de DIRICHLET:

[XXVIII-222] $$D[u] = \int\int (u_x^2 + u_y^2) dx\, dy$$

$$\text{con ligadura} \quad \int\int u^2\, dx\, dy = 1 \quad ,$$

la ecuación de EULER [XXVIII-221] *necesaria*, aunque *no suficiente*, en este caso sencillo se reduce a ésta:

[XXVIII-223] $$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0.$$

Ya hemos dicho que el parámetro λ sólo puede tomar ciertos autovalores λ_n, pero ahora surge su significado variacional, pues el valor de la integral, transformada por partes (§ 88-6, nota 3) y teniendo en cuenta la condición de contorno $u = 0$ en c, es:

$$D[u] = \int\int (u_x^2 + u_y^2) dx\, dy = \int\int u_x u_x\, dx\, dy + \int\int u_y u_y\, dx\, dy =$$
$$= - \int\int u(u_{xx} + u_{yy}) dx\, dy = \lambda \int\int u^2\, dx\, dy = \lambda \quad ,$$

que demuestra: *los autovalores* λ_n *son los valores extremales de la integral* $D[u]$; *todos son positivos y el primero* λ_1 *es el mínimo absoluto.*

Así vislumbramos el amplio campo de conexiones existente entre los autoproblemas y el método variacional.

c) *Método directo de* RITZ. — Para satisfacer la triple condición:

$$
[\text{XXVIII-224}] \quad \begin{cases} \mathrm{D}[u] = \displaystyle\iint (u_x^2 + u_y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{mínima}, \\ \mathrm{J}[u] = \displaystyle\iint u^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1, \\ \text{condición de contorno: } u = 0 \text{ en } c, \end{cases}
$$

Ritz parte de una sucesión fundamental de funciones $p_n = \mathrm{p}_n(x, y)$ nulas en c y tales que *toda función continua y diferenciable* $u = \mathrm{u}(x, y)$, *sea aproximable indefinidamente por combinaciones lineales* $\sum k_n \mathrm{p}_n(x, y)$.

Si tratamos de satisfacer la triple condición [XXVIII-224] con combinaciones lineales de este tipo, por ejemplo, $k_1\mathrm{p}_1(x, y) + k_2\mathrm{p}_2(x, y) + k_3\mathrm{p}_3(x, y)$ los coeficientes deben cumplir estas dos condiciones:

$$
\iint [(k_1 p_{1x} + k_2 p_{2x} + k_3 p_{3x})^2 + (k_1 p_{1y} + k_2 p_{2y} + k_3 p_{3y})^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{mínima},
$$

$$
\iint (k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1.
$$

He aquí dos formas cuadráticas de coeficientes conocidos: $\mathrm{F}(k_1, k_2, k_3)$ que debe hacerse mínima para valores ligados por otra forma $\Phi(k_1, k_2, k_3) = 1$.

Este problema de álgebra se resuelve por el método de Lagrange (§ 70-8), igualando a cero las tres derivadas de $\mathrm{F} - \lambda\Phi$ que son lineales, y estas tres ecuaciones lineales, conjuntamente con la $\Phi = 1$ determinan k_1, k_2, k_3 y λ.

La función así obtenida cumple las tres condiciones [XXVIII-224]; pero el valor que da a $\mathrm{D}[u]$ es mínimo respecto de los que dan esa integral las *funciones de la misma familia*, lo que no excluye que *otras* funciones u hagan a esta integral menor que ese mínimo.

Hagamos aplicación del método al importante problema del recinto elíptico, para los autovalores de la ecuación $\Delta u + \lambda u = 0$, cuya importancia en la teoría de los movimientos vibratorios pudo apreciarse cumplidamente (nota VIII).

d) Autovalores de la ecuación $\Delta u + \lambda u = 0$ *para el recinto elíptico.* — La función más sencilla que se anula en la elipse c (fig. 409):

$$
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ,
$$

es:

$$
u_1 = k(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2),
$$

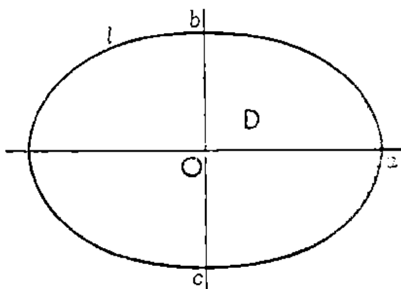


Fig. 409.

y la segunda condición [XXVIII-224], abreviando la notación de las integrales dobles sobre el recinto elíptico, expresa:

$$
a^4\int y^4 + 2a^2b^2\int x^2y^2 + b^4\int x^4 - 2a^4b^2\int y^2 - 2b^4a^2\int x^2 + \\ + a^4b^4\pi ab = 1/k^2
$$

y calculadas estas integrales (§ 82-4; § 51-4, *c*; [53-10]):

$$
\int y^4 = \frac{1}{8}ab^5\pi \quad ; \quad \int x^2y^2 = \frac{1}{24}a^3b^3\pi \quad ; \quad \int x^4 = \frac{1}{8}a^5b\pi \quad ;
$$

$$
\int y^2 = \frac{1}{4}ab^3\pi \quad ; \quad \int x^2 = \frac{1}{4}a^3b\pi \quad ;
$$

resulta $k^2 = 3/(\pi a^5b^5)$.

El valor que esta función $u_1 = u_1(x, y)$ da a la integral es:

$$[\text{XXVIII-225}] \quad D[u_1] = 4k^2 \int b^4x^2 + a^4y^2 = \pi k^2a^3b^3(a^2 + b^2) =$$
$$= 3(a^2 + b^2) / (a^2b^2),$$

que es una primera aproximación λ_1 por exceso, al autovalor λ.

Para mejorarla, adoptemos este polinomio con tres coeficientes k_1, k_2, k_3 indeterminados, nulo en c:

$$u_2 = (a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)\,(k_1a^2y^2 + k_2b^2x^2 - k_3a^2b^2),$$

y la integral $D[u_2]$ es una forma cuadrática en k_1, k_2, k_3 variables ligadas por otra ecuación cuadrática, que están determinadas por un sistema lineal, obteniéndose así una mayor aproximación λ_2 respecto de λ_1.

Ejemplo 7. Efectuando el cálculo para el caso $a = 2$, $b = 1$, y obtenidas las integrales

$$\int 1 = 2\pi \quad ; \quad \int x^2 = 2\pi \quad ; \quad \int y^2 = \frac{1}{2}\pi \quad ;$$
$$\int x^4 = 4\pi \quad ; \quad \int x^2y^2 = \frac{1}{3}\pi \quad ; \quad \int y^4 = \frac{1}{4}\pi \quad ;$$
$$\int x^6 = 10\pi \quad ; \quad \int x^4y^2 = \frac{1}{2}\pi \quad ; \quad \int x^2y^4 = \frac{1}{8}\pi \quad ;$$
$$\int y^6 = \frac{5}{32}\pi \quad ; \quad \int x^8 = 28\pi \quad ; \quad \int x^6y^2 = \pi \quad ;$$
$$\int x^4y^4 = \frac{3}{20}\pi \quad ; \quad \int x^2y^6 = \frac{1}{16}\pi \quad ; \quad \int y^8 = \frac{7}{64}\pi \quad ;$$

resulta que se ha de hacer mínima la forma cuadrática

$$D[u_2] = \pi\left(\frac{376}{3}k_1^2 + \frac{184}{3}k_2^2 + 640\,k_3^2 + \frac{80}{3}k_1k_2 - \right.$$
$$\left. - \frac{640}{3}k_2k_3 - \frac{640}{3}k_3k_1\right)$$

con la condición

$$J[u_2] = \pi\left(\frac{32}{5}k_1^2 + \frac{32}{5}k_2^2 + \frac{512}{3}k_3^2 + \frac{64}{15}k_1k_2 - \right.$$
$$\left. - \frac{128}{3}k_2k_3 - \frac{123}{3}k_3k_1\right) = 1.$$

El método de Lagrange (§ 70-8) da las condiciones:

$$[\text{XXVIII-226}] \quad \begin{cases} (250{,}66 - 12{,}8\,\lambda)\,k_1 + (26{,}66 - 4{,}27\,\lambda)\,k_2 + \\ \qquad + (-213{,}33 + 42{,}66\,\lambda)\,k_3 = 0, \\ (26{,}66 - 4{,}27\,\lambda)\,k_1 + (122{,}66 - 12{,}8\,\lambda)\,k_2 + \\ \qquad + (-213{,}33 + 42{,}66\,\lambda)\,k_3 = 0, \\ (-213{,}33 + 42{,}66\,\lambda)\,k_1 + (-213{,}33 + 42{,}66\,\lambda)\,k_2 + \\ \qquad + (1280 - 341{,}32\,\lambda)\,k_3 = 0, \end{cases}$$

compatibles, con solución no nula, si λ verifica la ecuación:

$$0{,}019\,\lambda^3 - 0{,}848\,\lambda^2 + 9{,}464\,\lambda - 23{,}811 = 0,$$

cuya raíz mínima es $\lambda_2 \leqslant 3{,}57$, mientras que la anterior aproximación era $\lambda_1 = 3{,}75$, obtenida haciendo $a = 2$, $b = 1$ en [XXVIII-225]. Trefftz ha demostrado en *Mathematische Annalen* (1933), que λ supera a 3,49,

luego ya tenemos dos cifras exactas 3; 5. La función u_2 correspondiente a $D[u_2] = \lambda_2$ se obtiene para $k_1 = 0{,}01005$, $k_2 = 0{,}02963$, $k_3 = 0{,}03925$, solución del sistema lineal homogéneo [XXVIII-226] con la condición $J[u_2] = 1$.

4. *Método variacional constructivo de* HILBERT. — *a*) *Compacidad y continuidad inferior.* — Para captar la idea esencial del método *constructivo*, fijémonos, por ejemplo, en el clásico problema de las geodésicas de una superficie S. Dados en ella dos puntos A, B, consideremos el conjunto de todos los arcos rectificables sobre S de extremos A, B. Puesto que su longitud l_r tiene como cota inferior la distancia AB, existe un número $l = \inf l_r$, y por tanto, una sucesión parcial convergente $l_n \to l$; sean y_n los correspondientes arcos de extremos A, B que tienen las longitudes l_n.

¿Cómo determinar un arco y cuya longitud sea precisamente l? Se trata, en suma, de probar que en el espacio de los arcos rectificables sobre S, el extremo inferior l es *accesible.* Bien sabemos que tal sucede para las funciones de variable real (Cap. XV, nota II), cuando se cumplen dos condiciones: 1ª) El espacio o campo de variabilidad es *compacto,* es decir, se verifica el teorema de BOLZANO sobre la existencia de puntos de acumulación (Cap. XVIII, nota II, *b*); y ese punto de acumulación pertenece al campo, lo que se expresa diciendo que éste es *compacto en sí* *. 2ª) La función $f[y]$ es *continua inferiormente* (Cap. VI. nota V), es decir, para cada ε hay un entorno de y_0 tal que en él es $f[y] > f[y_0] - \varepsilon$.

Para evitar el postulado de libre elección (§ 94-7), es preferible definir la *compacidad* de Y así: *en toda sucesión de* Y *hay una sucesión parcial convergente*; cuando el límite pertenece a Y este espacio se dice *compacto en sí.* Si los "puntos" o elementos de Y son funciones y la convergencia anterior de sus sucesiones es la uniforme (§ 43-3, § 65-2), la familia Y se llama *uniformemente compacta.*

La compacidad del espacio de los arcos de longitud acotada superior o inferiormente, resultará como corolario de un teorema muy general que después demostraremos (ver *e*, 3), y bueno es observar que, sin esa restricción de la acotación superior e inferior, pueden no existir elementos de acumulación. Así, por ejemplo, no hay curva de acumulación de la sucesión de circunferencias concéntricas de radios 1, 1/2, 1/3, ..., y tampoco la hay para la sucesión de curvas $y = \operatorname{sen} nx$ en $(0, \pi)$. Las familias compactas de funciones suelen llamarse también *normales* según MONTEL, y bien se comprende su importancia, pues para ellas valen los teoremas fundamentales de las funciones de E_n.

En cuanto a la continuidad inferior, no constituye una caprichosa generalización de la continuidad, sino una necesidad, pues precisamente la longitud $l[y]$ de las curvas rectificables nos ofrece un ejemplo notable de función continua *inferiormente,* pero *no superiormente* (Cap. XV, nota II). En efecto, refiriéndonos, para abreviar, a curvas planas, sea AB un arco rectificable definido en $(0; 1)$ por una función $y = y(x)$; nada más fácil que construir arcos tan próximos a él como se quiera, con longitud arbitrariamente grande. En efecto, la función $y(x) + (1/n)\cos(n^2\pi x)$ dista ("uniformemente", § 96, ejercicio 5) de la $y(x)$ exactamente $1/n$, pues la diferencia es $(1/n)\cos(n^2\pi x)$, que oscila entre $-1/n$, $+1/n$.

Como esos extremos los alcanza para $x = 0$, $1/n^2$, $2/n^2$, ..., $(n^2 - 1)/n^2$, 1, la longitud de la cuerda ondulada puede ser arbitrariamente grande, pues desde un n en adelante supera a $(2/n) \cdot n^2 = 2n$.

No se verifica, por tanto, la acotación $l[y] < l[y_0] + \varepsilon$, por muy

---

* Un recinto infinito en el espacio E_n no es compacto por haber sucesiones sin punto de acumulación. Los recintos acotados son *compactos*; si se agrega el contorno son *compactos en sí.*

próximo que se elija y a y_0. En cambio, es $l[y] > l[y_0] - \varepsilon$, según se demostró en Cap. XV, nota II, es decir: *la longitud es una funcional del arco, inferiormente continua.*

Asimismo se demuestra: el área $S[y]$ es una funcional de la superficie, *inferiormente continua.* El clásico ejemplo de SCHWARZ (Cap. XXI, nota I) pone en claro la existencia de superficies infinitamente próximas a la superficie cilíndrica, con área finita o arbitrariamente grande, pero no inferior a $S - \varepsilon$ (Cap. XXIV, nota III).

La moderna elaboración del cálculo de variaciones, especialmente por obra de TONELLI, consiste en obtener criterios de continuidad inferior para muchos tipos de integrales, a fin de poder aplicar el teorema de existencia del mínimo. La teoría de los espacios abstractos ha aclarado dichas investigaciones y ha señalado que es esencial precisar el concepto de "proximidad" entre los pares de funciones o "puntos" del espacio Y considerado; según sea la "proximidad" convenida, tendremos una u otra topología con unas u otras propiedades.

b) Sucesiones extremales y teorema extremal. — Las condiciones en que se apoya la teoría elemental de máximos y mínimos (§ 70), nos dan la pauta para elaborar el cálculo abstracto de variaciones sobre dos teoremas básicos, el de *compacidad* (que generaliza el de BOLZANO) y el *extremal* (que generaliza el de BOLZANO-WEIERSTRASS):

TEOREMA EXTREMAL. — *Si* f$[y]$ *es una funcional continua inferiormente en un espacio* Y, *compacto en sí, entonces está acotada inferiormente y toma un valor mínimo finito. Es decir, existe al menos una función* y_0 *tal que para toda otra función* y, *es* f$[y] \geqslant$ f$[y_0]$.

Llamemos $\lambda =$ inf. f$[y]$ al extremo inferior (finito o bien $= -\infty$) de los valores reales finitos de f$[y]$ definida en el espacio Y. Por definición de extremo (§ 23-14) ese número λ es límite de una sucesión de valores de f$[y]$ que tienden a λ, es decir, lim f$[y_n] = \lambda$.

Esta sucesión de funciones $\{y_n\}$ se llama *sucesión extremal* y por la supuesta compacidad en sí de Y, existe una sucesión parcial y_{n_i} que converge hacia una función y_0 de Y. Prescindiendo de las restantes y_n, podemos adoptar para esta sucesión parcial la nueva numeración: $y_i \to y_0$, siendo además f$[y_i] \to \lambda$.

Puesto que y_0 pertenece a la familia Y, le corresponde un valor finito f$[y_0] = \lambda_0 \geqslant \lambda$. Supongamos que sea $\lambda_0 > \lambda$; elegido un número intermedio λ' tal que $\lambda_0 > \lambda' > \lambda$, se verificará:

por la convergencia f$[y_i] \to \lambda$, desde un i es f$[y_i] < \lambda'$,

por la continuidad inferior de la funcional f$[y]$ es f$[y_i] > \lambda'$;

tal contradicción impone que sea f$[y_0] = \lambda$.

Nada hay de nuevo, como se ve (Cap. VI, nota V), en esta demostración, que vale indistintamente para funciones y funcionales.

Las dificultades que deben vencerse para tener demostrada la accesibilidad del extremo inferior de una funcional f$[y]$ son dos: demostrar la *compacidad en sí* de la familia de funciones que forman los "puntos" del espacio Y, y la *continuidad inferior* de f$[y]$; para ello es esencial la topología que se considere en Y.

c) Familias compactas de funciones. — Ya conocido el concepto de equicontinuidad (§ 86-1, def. 2; § 65-2, nota 2) diremos, en general, que una familia Y de funciones $\{y = $ y$(x)\}$ es *equicontinua* en un conjunto X, cuando para cada $\varepsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ que depende de ε pero *no de la función* $y =$ y(x), tal que $|$y$(x') -$ y$(x'')| < \varepsilon$ para todo par x', x'' de X tal que $|x' - x''| < \delta$.

El teorema de ARZELÁ sobre las funciones reales equicontinuas, el de HILBERT sobre los arcos rectificables acotados, el de MONTEL sobre las funciones holomorfas acotadas, y muchos otros análogos (que integran la

teoría de las familias llamadas *normales* por MONTEL), quedan incluídos en el teorema general siguiente:

TEOREMA DE COMPACIDAD. — *Toda familia equicontinua* Y *de funciones* $\mathrm{y}(x)$ *definidas en un conjunto compacto en sí* X, *real o complejo, y cuyos valores* $y = \mathrm{y}(x)$ *son números reales o complejos de un conjunto compacto* C, *es uniformemente compacta* *.

DEM. 1º Sea $x_1, x_2, \ldots$, la sucesión de puntos racionales de X tal que todo punto x de éste es límite de una sucesión parcial $x_n \to x$ (§ 2-7, ejemplo 4; § 20-6, *b*). Puesto que por la compacidad de C los valores $y = \mathrm{y}(x_1)$ que toman en el punto x_1 todas las funciones de la familia Y, tienen algún punto de acumulación y_1 (teorema de BOLZANO), hay una sucesión de valores $\mathrm{y}_\nu(x_1)$ convergente hacia y_1, es decir: la sucesión de funciones:

[XXVIII-227] $$\mathrm{y}_1(x),\ \mathrm{y}_2(x),\ \mathrm{y}_3(x),\ \ldots,\ \mathrm{y}_\nu(x),\ \ldots,$$

converge en x_1 hacia y_1.

Es claro que esa sucesión de funciones no tiene por qué converger en el punto x_2, pero por la supuesta compacidad del conjunto C, hay en la sucesión de puntos $\mathrm{y}_1(x_2), \mathrm{y}_2(x_2), \ldots$, una sucesión parcial convergente hacia un cierto punto y_2; por tanto, si esos índices son $i_1, i_2, \ldots$, la correspondiente sucesión de funciones:

[XXVIII-228] $$\mathrm{y}_{i_1}(x),\ \mathrm{y}_{i_2}(x),\ \ldots,\ \mathrm{y}_{i_n}(x),\ \ldots \left\{\begin{array}{l}\text{converge en } x_1 \text{ hacia } y_1,\\ \text{converge en } x_2 \text{ hacia } y_2.\end{array}\right.$$

De esta sucesión se puede seleccionar, por igual método, una sucesión parcial:

[XXVIII-229] $$\mathrm{y}_{j_1}(x),\ \mathrm{y}_{j_2}(x),\ \ldots,\ \mathrm{y}_{j_n}(x),\ \ldots \left\{\begin{array}{l}\text{converge en } x_1 \text{ hacia } y_1,\\ \text{converge en } x_2 \text{ hacia } y_2,\\ \text{converge en } x_3 \text{ hacia } y_3.\end{array}\right.$$

La sucesión diagonal del cuadro [XXVIII-227], [XXVIII-228], [XXVIII-229], ..., es parcial de todas (desde el término principal en adelante), luego esa sucesión de funciones $\mathrm{y}_1(x)$, $\mathrm{y}_{i_2}(x)$, $\mathrm{y}_{j_3}(x)$, ..., que una vez suprimidas todas las demás de la familia, podemos designar simplemente:

[XXVIII-230] $$\mathrm{y}_1(x),\ \mathrm{y}_2(x),\ \ldots,\ \mathrm{y}_\nu(x),\ \ldots \left\{\begin{array}{l}\text{converge en } x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\\ \text{hacia } y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\end{array}\right.$$

2º *La sucesión diagonal así formada converge uniformemente en todo punto* x *de* X. Puesto que x es límite de una sucesión de puntos $x_n \to x$, elijamos $n \geqslant \nu$ tal que $|x - x_n| < \delta$, siendo δ suficientemente pequeño para que se verifique, por la supuesta equicontinuidad:

[XXVIII-231] $$|\mathrm{y}(x) - \mathrm{y}(x_n)| < \varepsilon$$

para *toda* función $\mathrm{y}(x)$ de la familia.

* Recordemos de nuevo que en el campo real o en el complejo a que nos atenemos en este enunciado, C *compacto* equivale a *acotado* y *cerrado* (completo), pues así vale el teorema de BOLZANO. El caso más simple es el intervalo finito o dominio finito (incluso el contorno), pero puede estar formado por varios dominios, arcos y puntos aislados.

Como ésta ha quedado reducida a la sucesión diagonal [XXVIII-230], para demostrar su convergencia en el punto x acotemos la diferencia de Cauchy (§ 20-6, a):

[XXVIII-232] $$y_p(x) - y_q(x) = [y_p(x) - y_p(x_n)] + [y_p(x_n) - y_q(x_n)] + [y_q(x_n) - y_q(x)].$$

Por la equicontinuidad [XXVIII-231], son $< \varepsilon$ los sumandos 1º y 3º para *todos* los índices p, q y para $n \geqslant \nu$; fijado n, como la sucesión [XXVIII-230] converge en el punto x_n, el 2º sumando es $< \varepsilon$ para p y q superiores a cierto μ; luego, en definitiva:

$$|y_p(x) - y_q(x)| < 3\varepsilon \quad \text{para} \quad p, q > \mu \; ,$$

y por el teorema de Cauchy (§ 20-6, a) existe:

[XXVIII-233] $$\lim y_p(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \text{ de } X.$$

3º *La función límite* $f(x)$ *es continua en todo punto* x_0 *de* X. Basta descomponer así el incremento:

[XXVIII-234] $$f(x) - f(x_0) = [f(x) - y_p(x)] + [y_p(x) - y_p(x_0)] + [y_p(x_0) - f(x_0)].$$

Por la equicontinuidad, el segundo sumando es $< \varepsilon$, si se elige un entorno $|x - x_0| < \delta$ de x_0; como esto vale para todo p, elijamos p suficientemente grande para que el primer y tercer sumandos sean $< \varepsilon$, gracias a la demostrada convergencia [XXVIII-233] en x y en x_0. En el entorno $|x - x_0| < \delta$ es, por tanto, $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$.

4º *La convergencia* $y_p(x) \to f(x)$ *es uniforme en* X. Descompongamos análogamente el error de la convergencia en el entorno de cada punto x_0:

[XXVIII-235] $$f(x) - y_p(x) = [f(x) - f(x_0)] + [f(x_0) - y_p(x_0)] + [y_p(x_0) - y_p(x)].$$

Es el 1er. sumando $< \varepsilon$ en un entorno U de x_0 por la continuidad demostrada; es el 2º sumando $< \varepsilon$ para $p > \mu$ por la convergencia [XXVIII-233]; es el 3er. sumando $< \varepsilon$ en un entorno V de x_0 para todo p por la equicontinuidad. Luego, en un entorno W de x_0 contenido en U y V es $|f(x) - y_p(x)| < 3\varepsilon$ para $p > \mu$. Siendo compacto en sí el conjunto X, hay un número finito de entornos W que lo cubren (Cap. XVIII, nota II) y para el mayor de los índices μ que llamaremos μ_0 es $|f(x) - y_p(x)| < 3\varepsilon$ si $p > \mu_0(\varepsilon)$, *independiente de* x *cualquiera en* X, luego la convergencia es uniforme en X.

Observación: La familia Y puede no ser compacta *en sí*. Por ejemplo, la familia equicontinua de funciones $y_p(x) = 1/p$, $(p = 1, 2, \ldots)$ converge uniformemente hacia la función $f(x) \equiv 0$ que no pertenece a la familia, y por tanto, ésta aun siendo compacta, no es compacta *en sí*.

d) *Generalización del teorema de compacidad.* — Aunque el teorema fundamental ha sido enunciado para variables y funciones reales o complejas, especialmente para el caso importante en que X é Y son *dominios acotados*, la demostración ha sido expuesta de modo tal, que su alcance es mucho más amplio. Repasándola, observamos:

1º Lo esencial es que haya en X un conjunto *denso numerable* $\{x_n\}$, es decir, tal que cada x de X sea límite de alguna sucesión parcial $x_n \to x$. Tales espacios se llaman *separables* (cfr. § 94-2, nota 1).

2º La equicontinuidad no exige que X sea *métrico*; basta que sea *topológico* (Cap. XVIII, nota I) y en éste la equicontinuidad significa que para cada ε y cada x_0 hay un entorno U tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ para todo x de U y *toda función* de la familia.

Con esta ampliación de las hipótesis queda demostrada con leves cambios de palabras el siguiente teorema mucho más general:

Toda familia equicontinua Y *de funciones* y(x) *definidas en un conjunto separable y compacto en sí* X *de un espacio topológico, cuyos valores* y *pertenecen a un conjunto compacto* C *de un espacio métrico, es uniformemente compacta.*

e) *Tipos notables de familias compactas.* — Para fijar las ideas hagamos aplicaciones concretas, deduciendo, como sencillas consecuencias, importantes teoremas del Análisis matemático.

1) Si y(x) son funciones reales uniformes equiacotadas (es decir, $|\text{y}(x)| < k$, con k independiente de y), la equicontinuidad de la familia implica la compacidad (ASCOLI). En efecto, como es $|\text{y}(x)| < k$, con un mismo k para *todas* las funciones de la familia, de [XXVIII-235] resulta $|\text{f}(x)| < |\text{y}_p(x)| + 3\varepsilon$, luego $|\text{f}(x)| < k$, es decir, la familia es *compacta* (aunque pueda no ser compacta *en sí*; cfr. observación anterior).

2) Si y(x) es un punto del plano, función c o n t i n u a de x y es $|\text{y}(x)| < k$ se tiene una familia Y de curvas continuas equiacotadas (rectificables o no); la e q u i c o n t i n u i d a d: $|\text{y}(x') - \text{y}(x'')| < \varepsilon$ para $|x' - x''| \leqslant \delta$ implica entonces que la familia Y es *compacta* (ARZELÁ) (aunque pueda no ser compacta *en sí*; cfr. observación anterior).

3) Si todas las curvas transformadas del intervalo [0; 1] tienen longitud finita y acotada, es decir, inferior a un *mismo* número fijo l, es fácil deducir como consecuencia una correspondencia equicontinua con el segmento [0; 1], sin más que tomar como punto homólogo de $x \leqslant 1$, el punto de cada curva cuya distancia en arco al origen y(0) es xs, donde s es la longitud de la curva respectiva, pues entonces $|\Delta \text{y}| < l\,|\Delta x|$, y basta tomar $|\Delta x| < \varepsilon/l$ para que sea $|\Delta \text{y}| < \varepsilon$ para *todas* las funciones, es decir obtenemos la equicontinuidad y, por tanto, la compacidad (HILBERT). Pues escribiendo [XXVIII-234] para los d i v e r s o s p a r e s (x_i, x_{i+1}) y sumando, resulta para p bastante avanzado:

$$\sum |\text{f}(x_i) - \text{f}(x_{i+1})| < \sum |\text{y}_p(x_i) - \text{y}_p(x_{i+1})| + 2\varepsilon \quad ,$$

luego, el primer miembro, perímetro de la poligonal inscrita en la curva construída es $< l + 2\varepsilon$; y, por tanto, $< l$; luego, la familia de *todas* las curvas de longitud $< l$ construídas en un dominio es *compacta en sí.*

La importancia del teorema de compacidad y de sus corolarios radica en el teorema extremal. Así, la longitud de un arco es función continua inferiormente del mismo, y al poder aplicar el teorema extremal, resulta que en todas las familias de curvas que acabamos de considerar hay una de longitud mínima. He aquí una aplicación importante: Sea C una superficie acotada y completa (o cerrada) tal que en ella haya arcos rectificables de extremos A, B. Si s es la longitud de uno de ellos, la familia de arcos AB cuya longitud es $\leqslant s$ es compacta en sí. Luego, resulta la existencia de un arco de longitud mínima, es decir, de una geodésica de extremos A, B.

Obsérvese la trascendencia de estos teoremas para el Cálculo de variaciones. La teoría clásica de EULER, WEIERSTRASS, etc., dejaba sin demostrar la existencia de la función que hace mínima la integral, mientras que con el método diagonal no solamente hemos demostrado su existencia, sino que la hemos construído.

Aunque no interesan para nuestro programa, incluímos otros ejemplos de familias compactas en la siguiente tabla, para mostrar el alcance del teorema general de compacidad.

Así, puede demostrarse inmediatamente el teorema de MONTEL (4), sin más que escribir las funciones como integral de CAUCHY (§ 115-7). El caso (5) es corolario inmediato mediante una inversión.

Conjunto X	Conjunto C	Funciones de Y	Signos geométricos
1) Intervalo finito $a \leqslant x \leqslant b$.	Números reales.	Funciones reales $y(x)$ equicontinuas y equiacotadas.	Curvas uniformes acotadas. (ASCOLI)
2) Intervalo finito $a \leqslant t \leqslant b$.	Puntos de E_2.	Pares de funciones reales $x(t)$, $y(t)$, equicontinuas y equiacotadas.	Curvas acotadas. (ARZELÀ)
3) Intervalo real $a \leqslant t \leqslant b$.	Puntos de E_2.	Pares de funciones de variación acotada y equiacotadas.	Curvas de longitud acotada. (HILBERT).
4) Dominio complejo Z.	Números complejos.	Funciones holomorfas en Z uniformemente acotadas.	(MONTEL).
5) Dominio complejo Z.	Números complejos.	Funciones holomorfas en Z que excluyen un círculo.	
6) Plano complejo.	Números complejos.	Funciones holomorfas en un recinto simplemente conexo, que excluyen dos valores.	(PICARD).

XI. **Bibliografía.** — 1. Tratan sobre ecuaciones diferenciales en derivadas parciales muchos de los cursos y tratados generales de Análisis, en especial los de GOURSAT y VALIRON (citados en Cap. VI, nota VI, 5).

De entre los libros citados en Cap. XXVII, nota III, 2, tratan sobre ecuaciones en derivadas parciales los de HOHEISEL y de HORN de ese título, así como los de BIEBERBACH, KAMKE, FORSYTH, MARÍN TOYOS, BLANC, PUIG ADAM y LEVI.

2. Un lúcido y preciso tratamiento de la teoría general de ecuaciones en derivadas parciales, donde cada capítulo (salvo el primero) termina con un breve esquema informativo sobre los resultados modernos, da la obra traducida del ruso:

I. G. PETROWSKI: *Lectures on partial differential equations* (Interscience Publ., Nueva York-Londres, 1954); *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen* (Teubner, Leipzig, 1955).

Excelente exposición de la teoría, con valiosa selección de problemas en cada capítulo, es la obra litografiada, con material clásico y modernos métodos numéricos:

F. G. TRICOMI: *Lezioni sulle equazioni a derivate parziali* (Gheroni, Torino, 1954).

Un desarrollo elemental, con énfasis en la interpretación geométrica, numerosos ejemplos, aplicaciones y ejercicios con respuestas al final, da:

F. H. MILLER: *Partial differential equations* (Wiley, Nueva York, 1941).

3. Sobre ecuaciones diferenciales parciales de primer orden tratan VALLÉE-POUSSIN (citado en Cap. VI, nota VI, 4) y el volumen II de KAMKE (citado en Cap. XXVII, nota III, 4) dividido en dos partes de las cuales la primera es una concisa exposición de los conceptos y métodos generales a usar en el estudio de ecuaciones de ese tipo, y la segunda es una tabla de soluciones de alrededor de 300 ecuaciones particulares. También trata casi exclusivamente sobre ecuaciones y sistemas de primer

orden la obra de HOHEISEL: *Partielle Differentialgleichungen* (citada en Cap. XXVII, nota III, 2).

Una exposición sucinta de orientación moderna sobre el estado del problema de la integración de este tipo de ecuaciones en la fecha de su publicación, es:

M. SALTYKOW: *Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue* (Mém. Sc. Math., LXX; Gauthier-Villars, Paris, 1935).

Son clásicas y extensas las ya antiguas pero importantes obras

E. GOURSAT: *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (2ª ed., Hermann, Paris, 1921);

E. GOURSAT: *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (Vol. I, 1896; Vol. II, 1898; Hermann, Paris);

V. VOLTERRA: *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles* (Upsala, 1906).

La obra de B. LEVI (citada en Cap. XXVII, nota III, 2) está dirigida principalmente a tratar con rigor plenamente logrado los sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para funciones analíticas. En ella se incluyen fundamentales lemas algebraicos de importancia tanto teórica como práctica para la posterior construcción efectiva de la solución formal en series aproximantes. Dicha obra se avalora con adecuados ejemplos aclaratorios, interesantes en sí por sus aplicaciones a la Elasticidad, Física o Geometría. Esta importante obra es la continuación más significativa de la clásica

CH. RIQUIER: *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (Gauthier-Villars, Paris, 1910),

tema también tratado en las obras antes citadas de GOURSAT y en

M. JANET: *Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (Gauthier-Villars, Paris, 1930).

4. Exposiciones adecuadas para estudiantes de ingeniería traen HORN: *Partielle Differentialgleichungen* y BLANC (citados en Cap. XXVII, nota III, 2) y la obra traducida del ruso:

W. I. LEWIN y J. I. GROSBERG: *Differentialgleichungen der mathematischen Physik* (Verlag Technik, Berlín, 1952).

Un tratamiento apropiado para problemas de ingeniería, con resultados en ocasiones sin demostración estricta, es la obra orientada hacia la resolución de problemas de contorno por el método de separación de variables y desarrollo de funciones en términos de funciones características:

K. S. MILLER: *Partial differential equations in engineering problems* (Prentice-Hall, Nueva York, 1953).

Una obra que, suponiendo en el lector sólo un nivel moderado de capacitación matemática, lo lleva hábilmente y con rapidez hacia los instrumentos matemáticos más avanzados de aplicación, con abundantes ejemplos y referencias, es:

F. SCHWANK: *Randwertprobleme und andere Anwendungsgebiete der höheren Analysis für Physiker, Mathematiker und Ingenieure* (Teubner, Leipzig, 1951).

5. Tratan con extensión la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales los libros sobre métodos de la Física matemática, en especial el volumen II de COURANT-HILBERT (citado en Cap. XVI, nota IV, 4), MORSE y FESHBACH (citado en Cap. XXIII, nota V, 3) y H. y B. S. JEFFREYS (citado en Cap. XXVII, nota IV, 7).

En conexión con las ecuaciones integrales y el método variacional, se ocupa de problemas de contorno de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales el libro de REY PASTOR sobre "*Los problemas lineales de la Física*" (citado en Cap. XXV, nota IV, 1).

Junto a ellos deben citarse los libros dedicados enteramente al estu-

dio de las ecuaciones diferenciales de la Física matemática, como SOMMERFELD (citado en Cap. XXVII, nota III, 7), y los siguientes:

De carácter enciclopédico, con ejercicios y abundantes referencias, es:

H. BATEMAN: *Partial differential equations of mathematical physics* (1ª ed., Cambridge Univ. Press, 1932; reeditado por Dover, N. York, 1944).

En los países de habla inglesa la obra preferida para este objeto es:

A. G. WEBSTER: *Partial differential equations of mathematical physics* (Stechert, Nueva York; 2ª ed., 1933; reimpr., Dover, Nueva York, 1955);

muy mejorada en su versión alemana por G. SZEGÖ, dando mayor precisión y rigor al tratamiento de sus temas:

A. G. WEBSTER y G. SZEGÖ: *Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik* (Teubner, Berlín, 1930).

En Alemania se ha reeditado varias veces la clásica obra de:

G. F. B. RIEMANN y H. WEBER: *Die partiellen Differentialgreichungen der mathematischen Physik* (7ª ed., Vol. I, 1925; Vol. II, 1927), reestructurada finalmente por PH. FRANK y R. VON MISES en la valiosa obra en dos nutridos volúmenes:

PH. FRANK y R. VON MISES: *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik* (2ª ed., Vol. I, *Mathematischer Teil,* 1930; Vol. II, *Physikalischer Teil,* 1935; Vieweg, Braunschweig).

Breve introducción al estudio de las ecuaciones diferenciales de la Física, con la parte matemática limitada a procedimientos formales, ejemplos a veces sólo esbozados para ilustrar métodos y sin ejercicios es:

L. HOPF: *Einführung in die Differentialgleichungen der Physik* (W. de Gruyter, Berlín, 1933); traducción inglesa de W. NEF: *Introduction to the differential equations of physics* (Dover, Nueva York, 1948).

6. Sobre el problema de CAUCHY se centra el libro preparado bajo contrato con el Office of Naval Research con el propósito de reunir teoremas de existencia *constructivos,* traducibles en un esquema para cálculo numérico, en forma de utilizarlos para la presentación de problemas de manera adecuada para su resolución con máquinas calculadoras automáticas (Cap. VII, nota II, *b*):

D. L. BERNSTEIN: *Existence theorems in partial differential equations* (Princeton Univ. Press, 1950).

Una notable contribución al estudio del problema de CAUCHY, tanto por la originalidad de la exposición como por el valor de los resultados nuevos que contiene, es la obra mimeografiada:

J. LERAY: *Hyperbolic differential equations* (Institute for Advanced Study, Princeton, 1953; reimpr. 1955).

Clásico en este tema es:

J. HADAMARD: *Lectures on* CAUCHY*'s problem in linear partial differential equations* (Yale Univ. Press, 1923; reproducción fotográfica: Dover, Nueva York, 1953);

con versión francesa modernizada y aumentada:

J. HADAMARD: *Le problème de* CAUCHY *et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques* (Hermann, París, 1932).

Obra de investigación original con presentación didáctica y unificada de las integrales planas y esféricas con aplicaciones, entre otras, a la resolución del problema de CAUCHY, es:

F. JOHN: *Plane waves and spherical means applied to partial equations* (Intersc. Publ., Nueva York y Londres, 1955).

7. Los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se estudian en las obras (citadas en Cap. XXVII, nota IV, 5) de MILNE y sobre todo de COLLATZ, y para problemas de contorno y valores propios en el libro de COLLATZ citado en Cap. XVII, nota V, 6.

Destaca los métodos numéricos e ilustra la teoría con numerosos

ejemplos tomados principalmente de la Dinámica de los gases y también de la Geometría diferencial y la Elasticidad, el libro excelente para ingenieros y físicos, cuya mayor parte se dedica a las ecuaciones de tipo hiperbólico:

R. SAUER: *Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen* (Springer, Berlín, 1952).

Los métodos variacionales y de diferencias finitas están estudiados en:

N. KRYLOFF: *Les méthodes de solution approchée des problèmes de la Physique mathématique* (Mém. Sc. Math., XLIX; Gauthier-Villars, París, 1931).

Formulario traducido del ruso para la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales, por el cálculo de diferencias, es:

D. J. PANOW: *Formensammlung zur numerischen Behandlung partieller Differentialgleichungen nach dem Differenzenverfahren* (Akademie Verlag, Berlín, 1955).

8. Varias cuestiones débilmente conectadas entre sí, algunas con motivación en problemas de la Física, están reunidas en:

E. PICARD: *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la Physique mathématique* (Cahiers Scient., I; Gauthier-Villars, París, 1927, reimpr. 1950).

Diversas contribuciones originales a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales están reunidas en el volumen de varios autores:

Contributions to the theory of partial differential equations (Annals of Math. St. nº 33; Princeton Univ. Press, 1954).

Cuestiones de la teoría superior de ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico se presentan en estilo flúido, con amplias referencias, en la obra siguiente, que contiene en gran parte el fruto de investigaciones de los autores en los últimos años:

S. BERGMAN y M. SCHIFFER: *Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics* (Academic Press, N. York, 1953).

Hace uso sistemático de la técnica de la función de GREEN en ecuaciones diferenciales de la Física, la obra de MORSE y FESHBACH (cit. en Cap. XXIII, nota V, 3). Después de dos capítulos sobre espacios lineales y teoría espectral de operadores, trata principalmente sobre funciones de GREEN de operadores diferenciales ordinarios y en derivadas parciales, en forma a veces heurística:

B. FRIEDMAN: *Principles and techniques of applied Mathematics* (Wiley, Nueva York, 1956).

9. La teoría de EULER y LEGENDRE del Cálculo de variaciones, perfeccionada por JACOBI y después por WEIERSTRASS, está expuesta en los libros clásicos:

O. BOLZA: *Vorlesungen über Variationsrechnung* (Teubner, Leipzig, 1909),

A. KNESER: *Lehrbuch der Variationsrechnung* (Vieweg, Braunschweig; 2ª ed., 1925).

Primero en adoptar métodos funcionales es:

J. HADAMARD: *Leçons sur le calcul de variations* (Hermann, París, 1910),

y persiste en ellos:

L. TONELLI: *Fondamenti di calcolo delle variazioni* (Zanichelli, Bolonia; 2 vols., 1921, 1923),

pero todavía no existe la obra que desarrolle esta disciplina dentro de la Topología.

Sigue la huella de EULER y WEIERSTRASS, orientada hacia la Física, la rigurosa y completa obra de:

C. CARATHÉODORY: *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung* (Teubner, Leipzig, 1935);

y por otra parte perfecciona la clásica variación unilateral de la función, tomando la variación libre o total, gracias al cálculo absoluto, la obra:

TH. DE DONDER: *Théorie invariantive du calcul de variations* (Gauthier-Villars, París, 1935).

La influencia de BOLZA como profesor en Chicago despertó la afición por el Cálculo de variaciones en Estados Unidos, fructificando en las obras:

G. A. BLISS: *Calculus of variations* (Univ. of Chicago Press, 1924); la excelente de orientación moderna, dividida en dos partes: seis capítulos sobre problemas más simples que preceden a tres sobre el llamado "*problema de* BOLZA" del que se da el primer tratamiento completo:

G. A. BLISS: *Lectures on the calculus of variations* (Univ. of Chicago Press, 1946);

y la publicación colectiva en cuatro volúmenes que incluyen contribuciones originales realizadas en el período 1930-1941:

Contributions to the calculus of variations (Univ. of Chicago Press).

Para un primer estudio contienen adecuados capítulos sobre Cálculo de variaciones los tratados franceses de VALLÉE POUSSIN, VALIRON y GOURSAT (citados en Capítulo VI, nota VI). En particular, es muy recomendable la exposición de GOURSAT.

Da una adecuada introducción escrita en nivel elemental pero con precisión el libro de orientación moderna que contiene algunos ejemplos ilustrativos y no trae ejercicios:

G. GRÜSS: *Variationsrechnung* (Quelle y Meyer; 2ª edic., preparada por W. MEYER-KÖNIG, Heidelberg, 1955).

Un estudio limitado a la primera variación y por tanto muy insuficiente desde el punto de vista matemático, da el libro con numerosos ejercicios y lleno de ejemplos de la Física, que en gran medida sirven de motivación al texto y lo hacen útil para dar un panorama de las aplicaciones:

R. WEINSTOCK: *Calculus of variations, with applications to physics and engineering* (McGraw-Hill, Nueva York, 1952).

Principalmente dedicado al Cálculo de variaciones, con enfoque muy general y orientación moderna está el libro reciente, sin fecha de edición:

M. PICONE: *Lezioni di analisi funzionale* (Tumminelli, Roma).

Agrupa diversos resultados en gran parte de los autores, retomando para perfeccionar y desarrollar, cuestiones sobre extremos geométricos a veces antiguas, y problemas físicos:

G. PÓLYA y G. SZEGÖ: *Isoperimetric inequalities in mathematical physics* (Princeton Univ. Press, 1951).

Tratan también problemas extremales:

T. RADÓ: *On the problem of* PLATEAU (Springer, Berlín, 1933; repr. fotográfica, Chelsea, Nueva York, 1951),

y el libro de orientación moderna, escrito en el estilo ágil y sugestivo del autor:

R. COURANT: DIRICHLET'*s principle, conformal mapping and minimal surfaces* (Interscience Publ., Nueva York, 1950).

Sobre cuestiones variacionales en la Mecánica trata:

C. LANCZOS: *The variational principles of mechanics* (Univ. of Toronto Press, 1949).

La escuela de Cálculo de variaciones "en grande" tiene su biblia en:

M. MORSE: *The calculus of variations in the large* (Amer. Math. Soc., Nueva York, 1934; reimpr. 1948),

y esta teoría está además magistralmente expuesta en:

H. SEIFERT y W. THRELFALL: *Variationschnung in Grossen* (Teubner, Leipzig, 1938; reimpreso por Chelsea, Nueva York, 1948).

Resumen de los estudios topológicos que llevaron a esta teoría, es:

L. LUSTERNIK y L. SCHNIRELMANN: *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels* (Act. Sci. et Ind. nº 188, Hermann, Paris, 1934).

Capítulo XXIX

FUNCIONES ANALÍTICAS

§ 114. Conceptos fundamentales

1. **Concepto de función analítica.** — *a*) El algoritmo de las series de potencias (§ 43) nos ha conducido de un modo no sólo natural, sino obligado, a la ampliación del campo de variabilidad al plano complejo, mediante el desarrollo indefinido de Mac-Laurin o de Taylor (§ 44-1), pues siendo éste convergente en un círculo o en todo el plano, define en él una función compleja de variable compleja, quedando así prolongadas (§ 45) las funciones e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\ln(1+z)$, $\operatorname{arc\,tg} z$, las tres primeras para todo valor complejo de z y las dos últimas en el círculo $|z| < 1$. Quedan así generalizadas las funciones elementales por combinaciones aritméticas de éstas, pero al mismo tiempo se obtiene una familia amplísima de funciones definidas por series de coeficientes complejos a_n cualesquiera, con la sola restricción $\sqrt[n]{|a_n|} < K$, siendo K una cota positiva (§ 43-1, b_2).

Def. Las funciones f(z) expresables en todo un círculo de radio positivo finito o infinito por una serie entera $\Sigma a_n(z-a)^n$ se llaman *analíticas*. — en el punto a.

Es, pues, analítica $\ln z$, aunque no es desarrollable en serie de potencias de z, pero es en cambio $\ln z = \ln[1-(1-z)]$ desarrollable en la serie $-\Sigma(1-z)^n/n$, que converge en el círculo $|1-z| < 1$. Es claro que el punto $z = 0$ no puede pertenecer al círculo de convergencia, pues entonces tendría el logaritmo un valor finito.

El concepto de función analítica es mucho más amplio que el de función elemental (§§ 23 y 45), por ejemplo son funciones analíticas las definidas en Capítulo XXVII, nota I.

b) *Prolongación analítica.* — La definición anterior hace depender el concepto de función analítica del punto a elegido; veamos que no es así demostrando el teorema fundamental:

Si f(z) *es analítica en un punto, lo es en todo punto interior a su círculo de convergencia.*

Adoptando el primero como origen, sea:

[114-1] $$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \quad ;$$

si a es un punto interior al círculo de convergencia, es decir, $|a| < R$, y elegimos h tal que sea $|a| + |h| < R$, hemos visto en § 43-5, *b*, la convergencia absoluta de la serie:

$$f(a+h) = a_0 + a_1(a+h) + a_2(a+h)^2 + \ldots =$$
$$= a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + a_3 a^3 + \ldots + h[a_1 + 2a_2 a + 3a_3 a^2 + \ldots] +$$
$$+ h^2(a_2 + 3a_3 a + \ldots) + \ldots = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(a) + \ldots;$$

donde el reagrupamiento de términos en el segundo miembro se justifica por el teorema fundamental de las series dobles absolutamente convergentes (§ 81-4).

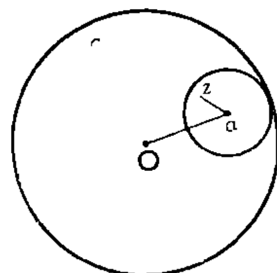


Fig. 410.

Sea z un punto interior al círculo de centro a contenido en el círculo de centro O y radio R, es decir, $|z - a| < R - |a|$ y llamando $h = z - a$ (fig. 410), como

$$|a+h| \leqslant |a| + |z-a| < R \quad ,$$

es aplicable la conclusión anterior que da el desarrollo tayloriano

[114-2] $$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots$$

válido al menos en todo círculo de centro a, $|z-a| < R - |a|$, contenido en el círculo de convergencia de [114-1].

Ejemplo. Si partiendo del desarrollo

[114-3] $$(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \ldots, \quad (|z| < 1)$$

se calculan las derivadas de $(1-z)^{-1}$ (o bien derivando la serie), resulta

$$f^{(n)}(z) = n!(1-z)^{-n-1} \quad ,$$

luego para todo a inferior a 1 en módulo es:

[114-4] $$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a} + \frac{z-a}{(1-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(1-a)^3} + \ldots,$$

resultado evidente (por la regla de sumación de la serie geométrica, § 22-1, *b*) que nos muestra, sin embargo, un hecho importante, que es la ampliación del campo de validez del desarrollo [114-3]; en efecto, el campo de [114-4] es el círculo $|z-a| < |1-a|$ interior al primero si a es real positivo; pero si a es negativo o imaginario, este círculo tiene

parte exterior al primero. Así en la figura 411, elegido a negativo ($a = -\frac{1}{2}$) queda ampliado el campo y permite calcular los valores en los puntos de la lúnula rayada, donde [114-3] diverge; hágase, por ejemplo, $z = -2$.

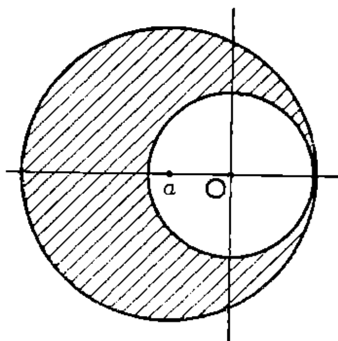


Fig. 411.

La extensión del campo de variabilidad de una función definida por un desarrollo en serie de potencias por cambio de origen elegido dentro de aquél, se llama *prolongación analítica,* y en § 115-12 se independizará su concepto del método de los series de potencias al relacionarlo con el de analiticidad.

La serie aparece así como *elemento* generador de la función, la cual puede ser multiforme, dependiendo su valor en cada punto del camino seguido para la prolongación. Así, por ejemplo, la función $\ln z$ está definida (§ 45-4, a) por la serie logarítmica $\Sigma(-1)^{n-1}(z-1)^n/n$ en el círculo de centro 1 y de radio 1, serie que da la determinación principal $\mathrm{Ln}\, z$ (§ 45-3, c) ; pero mediante todas las prolongaciones posibles se obtiene la función multiforme en toda su extensión (cfr. § 116-1).

NOTA. Hay series no prolongables fuera de su círculo de convergencia, cuya circunferencia de contorno se llama entonces *frontera natural* (§ 115-12). Tales son, por ejemplo, las que, escritas sin sus términos nulos, tienen como exponente n-simo un infinito de orden superior a n (cfr. § 115-12).

Ejemplos. (Ver § 118, ejercicio 4):

$$1 + z + z^4 + z^9 + \ldots z^{n^2} + \ldots; \quad z + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + \ldots$$

(KRONECKER) (WEIERSTRASS)

c) *Métodos de* WEIERSTRASS *y de* CAUCHY. — Esta definición de función analítica, como conjunto de valores obtenidos mediante todas las prolongaciones de una serie entera, fué la adoptada por WEIERSTRASS para edificar aritméticamente la teoría que CAUCHY había elaborado con método geométrico, la cual vamos a exponer sucintamente en este capítulo, no sin agregar alguna noción sobre la idea del plano múltiple de RIEMANN, que permite uniformar las funciones multiformes (§ 116), viendo finalmente la equivalencia entre el método aritmético de WEIERSTRASS y el geométrico de CAUCHY-RIEMANN.

Tanto CAUCHY como RIEMANN parten de la expresión general $w = u(x, y) + iv(x, y)$ de una variable compleja w, función de otra $z = x + iy$ en el sentido amplísimo de DIRICHLET (§ 23-5), para estudiar exclusivamente las que son *monógenas en un recinto,* o sea, en todos los puntos del mismo, es decir (§ 41-1, b), en cada punto admiten derivada finita.

Gran descubrimiento, debido a CAUCHY, fué la demostración de la equivalencia entre ambos conceptos de monogeneidad en todos los puntos de un recinto y analiticidad *; mientras en el campo real no basta la existencia de derivada, ni aun de infinitas derivadas en un intervalo para que sea desarrollable en serie entera (§ 44-2, nota 1), basta, en cambio, su monogeneidad en cada uno de los puntos interiores a un círculo para que sea desarrollable en serie de potencias **.

2. **La monogeneidad en un punto.** — *a*) *Ecuaciones características.* — La monogeneidad o existencia de derivada $w' = a + ib$ en el punto $z = x + iy$ equivale (§§ 30-2 y 41-1, *b*), a la condición de que el incremento Δw en ese punto tenga la expresión:

[114-5] $$\Delta u + i\Delta v = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + o(r) \quad ,$$

o sea:

[114-6] $$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(r), \quad \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(r),$$

y recíprocamente, de estas expresiones resulta [114-5]. Recordando el significado de estos coeficientes de la expresión diferencial (§ 66-4):

$$a = u_x = v_y \quad , \quad b = - u_y = v_x \quad ,$$

resulta el siguiente criterio importante (D'ALEMBERT, 1752):

a_1) *Condiciones necesarias y suficientes para la monogeneidad en un punto son: que las funciones u, v sean diferenciables en ese punto y en él se verifiquen las igualdades siguientes:*

[114-7] $$u_x = v_y \quad , \quad v_x = - u_y .$$

a_2) *La derivada de la función monógena en un punto se puede expresar así:* $w' = f'(z) = u_x + iv_x$.

Las ecuaciones de condición [114-7] indican solamente que son iguales las derivadas según las direcciones de los ejes x é y; sin embargo, se llaman *ecuaciones características* porque si éstas se verifican y *además* son *diferenciables* u y v (ver ejemplos 3 y 4), existe la derivada $f'(z)$ en el punto considerado, la cual se calcula derivando respecto de x, es decir, tomando real el incremento Δz, o sea, haciendo tender el punto variable hacia el punto fijo paralelamente al eje x.

NOTA. Algunos autores llaman injustificadamente a las [114-7] ecuaciones de CAUCHY-RIEMANN y otros de EULER.

EJEMPLOS: 1. La función $w = e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ satisface evidentemente a las ecuaciones características, y como u y v son diferenciables (por tener derivadas continuas) es monógena en todo punto y la

* En realidad CAUCHY imponía además la continuidad de la derivada, pero GOURSAT probó que esta restricción es innecesaria (nota III).

** En cambio (BOREL) la monogeneidad en puntos de un conjunto que no formen recinto puede darse para funciones no analíticas (nota IV).

derivada se obtiene derivando respecto de x, resultando la misma función e^z. Lo mismo que en el campo real, esta función satisface a la ecuación diferencial $w' = w$.

2. $w = x^2 + iy^2$ satisface a las ecuaciones características: $2x = 2y$, $0 = 0$, solamente en los puntos de la recta $y = x$, y sólo en ellos es monógena. En cada punto de dicha recta es, por tanto, *conforme directa* (§ 41-1, *c*) la correspondencia entre los planos z y w.

3. La función $w = \sqrt{|xy|}\,(1 + i)$ tiene nulas las cuatro derivadas en el origen y satisface, por ende, a las ecuaciones características; sin embargo, no es monógena en ese punto, pues en cada dirección tiene derivada distinta. Así, por ejemplo, la derivada es 1 en la dirección $y = x$, y también en la $y = -x$. Esto es debido a no ser diferenciables u ni v (ver § 66, ejercicio 10, 1º).

Compruébese que tampoco es monógena en ningún punto del eje x ni del eje y, pero sí en los restantes puntos del plano.

4. La función

$$\mathrm{w}(z) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} + i\frac{x^3 y^2}{x^4 + y^2} \quad , \quad \mathrm{w}(0) = 0 \quad ,$$

tiene derivada nula en el origen, no solamente en las direcciones de los ejes (pues satisface a las ecuaciones características), sino *también en toda dirección*. Sin embargo *no es monógena* en el origen. Basta fijarse, por ejemplo, en los caminos parabólicos $y = kx^2$.

b) *Puntos en que existe derivada no nula.* — Veamos algunas consecuencias de la monogeneidad en un punto. Ya hemos visto en § 41-1, *c*, que si la derivada no es nula, la correspondencia entre el plano z y el w no solamente es *isogonal* en el punto z_0 *sino conforme directa*, es decir, se conservan los ángulos, siendo iguales y acordes los dos haces de tangentes homólogas, y además son proporcionales los radios vectores infinitésimos; más precisamente: el número $|w'_0| \neq 0$ es el coeficiente de dilatación lineal y Arg w_0' es el ángulo de rotación del haz de tangentes.

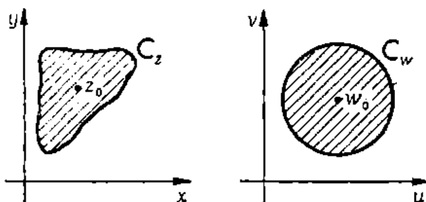


Fig. 412.

Suponiendo continuas las derivadas u_x, u_y, v_x, v_y, en el punto z_0 en el cual es $w'_0 \neq 0$, resulta aplicable el teorema de las funciones implícitas (§ 67-7) a las ecuaciones $\mathrm{u}(x, y) = u$, $\mathrm{v}(x, y) = v$, que se satisfacen por el par x_0, y_0; en efecto; su jacobiano es:

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2 = |w'_0|^2 > 0 \quad ,$$

y siendo continuas las derivadas, este determinante se conserva positivo en un entorno de z_0, por lo que es efectivamente apli-

cable lo dicho en § 67-7; la correspondencia es biunívoca, es decir, a cada punto w de un cierto entorno de w_0 corresponde un punto z; o sea, existe la función inversa $z = \varphi(w)$ en un entorno de w_0.

Es, por tanto, válida la regla (§ 32-8) para la derivada de esta función inversa, que es el número $1/w'_0$, resultando, por tanto, que la función inversa es uniforme y monógena. Existe, pues, un entorno de w_0 cuyos puntos tienen homólogo z, o sea, el punto w_0 es *interior* al conjunto transformado del dominio D en que suponemos definida la función. Esto lleva consigo que el máximo de $|\mathrm{f}(z)|$ en D no puede alcanzarlo en z_0, puesto que en la circunferencia C_w hay puntos con mayor módulo que w_0 (cfr. § 114-6).

3. **Funciones regulares y funciones armónicas.** — Deducidas las más importantes propiedades de carácter *local*, que lleva consigo la monogeneidad de $\mathrm{f}(z)$ en un punto, veamos ahora las propiedades de carácter *integral* que resultan de suponer la monogeneidad en cada punto de un recinto.

DEF. La función $\mathrm{f}(z)$ se dice *regular* en el punto z_0, y este punto se llama *regular* de la función, si ésta es monógena no solamente en él, sino en todo un entorno del mismo.

Un arco c se dice *regular respecto de* $\mathrm{f}(z)$, y de ésta se dice que es *regular* en el arco c, si es monógena, no solamente en todos sus puntos, sino en todos los de un entorno del mismo, es decir, en un recinto al cual es interior c.

El concepto de regularidad se refiere, pues, a todo un entorno, y mientras la monogeneidad de $\mathrm{f}(z)$ en un dominio D exige solamente la monogeneidad en cada punto de D, incluso en los de frontera, en cambio la *regularidad* en D, esto es, en todos sus puntos, exige la monogeneidad en un recinto más amplio al cual es interior D. Para los recintos abiertos, es decir, formados por puntos interiores, ambos conceptos de monogeneidad y regularidad coinciden.

EJEMPLOS: 1. Las funciones citadas en los ejemplos 2 y 3 de § 114-2 que son monógenas en un solo punto o en una recta, no son regulares en ningún punto.

2. La función $\ln z$ es regular en el recinto $z \neq 0$ y en los dominios $|z| \geqslant r > 0$.

Si u y v tienen derivadas segundas continuas, derivando las ecuaciones características [114-7] respecto de x, y, resulta que en todo punto regular se verifica *:

* Bastaría la continuidad de una derivada segunda de cada componente u ó v para la aplicación del teorema de SCHWARZ (§ 69-2, teor. 3) o la diferenciabilidad de sus cuatro derivadas primeras, según el de HEFFTER-YOUNG (§ 69-2, teor. 4). Basta aún que exista el 2º miembro de [69-4] para que existan y sean iguales las derivadas segundas [69-6] (F. LLORENTE GONZÁLEZ-GALLARZA, Euclides, *15*, pp. 259-264, 1955).

[114-8] $$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Las funciones $u(x, y)$, $v(x, y)$ que satisfacen a esta ecuación de D'ALEMBERT (§ 91-6, nota) se llaman *armónicas*, y resulta este teorema importante:

Las componentes de una función regular, con derivadas segundas continuas, son armónicas (D'ALEMBERT, 1761).

Recíprocamente, según § 89-1: *Dada cualquier función armónica u, existe la función v, llamada conjugada de u, que forma con ella la función regular $u+iv$, y está determinada salvo un sumando constante.* Esta función v conjugada de u (o bien la u conjugada de $-v$) se determina, como allí se vió, por dos cuadraturas, o se expresa mediante la integral curvilínea $v = \int u_x\, dy - u_y\, dx + C$.

La teoría de las funciones armónicas, de gran interés en Física, es, por tanto, inseparable de las funciones monógenas. El caso de tres variables exige, en cambio, estudio independiente, que fué hecho por LAPLACE (ver § 91-6, nota).

NOTAS: 1. Si $w = u + iv$ es regular, como la función armónica conjugada de la $v(x, y)$ es la $-u(x, y)$, entonces $v - iu$ es también regular; en cambio $v + iu$ no podrá serlo si no se reduce a una constante.

2. La solución general de [114-8] será $u = \varphi(x + iy) + \Psi(x - iy)$ que tiene por conjugada $v = [\varphi(x + iy) - \Psi(x - iy)]/i$, con φ y Ψ funciones doblemente diferenciables (cfr. § 112-1, ej. 5). Resulta entonces, $f(z) = 2\varphi(z)$, con valor imaginario conjugado (§ 9-4, *d*): $\overline{f(z)} = 2\Psi(\bar{z})$.

3. Si la función $u = u(x, y)$ es armónica y si $z = x + iy$ es función regular de $\zeta = \xi + i\eta$, entonces u es función armónica de ζ y η. Por ser $u(x, y) = \ln e^u = \ln |e^w|$ (§ 45-3, *c*), vemos que toda función armónica puede considerarse como el logaritmo del módulo de una función regular nunca nula.

4. Para hacer visible la correspondencia $w = f(z)$ ó $u + iv = f(x + iy)$ suelen representarse en el plano (x, y) los haces de curvas:

[114-9] $$u(x, y) = c \quad ; \quad v(x, y) = d.$$

También suele representarse en el plano (u,v) el reticulado de las líneas correspondientes a las rectas $x = c$, $y = d$, dadas en forma paramétrica por

[114-10] $$\begin{cases} u = u(c, y) \\ v = v(c, y) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} u = u(x, d) \\ v = v(x, d). \end{cases}$$

EJEMPLO 3. Para $w = z^2 = (x + iy)^2$ se tiene

$$u = x^2 - y^2 \quad , \quad v = 2xy \quad ,$$

de modo que el reticulado [114-9] está formado por dos haces (ortogonales) de hipérbolas equiláteras.

Por otra parte, al haz $x = c$ corresponde el haz $u = c^2 - y^2$, $v = 2cy$, formado por parábolas, como se ve eliminando el parámetro y:

[114-11] $$v^2 = 4c^2(c^2 - u).$$

Análogamente, al haz $y = c$ corresponde el haz de parábolas

[114-12] $$v^2 = 4c^2(c^2 + u).$$

El parámetro de las parábolas [114-11] y [114-12] es $p = \pm 2c^2$, y como la abscisa del vértice es precisamente $\pm c^2$, resulta que todas tienen el origen 0 como foco, es decir, son homofocales.

Nota 5. Si $w = \mathrm{f}(z)$ es regular en una región D, los haces [114-9] son mutuamente ortogonales en D, pues de [114-7] resulta

[114-13] $$u_x v_x + u_y v_y = 0 .$$

Por tanto: Si una función armónica v es conjugada de otra u (y entonces u conjugada de $-v$), en los campos vectoriales grad u, grad v, las líneas equipotenciales (§ 91-4, nota 5) de cada uno son líneas de campo (§ 91-2) del otro.

4. Función homográfica. — *a*) Una correspondencia conforme conserva las *circunferencias infinitésimas*. Ahora estudiaremos funciones cuyas transformaciones conservan las circunferencias *finitas*. Anulando una forma bilineal en z, w:

$$\alpha z w + \beta z + \gamma w + \delta = 0 \quad ,$$

se define en forma implícita la *función homográfica* $w = \mathrm{w}(z)$, cuya forma explícita es (poniendo $-\beta = a$, $-\delta = b$, $\alpha = c$, $\gamma = d$):

[114-14] $$w = \frac{az+b}{cz+d} .$$

El *determinante* o *módulo* de la transformación [114-14], $\Delta = ad - bc$, debe ser no nulo, pues si $\Delta = 0$, o bien $w =$ constante (por ser proporcionales las filas del determinante Δ), o bien el segundo miembro de [114-14] carece de sentido (si $c = d = 0$).

Es inmediato verificar que toda transformación homográfica conserva las razones dobles (§ 9, ejercicio 3), es decir, si $w_i = \mathrm{f}(z_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ es $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. Entonces la transformación queda determinada por tres pares de puntos correspondientes, por:

$$(w_1, w_2, w_3, w) = (z_1, z_2, z_3, z)$$

Se obtiene por división

$$w = \frac{a}{c} - \frac{\Delta/c^2}{z+(d/c)} \quad ,$$

de modo que la transformación [114-14] se descompone en las transformaciones sucesivas

$$z + \frac{d}{c} = t \quad , \quad \frac{1}{t} = u \quad , \quad -\frac{\Delta}{c^2} u = v \quad , \quad \frac{a}{c} + v = w \quad ,$$

cuyo significado estudiaremos suponiendo superpuestos los planos complejos z, t, u, v, w.

a_1) La primera y la última representan *traslaciones*;

a_2) La segunda representa una *inversión* o transformación por radios vectores recíprocos con respecto a la circunferencia

unidad, seguida de una *simetría* con respecto al eje real, pues si $t = \tau e^{i\theta}$, es $u = 1/t = (1/\tau)\, e^{-i\theta}$;

a_3) La tercera representa, si $-\Delta/c^2 = \varrho e^{i\varphi}$, $(\varrho > 0)$, una *rotación* en un ángulo φ alrededor del origen, seguida de una *homotecia* de razón ϱ con respecto al origen.

b) Entonces la transformación homográfica [114-14] se descompone en la realización sucesiva de *movimientos, homotecia, inversión y simetría.* Como estas transformaciones *conservan la familia de todas las circunferencias del plano* (*incluyendo las rectas como circunferencias de radio infinito*), lo mismo ocurre con la transformación [114-14].

En efecto, para a_1 y a_3 es inmediato y para la inversión a_2 la transformada de la circunferencia $|t - t_0| = r$ es $|(u - u_0)/u| = r\,|u_0|$, que también representa una circunferencia (§ 9, ejercicio 8, 2º). Por otra parte, como una homografía [114-14] queda caracterizada por la conservación de la razón doble: $(z_1, z_2, z_3, z) = (w_1, w_2, w_3, w)$, si uno de estos dos miembros es real, también lo será el otro, y ésta es condición para que los cuatro puntos están en una misma circunferencia (§ 9, ejercicio 3).

Ejemplo. Para transformar en el círculo de radio 1 el semiplano $x < 1$, basta fijar sobre los contornos tres pares de puntos correspondientes, resolviendo las tres ecuaciones a que deben satisfacer los coeficientes a, b, c, d, las cuales determinan éstos, o mejor dicho las razones de tres de ellos al cuarto.

Este problema no tiene tanto interés como el siguiente: *transformar el semiplano en círculo de modo que se correspondan dos puntos interiores y dos puntos de contorno.* Sean los orígenes $z = 0$, $w = 0$ los puntos interiores homólogos, y los puntos de contornos los $z = 1$, $w = 1$. Al eje x, recta que pasa por 0 y es perpendicular al contorno del semiplano, debe corresponder la recta o circunferencia que pasa por 0 y sea perpendicular al contorno del círculo, es decir, debe ser precisamente el eje real u; al punto del infinito (cfr. § 114-5) del plano z debe corresponder, por tanto, el punto $w = -1$. Tenemos, pues, tres pares de puntos homólogos:

$$\begin{array}{lll} z = 0 \ , & z = 1 \ , & z = \infty \\ w = 0 \ , & w = 1 \ , & w = -1 \end{array}$$

La primera condición exige que sea $b = 0$; la tercera exige $a = -c$, pudiendo tomarse $a = 1$, $c = -1$; la segunda determina $d = 2$; por consiguiente, la función que transforma el semiplano en el círculo de radio 1 es:

$$w = z/(2 - z).$$

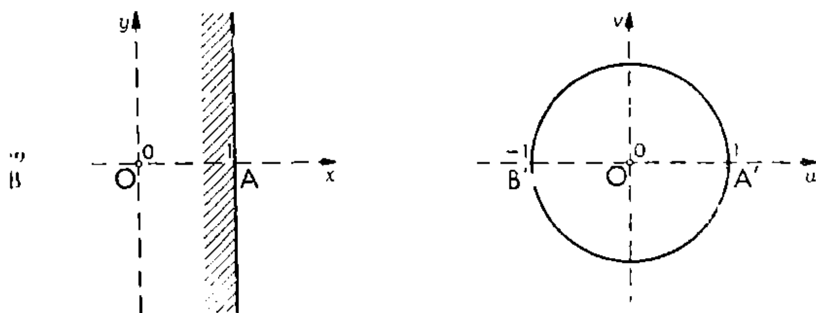


Fig. 413.

5. Plano complejo y esfera de Riemann. — Hemos visto que la inversión $w = 1/z$ transforma el entorno reducido $0 < |z| < \varepsilon$ en $|w| > 1/\varepsilon$, parte exterior a un círculo del plano complejo de radio arbitrario, que llamaremos entorno del *punto del infinito*. También hemos visto en el estudio de la función homográfica (§ 114-4) que las rectas son mero caso particular de circunferencias "que pasan por el punto del infinito $z = \infty$" y al tratar de límites en el campo complejo (§ 22) y de la continuidad de las raíces de una ecuación algebraica (§§ 18-2 y 41-2, *d*) ya hemos tratado el infinito como un "punto". Más, aún, esta concepción del infinito en el plano complejo se justifica por la generalización de las propiedades fundamentales de las funciones analíticas que veremos en §§ 117-4 y 118-4.

También será cómodo considerar que f(z) es continua en el punto $z = \infty$ cuando tiene límite al crecer infinitamente $|z|$, cualquiera que sea su argumento, de igual modo que se define el límite para $z = 0$ al tender $|z| \to 0$ en cualquier dirección. Este convenio de considerar todas esas direcciones como concurrentes en un punto único parece contradecir los convenios usuales en Geometría métrica; y es más necesaria todavía alguna explicación para los lectores acostumbrados al convenio usual en Geometría proyectiva, de considerar todas esas direcciones como formando una recta.

Para considerar el infinito como un punto $z = \infty$ (llamado también *impropio*) se concibe el plano complejo como *plano-esfera* (RIEMANN-NEUMANN) (fig. 414) mediante una proyección *estereográfica* sobre una esfera de diámetro unidad, tangente al plano en el punto cero, polo sur O de la esfera. Si desde el polo norte N proyectamos los puntos del plano sobre la esfera, al punto O corresponde el mismo punto, al punto P(x, y) del plano corresponde sobre la esfera el P$'(\xi, \eta, \zeta)$ alineado con N$(0, 0, 1)$, cumpliéndose NP . NP$' = 1$. Ello define una *inversión* de centro N y potencia 1 que transforma el plano en la esfera, estableciendo una correspondencia *biunívoca* (§ 2-8), *homocíclica* (conserva las circunferencias) e *isogonal* (conserva los ángulos). A las circunferencias de la esfera que pasan por el polo N corresponden en el plano rectas, es decir, circunferencias de diámetro infinito.

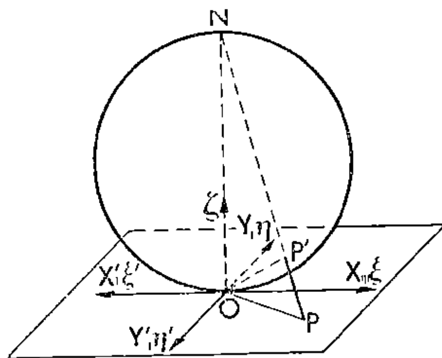


Fig. 414.

Analíticamente, por semejanza de triángulos, es inmediato formular

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta},$$

en que se cumple, $\xi^2 + \eta^2 + \zeta(\zeta - 1) = 0$, por estar $P'(\xi, \eta, \zeta)$ sobre la esfera. De ahí se deduce la correspondencia inversa

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \zeta = 1 - \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

NOTAS: 1 En la proyección central aparece una recta excepcional (línea de fuga) que no corresponde a ninguna línea proyectada; y dos rectas sin punto común, dan proyecciones con un punto común situado en dicha línea de fuga; de ahí la introducción de los conceptos de recta del infinito y punto del infinito, usados en Geometría proyectiva para alcanzar la máxima generalidad.

En cambio, en la proyección estereográfica, dos rectas cualesquiera, con un solo punto de intersección, dan proyecciones con dos puntos comunes (uno el polo N). Al proyectar un punto que se aleja indefinidamente en cualquier dirección, la proyección tiende hacia el punto N. Para suprimir estas excepciones, diremos que N es la proyección del *punto del infinito del plano.*

2. Lo que hemos llamado entorno del infinito viene representado por el casquete esférico de centro N y este punto N se tomará como representación en la esfera del infinito del plano. La idea de proximidad ligada al concepto de entorno se aplica en forma métrica al punto infinito definiendo con OSTROWSKI la *distancia esférica* entre dos puntos P_1 y P_2 por la de sus imágenes P'_1 y P'_2 en la esfera, contada ya sobre el menor arco de circunfrencia máxima que los une, ya sobre la cuerda de dicho arco. En este último caso, dicha distancia esférica d entre los puntos z_1 y z_2 viene dada por

$$d = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(|z_1|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)}},$$

que para $z_2 = \infty$ se convierte en el número $1/\sqrt{|z_1|^2 + 1}$.

Dos puntos "infinitamente próximos" en el plano lo son en la esfera, con la ventaja de que los conceptos, como el de continuidad (§ 41-1, a_2) que dependen del de proximidad, podrán ser aplicados al punto impropio y así podremos hablar en él de una *continuidad esférica.*

Claro es que una variable puede crecer indefinidamente con argumentos diversos, lo mismo que un punto puede tender al origen en diversas direcciones; pero así como introdujimos el valor único 0 para designar éste, introduciremos el símbolo único ∞ para representar aquél, y diremos que una función $f(z)$ es *regular en el punto del infinito* cuando sea regular en 0 la función $f(1/\zeta)$ que resulta de efectuar la sustitución $z = 1/\zeta$, que transforma éste en aquél y viceversa, como veremos con mayor precisión en § 117.

6. **Teorema del módulo máximo y consecuencias.** — Si $f(z)$ es regular en el dominio D, su módulo $\sqrt{u^2 + v^2}$ es función continua de u, v, y también, por tanto, de x, y; luego, por el teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS existe un punto al menos z_0 donde alcanza $|f(z)|$ su máximo. Tal punto z_0 no puede ser interior a D, como hemos visto en § 114-2, b, cuando la deri-

vada no es nula. Más general: si f(z) es monógena en un entorno de z_0, donde es continua, basta observar que el estudio hecho en § 83-4 vale en este caso adoptando dicho punto como vértice del reticulado triangular y los elementos transformados, todos de sentido positivo por ser en ellos el jacobiano $J > 0$, forman un recinto que contiene al punto w_0 *. El caso en que haya infinitos puntos donde sea $J = 0$, es decir, infinitos ceros de f$'(z)$, es imposible, como veremos (§ 115-11).

He aquí, pues, una propiedad fundamental de las funciones regulares: a cada punto interior corresponde un punto interior. Consecuencia: Si la función f(z), no constante, es monógena en el entorno de z_0 y continua en z_0, en cada entorno de z_0 existen puntos donde es $|f(z)| > |f(z_0)|$; y si es $f(z_0) \neq 0$, existen también puntos en que es $|f(z)| < |f(z_0)|$.

Por tanto: *en ningún punto interior puede alcanzar* $|f(z)|$ *el extremo superior de sus valores en el recinto; tampoco el extremo inferior, salvo cuando éste es cero.*

Como corolario resulta el *teorema fundamental del Algebra* (§ 18-1): ***Toda ecuación algebraica*** $f(z) = 0$ ***tiene al menos una raíz.*** Sea m el extremo inferior de $|f(z)|$ en todo el plano; como $|f(z)| \to \infty$ para $z \to \infty$, tomando un círculo de radio suficiente R para que sea $|f(z)| > > m + 1$ en todo z de módulo $|z| \geqslant R$, ese mínimo m debe alcanzarlo $|f(z)|$ en agún punto z_0 *dentro* del círculo y esto exige que $|f(z_0)| = 0$, o sea $f(z_0) = 0$.

7. **El lema de Schwarz y sus aplicaciones.** — Si $f(z)$ ***es regular en el círculo*** $|z| \leqslant 1$ ***siendo en él*** $|f(z)| \leqslant 1$ ***y además*** $f(0) = 0$, ***se verifica en todo punto interior*** $|f(z)| \leqslant |z|$, ***valiendo el signo*** $=$, ***sólo en el caso en que*** $f(z)$ ***representa una rotación, es decir:*** $f(z) = ze^{\theta i}$ (SCHWARZ, 1896).

Puesto que f(z) es monógena en el origen existe

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = a.$$

La función $f(z)/z = \varphi(z)$ es monógena en los puntos $z \neq 0$ [su derivada se puede calcular por la regla del cociente (§ 41-1, *b*)], y en el punto $z = 0$ es continua, con el verdadero valor $\varphi(0) = a$. Es, por tanto, aplicable el teorema del máximo módulo, que será alcanzado en la circunferencia; y como en ella es $|\varphi(z)| \leqslant 1$, debe verificarse en todo punto interior $|\varphi(z)| < 1$, o sea $|f(z)| < |z|$ **.

El único caso en que puede ser $|f(z)| = |z|$ es cuando sea $\varphi(z) = $ constante, de módulo 1, es decir, cuando sea $f(z) = z \cdot \lambda$, donde $|\lambda| = 1$ (rotación).

Basta, pues, que un solo punto de la circunferencia $|z| = 1$ tenga su homólogo con menor módulo, para que todos los del círculo $|z| < 1$

---

* Postulamos estas nociones intuitivas como era costumbre en los tratados clásicos. Modernamente se ha comenzado a anteponer la teoría rigurosa de los difíciles problemas topológicos que tales intuiciones encierran.

Aunque el teorema del módulo máximo resultará como corolario sencillo de la teoría de la integral, responde a una orientación moderna el destacarlo como un hecho netamente topológico primario, independiente de toda teoría de integración.

** El lema subsiste si $f(z)$ está definida solamente en el interior $|z| < 1$, pues el extremo superior $M \leqslant 1$ no puede alcanzarlo en un punto interior, como ya vimos, y por tanto: $|f(z)| < |z|$.

tengan igual propiedad. Este lema, de frecuente uso en Análisis, revela la solidaridad entre todos los valores de la función monógena, al contrario de lo que sucede en el campo real. Puede darse aspecto más general al lema: *Si* $f(z)$ *es regular en el círculo* $|z| \leqslant R$, *nula en el origen y menor que* K *en todos sus puntos, es en cada punto interior* $|f(z)| < (K/R)|z|$.

Basta, en efecto, dividir z por R y w por K, es decir, introducir una función g definida por $f(z)/K = g(z/R)$, para reducirlo al anterior aplicado a g.

a) He aquí una consecuencia importante, llamada comúnmente teorema de LIOUVILLE:

Si $f(z)$ *es regular en todo el plano y acotada en él, es constante* (CAUCHY, 1844). Pues si es $|f(z)| < K$ y $f(0) = 0$, en virtud de la desigualdad anterior, en cada punto z se verifica: $|f(z)| < (K/R)|z|$, y como R se puede tomar arbitrariamente grande es $f(z) = 0$ para todo z. Si $f(0)$ no es nulo, resulta $f(z) - f(0) = 0$, o sea: $f(z) = f(0)$.

b) *Si* $f(z)$ *es regular en todo el plano y continua en el punto* $z = \infty$ *(es decir, si para* $z \to \infty$ *tiene límite finito* L), *es constante en todo el plano*. Pues en un entorno del punto ∞ (§ 114-5) se conserva $|f(z)| < L + 1$ y, por la continuidad, está acotada en el círculo, luego es aplicable el teorema de LIOUVILLE.

No cabe, pues, la regularidad en todo el plano si no hay singularidad en el infinito; es decir: *toda función monógena tiene alguna singularidad propia o impropia*, y son precisamente estos puntos excepcionales, como veremos, los que caracterizan la función (§ 118-4).

EJERCICIOS

1. Probar que si una función analítica tiene parte real constante, o módulo constante, se reduce ella misma a una constante.

2. Utilizando las ecuaciones características de monogeneidad (§ 114-2, *a*), probar que si $f(z)$ y $g(z)$ son monógenas en $z = z_0$, lo son $f(z) \cdot g(z)$, $f[g(z)]$, y también $f(z)/g(z)$ si $g(z_0) \neq 0$.

3. Probar que en un recinto de regularidad de $f(z)$ es:

a) $\Delta |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2$, siendo $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$;

b) Si $f'(z) \neq 0$, $\Delta \ln |f'(z)| = 0$.

4. Demostrar que en la correspondencia biunívoca estudiada en § 114-2, *b*, entre los valores de z y w próximos a z_0 y w_0 no puede corresponder un entorno circular a un entorno circular, excepto en el caso en que la función sea lineal del tipo $w = w_0 + a(z - z_0)$, la cual representa una semejanza.

5. 1º) Probar que la ecuación

$$(9) \qquad 2pz\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + 2q = 0,$$

con p y q reales, representa una circunferencia, real si $\beta\bar{\beta} > 4pq$, reduciéndose a una recta si además $p = 0$; 2º) Con ello, probar analíticamente el teorema de § 114-4, *b*.

6. Probar que una transformación homográfica hace corresponder a dos puntos inversos [simétricos] con respecto a una circunferencia [recta], dos puntos inversos [simétricos] respecto de la circunferencia [recta] correspondiente (ejercicio 5).

7. 1º) Probar, utilizando el ejercicio 6, que las transformaciones homográficas que transforman el círculo $|z| \leqslant 1$ en el círculo $|w| \leqslant 1$ de modo que a $z = a$ corresponda $w = 0$, son $w = e^{i\theta}(z - a)/(\bar{a}z - 1)$; 2º) Las transformaciones $w = Re^{i\theta}(z - a)/(\bar{a}z - R^2)$ tienen módulo no

nulo si $|a| \neq R$ y transforman la circunferencia $|z| = R$ en la circunferencia $|w| = 1$, con correspondencia de interiores si y sólo si $|a| < 1$.

8. Las transformaciones homográficas que transforman el semiplano $I(z) \geqslant 0$ en el círculo unidad $|w| \leqslant 1$ de modo que a $z = a$, $[I(a) > 0]$, corresponda $w = 0$, son $w = e^{i\theta}(z - a)/(z - \bar{a})$.

9. 1º) Una transformación homográfica se llama *real* si transforma todo número real en un número real. Probar que en tal caso, previa eventual reducción, los coeficientes de la transformación son reales. 2º) Si a, b, c, d son reales, la transformación [114-14], entonces real por 1º, transforma el semiplano $I(z) \geqslant 0$ en el semiplano $I(w) \geqslant 0$ si el módulo $\Delta = ad - bc$ es positivo.

10. *a*) En la transformación homográfica $w = f(z)$ definida por $(z_1, z_2, z_3, z) = (w_1, w_2, w_3, w)$ es $w_i = f(z_i)$, $(i = 1, 2, 3;\ z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1,\ w_1 \neq w_2 \neq w_3 \neq w_1)$, y se corresponden las regiones planas situadas "a un mismo lado" de las circunferencias (o rectas) *orientadas* correspondientes $z_1 z_2 z_3$, $w_1 w_2 w_3$; *b*) Hallar la transformación homográfica que a $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ hace corresponder $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$ respectivamente, y observar que debe transformar el círculo $|z| \leqslant 1$ en el semiplano *superior* $I(w) \geqslant 0$.

11. Probar que en la transformación homográfica [114-14], de módulo Δ, la circunferencia $|cz + d| = |1/\sqrt{\Delta}|$ es el lugar geométrico de los puntos en cuyos respectivos entornos infinitésimos las longitudes y las áreas son invariantes en la transformación, y que estas longitudes y áreas son aumentadas (disminuídas) en los puntos interiores (exteriores) del correspondiente círculo.

12. Llamando *puntos dobles* de la transformación homográfica $w = f(z) = (az + b)/(cz + d)$ aquellos para los cuales es $f(z) = z$, probar que: 1º) Hay dos puntos dobles z_1, z_2, distintos o coincidentes; 2º) Si $z_1 \neq z_2$ es $(w - z_1)/(w - z_2) = k(z - z_1)/(z - z_2)$ o bien $w - z_1 = k(z - z_1)$ según sean z_1 y z_2 propios, o bien $z_2 = \infty$, debiendo ser $k \neq 0$ y $\neq 1$ para que la transformación sea no degenerada y no idéntica; 3º) Si $z_1 \neq z_2$, mediante una misma transformación homográfica $Z = \varphi(z)$, $W = \varphi(w)$, se lleva $w = f(z)$ a la *forma canónica* $W = kZ$ que representa una *rotación* si $k = e^{i\theta}$ $(\neq 1)$ (transformación *elíptica*), una *homotecia* si $k > 0$ $(\neq 1)$ (transformación *hiperbólica*) o un producto de ambas en los demás casos ($k = re^{i\theta}$, $r > 0$, $r \neq 1$, $e^{i\theta} \neq 1$; transformación *loxodrómica*); 4º) Si $z_1 \equiv z_2$, mediante una misma transformación homográfica $Z = \psi(z)$, $W = \psi(w)$ que lleve este punto al infinito, se lleva $w = f(z)$ a la *forma canónica* $W = Z + h$ (*traslación*).

13. Probar que para que la transformación general del plano

$$(^{\circ\circ}) \qquad \xi = a_{11}x + a_{12}y + a_{10} \quad , \quad \eta = a_{21}x + a_{22}y + a_{20}$$

conserve las distancias, es necesario y suficiente que $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$, $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$, $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$. Probar que en tal caso la transformación es: o un movimiento, o el producto de una simetría respecto del eje x y un movimiento.

14. Utilizando el ejercicio 13, probar que toda transformación homográfica que conserve la distancia entre puntos, es un movimiento, o el producto de una simetría respecto del eje x y un movimiento.

15. Verificar que las transformaciones loxodrómicas (ejercicio 12) con puntos dobles comunes z_1, z_2, forman un grupo abeliano (§ 5-12, *b*), y lo mismo las transformaciones parabólicas con el mismo punto doble.

16. Probar que si el "ecuador" de la esfera compleja corresponde a

la circunferencia unidad, la transformación $w = 1/z$ corresponde a una rotación de 180° de la esfera alrededor del diámetro paralelo al eje real.

17. Del ejercicio 16 y de la descomposición de una transformación homográfica dada en § 114-4, deducir que una función homográfica transforma *toda* la esfera compleja en *toda* la esfera compleja, biunívoca y conformemente.

18. Demostrar el teorema fundamental del Algebra aplicando el teorema de § 114-7, *b*, a la función $1/P(z)$, siendo $P(z)$ un polinomio.

§ 115. INTEGRACIÓN EN EL CAMPO COMPLEJO Y APLICACIONES

1. **Integral curvilínea de una función regular.** — Hemos llamado (§ 88-1) *curva elemental* a un arco con tangente continua (es decir, definido por dos funciones $x(t)$, $y(t)$ que tienen primera derivada continua) o bien se compone de número finito de tales arcos, conservándose acotadas dichas derivadas si están definidas en un intervalo abierto del parámetro.

Para satisfacer al principio de permanencia de las leyes formales, el significado que debe darse a la integral de $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sobre un arco elemental abierto o cerrado *ab* (que son los considerados en lo sucesivo), es éste:

$$[115\text{-}1] \qquad \int_{ab} f(z)\,dz = \int_{ab} (u + iv)\,(dx + i\,dy) =$$
$$= \int_{ab} u\,dx - v\,dy + i \int_{ab} v\,dx + u\,dy \quad ,$$

integrales curvilíneas cuyo significado ha sido estudiado en § 88. Los arcos que habremos de utilizar en lo sucesivo se componen de segmentos rectilíneos y arcos de circunferencia, siendo, por tanto, sobradamente general la teoría de la integral sobre arcos elementales; pero bueno es saber que puede extenderse a todos los arcos rectificables (§ 88-1, *b*, y nota 5), y aún a curvas continuas más generales *.

2. **Propiedades fundamentales de las primitivas e integrales.** Vamos a suponer que las derivadas u_x, u_y, v_x, v_y, no solamente satisfacen a las ecuaciones características [114-7] en el recinto G, sino que son *continuas* en él. La monogeneidad en un recinto lleva consigo la continuidad de las derivadas, como demostró GOURSAT (nota III).

a) Apliquemos los teoremas demostrados en § 89 a las dos integrales curvilíneas que componen la integral [115-1]. Puesto que se cumple la igualdad de derivadas cruzadas, para la

* Por esta doble razón de ser más que suficientes las curvas elementales y no ser las más generales las rectificables, no basamos en éstas la teoría, como es costumbre en los Tratados modernos de funciones analíticas, y así logramos abreviar y simplificar notablemente la exposición.

existencia de primitivas del par u, $-v$ y del v, u, igualdades que son precisamente las ecuaciones características [114-7], resulta:

Si $f(z) = u + iv$ *es regular en un recinto* G (*simple o múltiplemente conexo*), *admite una primitiva* $F(z) = U + iV$ *cuyas componentes* U *y* V *están definidas por las condiciones*:

[115-2] $$U_x = V_y = u \quad , \quad V_x = -U_y = v \quad ,$$

la cual es, por tanto, regular en G *y satisface a la condición* $F'(z) = f(z)$. *Si el recinto es simplemento conexo, es* $F(z)$ *uniforme en él* (§ 89-1); *pero si es múltiplemente conexo, puede ser multiforme* (§ 89-2, notas). *En ambos casos, cualquier otra primitiva difiere de* $F(z)$ *en un sumando constante.*

Si $f(z)$ es una función elemental formada mediante operaciones aritméticas con la variable z, la primitiva se obtiene con las mismas reglas y artificios explicados para el campo real (Cap. XIV); y si $f(z)$ viene dada por sus componentes, basta integrar las ecuaciones [115-2], como ya se explicó en § 89-1, nota 1.

EJEMPLO. La primitiva de z^n es $z^{n+1}/(n+1)$; la primitiva de $1/z$ es la función multiforme $\ln z$; todas las demás primitivas se deducen de éstas sumándoles una constante arbitraria (§ 45-3, *c*).

En cambio, dada $w = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$, el sistema de ecuaciones es:

$$U_x = V_y = x^3 - 3xy^2 \quad , \quad V_x = -U_y = 3x^2y - y^3 \quad .$$

y resulta la primitiva $\frac{1}{4}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + i(x^3y - xy^3)$. Claramente se ve que la función dada es z^3 y su primitiva podía haberse calculado por la regla de la potencia.

b) Recordando la expresión dada en § 89-1 para la primitiva de un par mediante una integral curvilínea según el camino fijo formado por paralelas a los ejes, también $F(z)$ se puede expresar así; pero por § 89-2, teorema 1, resulta que el valor de la integral es la diferencia de valores de la primitiva en ambos extremos, es decir:

Si $f(z)$ *es regular en un recinto* SIMPLEMENTE CONEXO *y, por tanto, tiene primitiva uniforme, la integral definida entre dos puntos es la diferencia de valores de la primitiva, cualquiera que sea el camino entre estos extremos.* Subsiste, pues, la regla de BARROW (§ 50-2) (GAUSS, 1811):

[115-3] $$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) - F(z_0).$$

Queda así resuelto el problema de calcular la integral definida de una función $f(z)$ entre dos puntos cualesquiera del recinto en que $f(z)$ es regular, cuando este recinto es simplemente conexo, y se conoce una función primitiva cualquiera, obtenida por los métodos usuales del Cálculo. En tal caso es

uniforme esta función y la fórmula [115-3] no ofrece ambigüedad.

c) Queda así justificada la misma notación que para variable real. En particular, si los extremos coinciden, resulta como corolario de la regla de BARROW el importante *teorema de* CAUCHY (1825):

La integral de f(*z*) *sobre un circuito cualquiera del campo de regularidad simplemente conexo es nula*:

[115-4] $$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Es éste el llamado *teorema fundamental* en la teoría de la integral, pero en realidad no lo es más que la regla de BARROW, que lo comprende como caso particular *.

NOTAS: 1. En nota III se da una demostración del teorema de CAUCHY, debida a GOURSAT, que no obliga a suponer la continuidad de la derivada.

2. Si R es el recinto simplemente conexo, limitado por la curva rectificable simple y cerrada C, considerando en R otros contornos C′ que se aproximan a C, es posible demostrar [115-4] (y por tanto sus consecuencias como [115-17]), con la sola hipótesis de que f(*z*) sea *regular en* R y continua en R + C. Esta ampliación es muy importante en la teoría del potencial (nota VI, *c*).

d) Finalmente, el teorema recíproco de § 89-2 (ver nota 3) conduce a este resultado, también importante, llamado teorema de MORERA (1886), aunque él le dió menor alcance **:

Si la integral de la función uniforme f(*z*) *sobre todo contorno rectangular de lados paralelos a los ejes, contenidos en el recinto simple o múltiplemente conexo* G, *es nula, es* f(*z*) *regular en* G.

3. **Caso de recinto múltiplemente conexo.** — Hay funciones uniformes f(*z*) que son regulares en un dominio múltiplemente conexo, pero no pueden ampliarse al dominio que se deduce al suprimir los contornos interiores, es decir, no es posible prolongar la función al interior de esos contornos conservando la monogeneidad.

EJEMPLO. La función $\ln z$ es regular en la corona $r \leqslant |z| \leqslant R$ que puede ampliarse haciendo crecer R y decrecer r, pero no es posible suprimir esta circunferencia, pues dentro está el punto $z = 0$, donde cesa la regularidad. Y no se crea que será posible modificar de algún modo

* Naturalmente de éste resulta la independencia del camino y puede deducirse la regla de BARROW, pero apoyándose en el teorema fundamental del Cálculo integral (§ 35-3).

** El teorema de MORERA es exactamente el recíproco del teorema fundamental de CAUCHY, es decir, exige la anulación de la integral en *todo circuito*; pero vemos que basta suponerla en todos los contornos rectangulares de lados paralelos a los ejes. Además, el teorema de CAUCHY sólo es cierto para recintos simplemente conexos, mientras que el teorema de MORERA puede extenderse a los múltiplemente conexos.

los valores de f(z) como cabe hacerlo en el campo real, pues la condición de monogeneidad determina (§ 115-12), de modo único, su posible prolongación.

Interesa, pues, el estudio de las integrales sobre recintos múltiplemente conexos, demostrándose:

Si una función es uniforme y regular en un recinto múltiplemente conexo, su integral a lo largo del contorno exterior es la suma de las integrales a lo largo de los contornos interiores en sentido positivo.

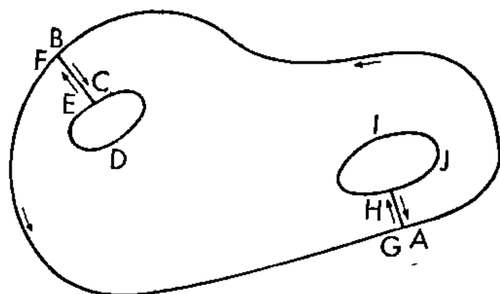


Fig. 415.

Si suponemos, para fijar las ideas, un recinto triplemente conexo, y unimos los contornos interiores con el contorno exterior mediante arcos de curvas o poligonales, podemos aplicar el teorema de CAUCHY (§ 115-2, *c*) al recinto simplemente conexo así obtenido, y resulta (fig. 415):

$$\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CDE} + \int_{EF} + \int_{FG} + \int_{GH} + \int_{HIJ} + \int_{JA} = 0 \quad ,$$

y simplificando:

[115-5] $$\int_{AB} + \int_{FG} = \int_{EDC} + \int_{JIH}$$

NOTA. Obsérvese que el contorno del recinto simplemente conexo así formado no cumple la condición de ser interior a otro recinto simplemente conexo, como exige el teorema de CAUCHY; pero, recordando la demostración (§ 89-2, teor. 1), se ve que subsiste si se supone rota la conexión entre los bordes de cada arco auxiliar, es decir, si se suponen efectuados *cortes* en el recinto dado; pues, con este convenio, dos caminos quebrados que conduzcan a un mismo punto de contorno encierran un número finito de rectángulos formados por puntos regulares y la integral es igual por ambos caminos. Omitimos la demostración topológica.

Para ver cuán necesaria es esta precaución, tómense el circuito exterior y los interiores en sentido igual (es decir, los interiores al contrario de como indica la figura) y se verá que falla la conclusión.

Para evitar en la demostración estas consideraciones delicadas, cuya utilidad justifica buscar la ocasión de exponerlas, basta considerar un tercer corte que une los dos contornos interiores e integrar sobre las curvas que limitan los dos recintos simplemente conexos en que queda dividido el recinto dado.

4. La función integral y su derivada. — *a) La integral*

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

de una función regular en un recinto simplemente conexo, es

una función uniforme regular en el mismo recinto, siendo su derivada en todo punto la función f(z).

Puesto que el extremo z_0 es fijo, y la integral sólo depende del extremo superior z y no del camino que los une, el valor de dicha integral es una función uniforme $F(z)$, que llamaremos *función integral* de f(z) (cfr. § 50-1, *a*). Que es regular, resulta observando que las componentes de $F(x) = U(x, y) + iV(x, y)$ son las integrales curvilíneas [115-1] y que éstas tienen (§ 89-1), derivadas parciales

[115-6] $$U_x = V_y = u \quad , \quad V_x = -U_y = v \quad ,$$

que cumplen las condiciones de monogeneidad [114-7].

La derivada de $F(z)$ es, por tanto:

[115-7] $$F'(z) = u + iv = f(z).$$

b) *Una función analítica cuya derivada es nula en un recinto, es constante en él.*

Basta, en efecto, observar que, siendo entonces nulas las derivadas parciales de sus dos componentes u y v, éstas son constantes (§ 66-2).

c) *Toda función* $\Phi(z)$ *cuya derivada sea* f(z), *difiere de la función*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

en una constante.

Pues la función $\Phi(z) - F(z)$ tiene por derivada:

$$\Phi'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0 \quad ,$$

y por tanto, es:

[115-8] $$\Phi(z) = F(z) + C = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz + C.$$

Esta función, determinada salvo una constante arbitraria, se llama *integral indefinida* de f(z) (cfr. § 50-1, *b*). Como f(z) es regular y por tanto continua, este concepto coincide con el de *función primitiva*, indicada así:

$$\int f(z)\,dz.$$

NOTA. *Primitivas en el campo complejo.* — Mientras en el campo complejo las fracciones cuyos denominadores carecen de ceros múltiples se descomponen indistintamente en fracciones simples del tipo $A/(z - a)$, cuya integración conduce a otros tantos logaritmos, en cambio, en el campo real es preciso distinguir los dos tipos de denominadores $1 - z^2$ ó bien $1 + z^2$, que conducen a logaritmos reales la primrea y a la función arc tg z la segunda. Vimos (§ 51-2, ej. 4) cómo esta función circular (lo mismo que las otras inversas), es expresable por logaritmos, de igual modo que las directas vienen expresadas por exponenciales mediante las

fórmulas de EULER (§ 45-3). De este modo queda confirmado, que es la exponencial con su inversa logarítmica, la única función simple, con la cual se puede expresar toda función elemental.

5. **Acotaciones de la integral.** — *a*) Si trasladamos al campo complejo el significado (§ 88-1) de las integrales curvilíneas [115-1], vemos que tanto en el campo complejo como en el real puede definirse la integral sobre la curva ab partiendo de las sumas

$$[115\text{-}9] \quad \Sigma f(\zeta_r)(z_r - z_{r-1}) = \Sigma[u(\xi_r, \eta_r)\Delta x_r - v(\xi_r, \eta_r)\Delta y_r] + \\ + i\Sigma[u(\xi_r, \eta_r)\Delta y_r + v(\xi_r, \eta_r)\Delta x_r] \quad ,$$

siendo $a = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = b$, puntos ordenados en la curva ab y $\zeta_r = \xi_r + i\eta_r$ un punto cualquiera del arco r-simo. Si la curva es elemental y los vértices donde pueda no haber derivada continua se toman como puntos de división, basta aplicar el teorema del valor medio a cada incremento Δx_r, Δy_r para llegar a la expresión de la integral [115-1], que se calcula expresando x é y como funciones de t; pero si la curva de integración no es elemental, pero rectificable, es preciso recurrir al concepto de integral de STIELTJES (§ 88-1, *b*). Resulta, pues, la integral como límite de las sumas Σ; y de aquí se deduce una importante acotación:

Si en toda la curva C es $|f(z)| \leqslant M$, y llamamos l_r a las longitudes de las cuerdas o vectores $z_r - z_{r-1}$ y L a la longitud total de la curva, se tiene: $|\Sigma| \leqslant \Sigma M \,.\, l_r = M \,.\, \Sigma l_r \leqslant ML$, luego:

$$[115\text{-}10] \qquad \left| \int_C f(z)\,dz \right| \leqslant ML \quad ,$$

es decir: *El módulo de la integral de una función* f(z) *cuyo módulo tiene la cota superior* M *en el arco de integración, no supera al producto de esta cota* M *por la longitud del camino de integración.*

b) He aquí una generalización: Sea $f(z)$ una función regular y, por tanto, continua en un dominio simplemente conexo; por la continuidad uniforme (§ 65-3) es $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$ para todo par de puntos tales que sea $|z' - z''| < h$.

Si es ab un arco rectificable en el cual es regular $f(z)$ y se forman las sumas [115-9] para diversas particiones del mismo por puntos intermedios $a = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = b$, de modo que la longitud de cada arco sea menor que h, los valores de $f(\zeta_r)$ en cada arco diferirán en menos de ε del valor en uno de los extremos, luego, diferirán en menos de 2ε de los valores de $f(z)$ en la cuerda. Por tanto, poniendo $f(z) = f(\zeta_r) + \delta(z)$, la diferencia entre cada término de la suma y la integral sobre la cuerda, es decir:

$$\int_{z_{r-1}}^{z_r} f(z)\,dz - f(\zeta_r)(z_r - z_{r-1}) = \int_{z_{r-1}}^{z_r} \delta(z)\,dz \quad ,$$

tiene módulo menor que $2\varepsilon_0$ por la longitud l_r de la cuerda. Sumando las n diferencias correspondientes a los n arcos, resulta:

$$[115\text{-}11] \qquad \left| \int_a^b f(z)\,dz - \sum f(\zeta_r)(z_r - z_{r-1}) \right| < 2\varepsilon \sum l_r < 2\varepsilon L.$$

Pero el valor de esta integral sobre la poligonal es la diferencia de valores de la primitiva $F(z)$ en ambos extremos (§ 115-2, b) por ser ésta una curva elemental; luego, las sumas $\sum$ tienen este mismo límite al tender a 0 la norma h, y este límite se llama integral de $f(z)$ sobre el arco rectificable, siendo su valor $F(z') - F(z_0)$, es decir, subsiste la regla de BARROW, como para los arcos elementales.

Si llamamos s a la longitud del arco parcial desde el punto origen a al punto variable $z = z(s)$ podemos precisar más la acotación antes obtenida, que suele ser suficiente en la práctica; observando que, por definición de longitud de un arco, ésta no es superada por la cuerda, se tiene:

$$|\Sigma| \leqslant \Sigma |f(\zeta_r)|\, l_r \leqslant \Sigma |f(\zeta_r)|\, \Delta s \quad ,$$

luego:

$$[115\text{-}12] \qquad \left| \int_a^b f(z)\,dz \right| \leqslant \int_0^L |f[z(s)]|\,ds \quad ,$$

y como corolario sale nuevamente la acotación [115-10].

6. **Residuo en un punto singular aislado, y en un dominio. —** a) La función más sencilla, que es regular en todo el plano, excepto en un punto a, es $1/(z-a)$. Aunque ya hemos calculado su integral mediante la primitiva, que es $\ln(z-a)$, vamos a hacerlo también reduciéndola a integral de variable real; sea c la circunferencia de centro O y radio r; llamando φ al argumento, se tiene: $z - a = re^{i\varphi}$; $dz = ire^{i\varphi}\,d\varphi$; y efectuando el cambio de variable, resulta:

$$[115\text{-}13] \qquad \int_c \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2\pi i.$$

Si, en vez de la circunferencia c, se toma un circuito C que la contenga en su interior, el resultado es el mismo, en virtud de § 115-3, por ser regular en la corona comprendida entre c y C. Lo esencial no es la forma del circuito, sino que el sentido de integración sea positivo.

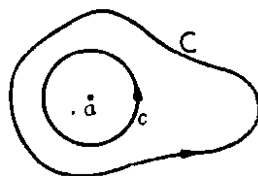


Fig. 416.

Generalicemos este resultado: Sea $f(z)$ regular en el dominio D de contorno C, excepto en el punto interior a, que llamaremos *singular*. El valor de la integral de $f(z)$ sobre C es el mismo que sobre cualquier otro circuito interior a C alrededor de a; y es, por tanto, un número que sólo depende del punto y de la función, el cual desempeña importante papel en la teoría y ha recibido nombre especial.

DEF. *Residuo* de $f(z)$ en el punto singular aislado a, es el valor de la integral

[115-14] $$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz \quad ,$$

siendo C cualquier circuito en torno de a y dentro del cual es regular $f(z)$, con la sola excepción del punto a. Suele tomarse una circunferencia de radio suficientemente pequeño para que no contenga otro punto singular, si tales existen.

EJEMPLO. El residuo de $(z-a)^n$ con exponente entero negativo distinto de -1 es nulo, pues su integral es nula. En cambio, si es $n=-1$ resulta 1 como residuo.

EJERCICIO. Demuéstrese que si $f(z)$ no está definida en el punto a pero está acotada (en particular si existe límite para $z \to a$) el residuo es nulo. Basta aplicar la acotación [115-10] de la integral.

b) En virtud de la regla [115-5], el cálculo de la integral en un circuito se reduce a determinar los residuos en los diversos puntos singulares que contiene. Tal suma de residuos es, pues, la integral sobre C dividida por $2\pi i$ y se llama a veces *residuo en el dominio* que limita C; se tiene entonces (teorema de los residuos):

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} r_k$$

siendo $r_1, \ldots, r_n$, los resíduos en los puntos singulares interiores a C.

Como todo intervalo real finito o infinito se puede completar en el campo complejo cerrando un circuito, se comprende la utilidad que tiene el cálculo de residuos, o sea, el cálculo de integrales en circuitos, para deducir integrales en intervalos reales. De este fecundo método haremos aplicación en ejercicios 1 a 8, pero veamos siquiera el caso más sencillo, que es el de la función racional $P(z)/Q(z)$.

Si es a un cero del denominador y es $k/(z-a)$ la primera fracción simple correspondiente a ese punto en que se descompone la función (§ 46-4), el residuo es evidentemente k, pues para las restantes fracciones la integral [115-14] es nula. *Si el cero es simple*, la descomposición es del tipo

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{(z-a)Q_1(z)} \quad , \quad \text{con} \quad Q_1(a) \neq 0 \quad ,$$

de donde, multiplicando por $z-a$ y haciendo $z=a$ se despeja:

$$k = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \lim_{z\to a} \frac{P(a)}{Q(z):(z-a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)} \quad ,$$

por definición de derivada.

Luego: *El residuo de la función racional en un recinto cualquiera es la suma de residuos en los diversos ceros de $Q(z)$ contenidos en él; y si estos ceros son simples, los residuos se pueden calcular mediante la fórmula anterior, que es la empleada para la descomposición en fracciones simples* (§ 64-4, *a*).

7. **La integral de Cauchy.** — Si $f(z)$ es regular en el interior de un circuito C y también en su contorno C (es decir, monógena en un recinto que contiene en su interior a C), su integral a lo largo de C es, como sabemos, nula. La función más sencilla que se deduce de $f(z)$ con un punto singular a interior a C es $f(z)/(z-a)$, y ocurre inmediatamente calcular su residuo que es (salvo el divisor $2\pi i$) el valor de la integral:

[115-15] $$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_c \frac{f(z)}{z-a}\,dz \quad ,$$

siendo c una circunferencia de centro a contenida en el recinto, recorrida en sentido positivo.

Si el radio r de c es suficientemente pequeño, el valor de $f(z)$ sobre c, diferirá de $f(a)$ arbitrariamente poco, por ser continua en a, es decir:

$$f(z) = f(a) + \delta(z), \quad \text{con} \quad |\delta(z)| < \varepsilon,$$

luego, integrando sobre s, se tiene:

$$\int_c \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a)\int_c \frac{dz}{z-a} + \int_c \frac{\delta(z)}{z-a}\,dz \quad ;$$

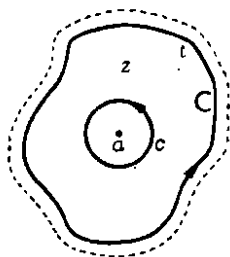


Fig. 417.

el primer sumando es igual a $f(a)2\pi i$ y el módulo del segundo (§ 115-5) es inferior a $(\varepsilon/r)2\pi r = 2\pi\varepsilon$, luego, la integral [115-15] tiene un valor que difiere de $f(a).2\pi i$ arbitrariamente poco; y como ese valor es independiente de r, vale exactamente $f(a).2\pi i$.

Tenemos así este resultado importante:

[115-16] $$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a).$$

Tal es la integral de CAUCHY, base de su teoría de las funciones analíticas. Si llamamos t al punto variable de contorno y z al punto interior que figura como parámetro, adopta el teorema esta forma:

Toda función $f(z)$ regular en un dominio simplemente conexo de contorno C, puede expresarse, en cada punto interior z, por la integral sobre C en sentido positivo:

[115-17] $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt.$$

NOTAS: 1. La importancia de este resultado capital, merece algunas aclaraciones.

Si $f(z)$ no es regular en todo el interior de C, la fórmula pierde su validez. Sea, por ejemplo, $f(z) = 1/z$ y formemos la integral a lo largo de la circunferencia c de centro O:

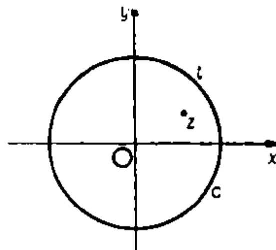


Fig. 418.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dt}{t(t-z)} = $$
$$= \frac{1}{2\pi i z}\left[\int_c \frac{dt}{t-z} - \int_c \frac{dt}{t}\right] =$$
$$= \frac{1}{z}\cdot(1-1) = 0 \quad ,$$

en vez de resultar $1/z$ como quizá podría esperarse.

Si z es exterior a c se obtiene $-1/z$. He aquí, pues, una expresión integral que define *dos funciones distintas.* Esto sucede también con toda integral de CAUCHY cuando $f(z)$ es regular, pues coincide con $f(z)$ en el interior y es nula en el exterior.

Sea, análogamente, $f(z) = 1/z^2$ y hagamos la descomposición:

$$\frac{1}{t^2(t-z)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{C}{t-z} ,$$

donde es:

$$A = -\frac{1}{z} , \quad B = -\frac{1}{z^2} , \quad C = \frac{1}{z^2} ,$$

y la integral de CAUCHY vale también cero en el interior del círculo de centro cero, por ser $B + C = 0$, mientras que en el exterior es $-1/z^2$.

Sea, por último, $f(z) = 1/(z^2 - 1)$. Efectuando la descomposición:

$$\frac{1}{(t^2-1)(t-z)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-z} ,$$

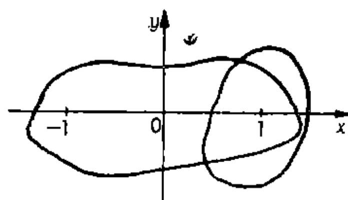


Fig. 419.

dedúzcase que la integral de CAUCHY a lo largo de un circuito que contenga en su interior los puntos ± 1 y z vale $A + B + C = 0$, pero si el circuito incluye los puntos 1 y z y excluye el -1, resulta $(-1/2)(z+1)$ sobre este último circuito y para puntos z exteriores la integral vale $1/(2-2z)$.

Nuevamente vemos una expresión que define dos funciones distintas.

2. *Teorema del promedio.* — Si $f(z)$ es regular en el punto a, es decir, monógena en un entorno del mismo valor, el valor $f(a)$ viene expresado por la integral [115-16] a lo largo de la circunferencia C que lo limita.

Adoptando como variable el argumento φ, es:

$$z - a = re^{i\varphi} , \quad dz = rie^{i\varphi} ,$$

y resulta:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\,d\varphi \quad (\text{GAUSS, } 1839),$$

fórmula que enunciaremos así:

El valor que una función $f(z)$ *regular en un círculo toma en el centro del mismo, es el promedio de los valores que toma en la circunferencia.*

Como corolario inmediato resulta el teorema del módulo máximo (§ 114-6).

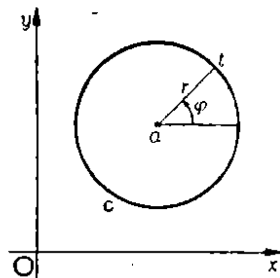


Fig. 420.

8. **Integrales de tipo Cauchy.** — Hemos visto con ejemplos del § 115-7, nota 1, que las integrales de tipo CAUCHY pueden expresar funciones $F(z)$ muy distintas de la $f(t)$ que figura en el integrando, es decir, al tender z hacia un punto t de contorno, no tiende en general $f(z)$ hacia $f(t)$, si falta alguna de estas dos condiciones, el arco de integración es un circuito y $f(t)$ es regular en todo el dominio que limita. Estudiemos, en

general, las funciones definidas por integrales de *tipo* CAUCHY sobre un arco rectificable τ:

$$[115\text{-}18] \qquad \mathrm{F}(z) = \int_\tau \frac{\mathrm{f}(t)}{t - z}\, \mathrm{d}t \quad ,$$

suponemos que $\mathrm{f}(t)$ está definida y es continua en el arco abierto o cerrado τ y, por tanto, tiene sentido la integral para todo z no situado sobre el arco. Formemos el incremento $\mathrm{F}(z) - \mathrm{F}(z_0)$ a partir de [115-18]; y resulta, sacando fuera del signo la diferencia $z - z_0$, que no depende de t, la siguiente expresión para la razón incremental:

$$[115\text{-}19] \quad \frac{\Delta \mathrm{F}}{\Delta z_0} = \frac{\mathrm{F}(z) - \mathrm{F}(z_0)}{z - z_0} = \int_\tau \frac{\mathrm{f}(t)}{(t - z)(t - z_0)}\, \mathrm{d}t.$$

Esto vale para toda función regular, por ser expresable por su integral de CAUCHY. Veamos ahora que la derivada de $\mathrm{F}(z)$ en z_0, es decir, el límite [115-19] para $z \to z_0$, se obtiene sencillamente haciendo $z = z_0$ en la integral, es decir

$$[115\text{-}20] \qquad \mathrm{F}'(z_0) = \int_\tau \frac{\mathrm{f}(t)}{(t - z_0)^2}\, \mathrm{d}t.$$

En efecto, la diferencia entre ambas, restando los integrandos y sacando el factor $z - z_0$ es:

$$\frac{\Delta \mathrm{F}}{\Delta z_0} - \mathrm{F}'(z_0) = (z - z_0) \int_\tau \frac{\mathrm{f}(t)}{(t - z)(t - z_0)^2}\, \mathrm{d}t \quad ,$$

y como el integrando está acotado, según puede comprobar el lector con razonamiento análogo al que haremos en § 115-10, y el incremento $z - z_0 \to 0$, queda demostrado [115-20], y resulta:

Toda función expresada por una integral de tipo CAUCHY *es regular fuera del arco de integración.* Si el arco divide al plano en dos o más recintos, resultan otras tantas funciones distintas.

9. **Definición de funciones regulares mediante integrales. —** *a*) Las integrales del tipo CAUCHY y la obtención de la derivada [115-20] de la función regular [115-18] que representan, son caso muy particular del siguiente teorema general:

TEOR. 1. *Sea $\varphi(z, t)$ una función de dos variables complejas z, t, donde z pertenece a un recinto* G *y t a un arco elemental τ, en tal forma que para cada valor de t sea $\varphi(z, t)$ regular en* G *y para cada valor de z sea $\varphi(z, t)$ función continua sobre τ, uniformemente acotada respecto de* G; *entonces*

$$\mathrm{F}(z) = \int_\tau \varphi(z, t)\, \mathrm{d}t$$

es función regular de z en G *y su derivada se calcula derivando bajo el signo integral, es decir*

$$F'(z) = \int_\tau \varphi_z(z,t)\,dt.$$

Sea C un circuito en G. Por [115-17] es

$$F(z) = \int_\tau \varphi(z,t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\tau dt \int_C \frac{\varphi(\zeta,t)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad ,$$

donde vamos a probar que es conmutable el orden de integración. En efecto, cada una de esas integrales puede expresarse por [115-1] mediante integrales con integrandos reales continuos, respecto de los cuales puede conmutarse la integración reiterada (§ 86-2, teor. 2). Por tanto:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z}\int_\tau \varphi(\zeta,t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

La última integral de CAUCHY representa una función regular (§ 115-8) y a su derivada, obtenible por [115-20], se le puede volver a aplicar el procedimiento anterior, resultando

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}\int_\tau \varphi(\zeta,t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\tau dt \int_C \frac{\varphi(\zeta,t)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2} = \int_\tau \varphi_z(z,t)\,dt \quad ,$$

como queríamos demostrar.

NOTAS: 1. Una vez más observemos la gran simplicidad que introduce en los métodos de cálculo la monogeneidad: para la derivación no es preciso asegurarse (§ 86-2, teor. 3) de la continuidad de la derivada $\varphi_z(z,t)$ como en el campo real; basta la de $\varphi(z,t)$.

2. Análogamente:

TEOR. 2. *Si tenemos una serie (sucesión) de funciones regulares en un recinto* G; *uniformemente convergente sobre todo contorno simple cerrado* C *perteneciente a* G, *entonces la función suma (límite) es regular en el recinto* G *y derivable término a término* (cfr. § 85-2). Pues por reducción a integrales reales según [115-1], la serie será integrable término a término sobre C (§ 85-1), con resultado nulo (§ 115-2, *c*), por lo que su suma será regular en G (teor. de MORERA). Expresada ésta mediante la integral de CAUCHY [115-17], sigue del mismo modo por [115-20] su derivabilidad término a término.

3. El teorema 1 puede extenderse al caso en que τ es un arco rectificable y también a integrales impropias (integrando no acotado o camino de integración τ infinito), siempre que las condiciones de hipótesis se verifiquen sobre la parte del camino de integración que quede por exclusión del semientorno del punto singular considerado, al definir (§ 80-1) la integral impropia y, además, la convergencia de ésta sea *uniforme* (§ 86-3) respecto del recinto G (teor. 2).

También es cierta la conclusión si $\varphi(z,t)$ es sólo función integrable (R) o integrable (L) respecto de t, siempre que $\varphi(z,t)$, además de ser

regular respecto de z, se conserve acotada sobre τ *uniformemente* respecto de G (teor. 2).

EJEMPLOS: 1. Si $f(t)$ es acotada e integrable en el intervalo real (a, b), entonces

$$F(z) = \int_a^b f(t) \cos zt \, dt$$

es una función regular en todo recinto acotado del plano z.

2. La función Gamma (nota VII, a) definida mediante la integral euleriana

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \, dt$$

es regular en todo el semiplano $R(z) > 0$.

3. Nada podremos afirmar sobre la regularidad de la función dada por la integral

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{\text{sen } tz}{t} dt \quad ,$$

por no converger uniformemente en ningún recinto del plano z (aunque sí converja uniformemente en ciertos intervalos reales).

4. La función $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ es regular para $R(s) > 1$, pues la serie es uniformemente convergente en todo recinto acotado de dicho semiplano.

5. Aunque la serie $\sum z^n/n^2$ sea uniformemente convergente en $|z| \leqslant 1$, no representa una función regular *sobre* $|z| = 1$, ni es derivable ahí término a término (§ 43-1, ej. 8).

b) Expresión de las derivadas sucesivas. — Aplicando el teorema 1 a [115-18], y así sucesivamente, se obtiene:

$$F''(z_0) = 2 \int_\tau \frac{f(t)}{(t - z_0)^3} dt \quad , \quad F'''(z_0) = 3! \int_\tau \frac{f(t)}{(t - z_0)^4} dt \quad ,$$

y en general

[115-21] $$F^{(n)}(z_0) = n! \int_\tau \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt \quad ,$$

para todo z_0 no situado sobre el arco τ, es decir:

TEOR. 3. *Toda función representada por una integral tipo* CAUCHY [115-18] *es indefinidamente derivable y las derivadas sucesivas se obtienen derivando bajo el signo integral respecto del parámetro z.*

En particular, como toda función regular en un recinto es expresable por su integral de CAUCHY, se obtiene este teorema importante:

TEOR. 4. *Toda función regular en un recinto* G *admite en él infinitas derivadas, que pueden expresarse así, para todo punto z interior a un circuito* C *contenido en* G:

[115-22] $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt \quad ,$$

y, en particular, si la función es regular en el origen:

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t^{n+1}}\,dt.$$

10. **Monogeneidad en un recinto, y analiticidad.** — Probaremos (teor. 2) que los conceptos tan distintos en apariencia de *analiticidad* (desarrollo en serie de potencias) y *monogeneidad* en un recinto (existencia de derivada en cada punto), son idénticos.

TEOR. 1. *Toda función* F(z) *definida por una integral de tipo* CAUCHY [115-18], *siendo* f(t) *una función real o compleja continua en el arco de integración, es analítica, esto es, admite un desarrollo en serie de potencias*

[115-23] $$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \textit{con} \quad a_n = \int_\tau \frac{f(t)}{t^{n+1}}\,dt \quad ,$$

en el interior del máximo círculo de centro O *que no contiene puntos del arco* τ.

En los puntos de la circunferencia puede ser o no válido el desarrollo, según los casos.

Más general, si a es un punto cualquiera exterior al arco τ y [115-18] se escribe así:

$$F(z) = \int_\tau \frac{f(t)}{(t-a)-(z-a)}\,dt \quad ,$$

resulta el desarrollo:

[115-24] $$F(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$$

con coeficientes

[115-25] $$a_n = \int_\tau \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\,dt \quad ,$$

válido en el interior del máximo círculo de centro a que no contiene dentro puntos del arco τ.

DEM. DE TEOR. 1. Por división se obtiene la descomposición:

[115-26] $$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{t^n} + \frac{z^n}{t^n(t-z)} \quad ,$$

y multiplicando por f(t), e integrando a lo largo del arco τ, resulta el desarrollo:

[115-27] $$F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + T_n \quad ,$$

siendo a_n dadas por [115-23] y

[115-28] $$T_n(z) = \int_\tau \frac{z^n f(t)}{t^n(t-z)}\,dt.$$

La condición necesaria y suficiente para la validez del desarrollo [115-23] que expresa la convergencia de la serie y su igualdad con $F(z)$, es por tanto:

$$\lim_{n \to \infty} T_n(z) = 0 \quad ,$$

y el campo de convergencia y validez del desarrollo [115-23] está definido por esta condición.

La acotación de $T_n(z)$ se logra así:

Por ser $f(t)$ continua en el arco τ, es $|f(t)| < M$. Sea $R > 0$ la distancia de O al arco τ (fig. 421), es decir, la longitud del radio vector mínimo de origen O y extremo t situado en la curva *; por tanto, en todo punto de ésta es $|t| \geqslant R$.

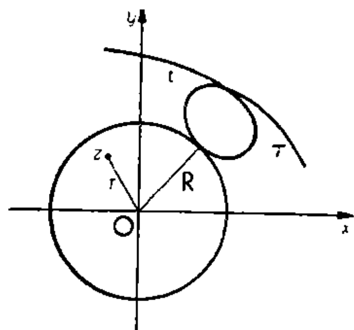


Fig. 421.

Sea z un punto interior al círculo de centro O y radio R, es decir, $r = |z| = R - d$, $(d > 0)$. Como es $|t| \geqslant R$, resulta:

$$|t - z| \geqslant |t| - |z| \geqslant$$
$$\geqslant R - (R - d) = d.$$

El módulo del integrando es, por tanto, inferior al número $\dfrac{r^n}{R^n} \dfrac{M}{d}$ que tiende a 0 para $n \to \infty$, por ser $r/R < 1$; y como el arco τ tiene longitud finita, resulta $T_n(z) \to 0$ para todo punto interior al círculo de centro O y radio R.

EJEMPLO. Sea $f(t) = |t|$ en el intervalo $(-1, +1)$. Se tiene:

$$\int_{-1}^{1} \frac{|t| \,.\, dt}{t - z} = -\int_{-1}^{0} \frac{t \,.\, dt}{t - z} + \int_{0}^{1} \frac{t \,.\, dt}{t - z} = z \ln \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

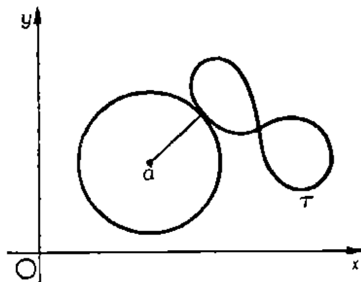


Fig. 422.

para todo z no perteneciente al intervalo $(-1, 1)$. Demostrar que en cada punto $z = a$ de este intervalo hay una discontinuidad con salto $2\pi a i$.

NOTA. Si el arco τ es cerrado, la integral define, fuera del arco de integración, no una función regular, sino tantas como regiones separa. Así, en el caso de la figura 422, resultarían tres funciones distintas.

Vemos, pues, que el algoritmo integral del tipo [115-18] sólo engendra funciones que también pueden darse por series enteras, es decir, no amplía la familia de las funciones analíticas. Parece a primera vista que, mediante la combinación de funciones reales $u(x, y)$, $v(x, y)$ que satisfagan a las ecuacio-

* Esto es, el mínimo de la función continua que expresa la distancia de O a un punto t, variable sobre el arco τ (§ 26-5).

nes características [114-7], se logrará formar otras funciones monógenas no analíticas; pero habiendo demostrado su expresión por la integral de CAUCHY, que es del tipo [115-18], a todas es aplicable la conclusión anterior, y resulta este importante teorema de CAUCHY como corolario del teorema 1:

TEOR. 2. *Toda función regular en un recinto es analítica en él, y en cada punto a se puede expresar por su desarrollo tayloriano* [114-2], *el cual es válido en el interior del máximo círculo de centro a, contenido en el recinto.* (CAUCHY, 1831).

De aquí resulta

TEOR. 3. *Los coeficientes* a_n *dados por* [115-25], *tienen el significado de derivadas en el punto a, divididas por las factoriales respectivas, quedando así demostrada la unicidad del desarrollo en serie de potencias.*

11. **Ceros y teorema de identidad.** — El punto a es *cero* de $f(z)$, cuando es *regular,* y el valor que en él toma la función es $f(a)=0$ *. Obsérvese que no basta la anulación para considerar como cero al punto a; exigimos la monogeneidad en todo un entorno.

EJEMPLO 1. La función $f(z)=ze^{-1/z}$, $f(0)=0$, es regular en el semiplano $x>0$, incluído el punto $z=0$, en el cual es monógena, pues

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{w}{z}=e^{-1/z}\to 0 \quad \text{para } z\to 0 \text{ en el semiplano.}$$

Además $f(0)=0$, pero este punto $z=0$ no es un cero de $f(z)$ por no ser ésta regular. Basta, en efecto, observar que si $z\to 0$ por la izquierda, $f(z)\to\infty$.

Según § 115-10, teor. 2, el desarrollo en serie en el cero a será de la forma $f(z)=a_m(z-a)^m+\ldots$, si es a_m el primer coeficiente no nulo, y este número *natural* m se llama *orden del cero* (cfr. § 38-6).

Como es $a_m=f^{(m)}(a)/m!$ resulta:

TEOR. 1. *El orden de un cero es el índice de la primera derivada que no se anula en ese punto.*

Sacando $(z-a)^m$ factor común, la expresión de la función en el entorno del cero a es:

[115-29] $$f(z)=(z-a)^m[a_m+a_{m+1}(z-a)+\ldots], \quad \text{con } a_m\neq 0,$$

es decir:

TEOR. 2. *Condición necesaria y suficiente para que a sea cero de orden m es que* $f(z)$ *tenga la expresión*

* Nótese la diferencia de estas nociones con las homónimas en el campo real (§ 26-2).

[115-30] $$f(z) = (z - a)^m \varphi(z) \quad ,$$

siendo $\varphi(z)$ *regular en* a *y* $\varphi(a) \neq 0$.

Cabe todavía la duda de si existirán ceros de orden infinito, es decir, tales que el desarrollo en serie en un entorno del mismo tenga todos sus coeficientes nulos. En tal caso la función es nula en todo el plano; y resulta:

TEOR. 3. *Si* $f(z) \not\equiv 0$, *todo cero tiene orden finito.*

Además, si a es un cero de orden m, es decir, se verifica [115-30], como por la continuidad de $\varphi(z)$ será $\varphi(z) \neq 0$ en un entorno de a, y tampoco se anula al otro factor, en dicho entorno no hay más cero que a. Resulta:

TEOR. 4. *Si* $f(z) \not\equiv 0$, *sus ceros son puntos aislados.*

Como consecuencia importante resulta:

TEOR. 5. TEOR. DE IDENTIDAD. — *Si dos funciones regulares en un recinto* G *tienen valores iguales en infinitos puntos del mismo, que tienen un punto de acumulación* a *interior a* G, *coinciden en todo su campo de existencia.*

Pues, siendo ambas regulares en el punto a de acumulación de los infinitos ceros de su diferencia, también lo es ésta, luego, resulta idénticamente nula.

EJEMPLO 2. La función $\operatorname{sen}[1/(1-z)]$ tiene dentro del círculo unidad los infinitos ceros $1-(1/k\pi)$, $(k=1,2,\ldots)$, sin que sea idénticamente nula.

Consecuencia inmediata del teorema de identidad es:

TEOR. 6. *Si una función de variable real es prolongable analíticamente al campo complejo, lo es de un solo modo.*

Por tanto, las prolongaciones al campo complejo, vistas en § 45-3 para las trascendentes elementales, son *las únicas analíticas.*

12. **Obtención de la función analítica completa por prolongación.** — Insistamos una vez más en la admirable simplicidad que lleva consigo la existencia de derivada en cada punto de un recinto. En el campo real son categorías distintas, cada vez más restringidas: funciones derivables, funciones con derivada continua, funciones con derivadas sucesivas, funciones analíticas, es decir, desarrollables en serie de potencias. En cambio, en el campo complejo todas estas categorías se funden en una sola.

Lo importante en una función analítica está en las propiedades intrínsecas de la correspondencia por ella definida en el sentido de CAUCHY-RIEMANN-DIRICHLET (§ 114-1, c) y no en su expresión accidental, que puede tener formas muy diferentes para una misma función. Cada una de estas formas puede

dar la representación de la función en recintos parciales al de definición, y en cambio *una misma expresión* puede representar *funciones distintas en recintos distintos* (§ 115-7, nota 1).

Pero dada una correspondencia analítica definida en un cierto recinto, se presenta en seguida el problema de si existirá un recinto mayor que comprenda al dado y en el que pueda establecerse una correspondencia también analítica tal que la primera sea en el recinto primitivo caso particular de la segunda, es decir, se presenta el problema de si la correspondencia o función dada puede *prolongarse analíticamente.*

La *prolongación analítica* se basa en el siguiente *principio*: Dadas $f_1(z)$ y $f_2(z)$ funciones respectivamente analíticas en los recintos D_1 y D_2 (§ 64-5) de intersección *no vacía,* donde sea $f_1(z) = f_2(z)$, entonces se considera la correspondencia $f(z)$ definida ya por $f_1(z)$, ya por $f_2(z)$ en el recinto suma $D_1 \cup D_2$ como una sola función analítica, siendo $f(z) = f_1(z)$ en D_1 y $f(z) = f_2(z)$ en D_2. La función $f_1(z)$ es la prolongación analítica de $f_2(z)$ en D_1, y $f_2(z)$ es la prolongación analítica de $f_1(z)$ en D_2. El proceso es, por lo tanto, reversible y tiene sentido al ser único, es decir, en la parte del recinto D_2 no perteneciente a D_1 o bien no existe ninguna función o bien existe solamente una $f_2(z)$ que sea analítica en D_2 y coincida con $f_1(z)$ en la parte común $D_1 \cap D_2$ a ambos recintos; la unicidad del proceso se deduce del teorema de identidad de las funciones analíticas (§ 115-11, teor. 5). Las funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$ se llaman *representaciones parciales* o *elementos* de la función $f(z)$, aunque se llame elemento por antonomasia a la serie de potencias que la representa en el entorno circular de un punto (§ 114-1, *b*) por ser el empleado por WEIERSTRASS para fundar la teoría. Si reiteramos el proceso visto en § 114-1, *b*, se obtiene lo que se llama una *cadena de círculos* y la importancia fundamental de este método de prolongación analítica, de aplicación práctica muy reducida para conocer efectivamente la función prolongada, radica en el hecho de que todos los valores de la función obtenibles por cualquier método de prolongación, pueden obtenerse también mediante una cadena de círculos. Si un nuevo círculo resulta tangente al anterior, ello indicará que el punto de contacto de ambas circunferencias de convergencia es punto singular (§ 117-1) de la función. Si se da el caso que la prolongación es imposible en todas las direcciones a partir del elemento circular inicial (tal para las funciones de § 114-1, nota), se dice que la circunferencia de convergencia de dicho elemento inicial es su *frontera natural*; la función no podrá definirse en el resto del plano complejo y la parte exterior al círculo inicial se llama *espacio lagunar* de la función. Las mismas denominaciones se aplican al caso de un recinto fuera del cual la función no es prolongable.

Cuando f(z) está dada por una expresión que la define en un recinto, donde es monógena, excepto en curvas que lo dividen en dos o más recintos, no diremos que estos circuitos son líneas singulares, sino simplemente que en cada recinto está definida una función. Tal sucede, como hemos visto, con la integral de CAUCHY [115-17], que define dos funciones, la f(z) y la función nula, *sin que la curva divisoria sea singular para ninguna*, pues la segunda es prolongable a todo el plano y también la primera en muchos casos; solamente cuando no lo sea resultará el circuito línea singular de ella, pero no de la otra.

Enunciado intuitivamente, el problema de la prolongación analítica busca el recinto máximo en que la función dada puede continuar siendo analítica; dicho recinto máximo puede cubrir más de una vez (hasta en número infinito numerable) el plano-esfera (§ 114-5), como veremos al tratar las funciones multiformes (§ 116-4).

Se emplea el nombre de función *holomorfa* (que significa *forma entera*) como sinónimo de *regular* (§ 114-3), *uniforme* y con valor siempre *finito*, y así lo haremos dando, en cambio, este significado más amplio:

Función analítica completa es la función *monógena* dada inicialmente en un *recinto* y constituída por el conjunto de los valores funcionales correspondientes a todos los puntos regulares pertenecientes a los sucesivos elementos que pueden obtenerse unos de otros por *prolongación analítica*. A esos puntos regulares, muchos autores suelen agregar los polos (§ 117-1, b) y singularidades algebraicas (§ 116-4, nota 2) que se presentan siempre aisladamente y a lo más en infinidad numerable, para formar así el *campo de existencia de la función analítica*, cuya frontera forman los puntos singulares esenciales (§ 117-1, b).

EJEMPLO. El logaritmo es función analítica aunque tiene los puntos singulares $z = 0$, $z = \infty$. En cambio, de cada función definida en § 114-1, nota, no diremos que son analíticas en todo el plano, pues no son prolongables fuera del círculo unidad y, por tanto, los puntos exteriores no son regulares ni singulares, pues la función no está definida en su proximidad, condición necesaria para que un punto pueda llamarse singular.

Así se concibe la función analítica como un todo y su concepto está íntimamente ligado a la clase de conjunto en que se estudia la correspondencia, es decir, a conjuntos que forman *recinto* (§ 64-5). Las funciones que aún siendo monógenas, definidas o prolongadas (por algoritmos o convenciones adecuadas) en conjuntos que no forman recinto, no gozan ya de las propiedades fundamentales estudiadas en la teoría de las funciones analíticas (nota IV).

Ejercicios

1. Aplicando el teorema de Cauchy (§ 115-2, *c*) a

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz \quad ,$$

siendo C el contorno de la región del plano $z = r \,.\, e^{i\varphi}$ dada por

$$0 < \varrho \leqslant r \leqslant R \quad , \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \quad ,$$

y haciendo luego $\varrho \to 0$, $R \to \infty$, hallar:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \,.$$

2. Aplicando el teorema de Cauchy (§ 115-2, *c*) a

$$\int_C e^{-z^2}\,dz \quad ,$$

siendo C el contorno del sector del plano $z = r \,.\, e^{i\varphi}$ dado por

$$0 \leqslant r \leqslant R \quad , \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha \leqslant \pi/4 \quad ,$$

y teniendo presente que $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (§ 87-3), hallar las igualdades:

$$\int_0^\infty e^{-x^2\cos 2\alpha}\cos(x^2 \operatorname{sen} 2\alpha)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\alpha \quad ,$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2\cos 2\alpha}\operatorname{sen}(x^2 \operatorname{sen} 2\alpha)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{sen}\alpha \quad , \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/4),$$

que para $\alpha = \pi/4$ dan las integrales de Fresnel (§ 87-4).

3. Calculando $\int_C e^{-z^2}\,dz$ sobre el contorno del rectángulo $|x| \leqslant p$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}a$, $(z = x + iy)$, y haciendo $p \to \infty$, hallar:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\cos ax\,dx = e^{-a^2/4}\sqrt{\pi} \quad , \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\operatorname{sen} ax\,dx = 0 \,.$$

$0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}a$, $(z = x + iy)$, y haciendo $p \to \infty$, hallar:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-(x+\frac{1}{2}ia)^2}\,dx = \sqrt{\pi} \quad ,$$

y de aquí deducir los resultados de ejercicio 3.

5. Integrando $e^{\pm aiz}/(e^{2\pi z} - 1)$ sobre el rectángulo de vértices 0, R, R + *i*, *i* endentado en 0 y en *i* (fig. 423) y haciendo $R \to \infty$, probar que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{e^{2\pi x} - 1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{e^a + 1}{e^a - 1} - \frac{1}{2a} \,.$$

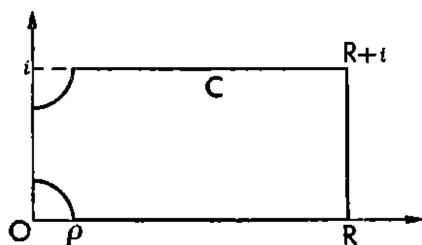


Fig. 423.

6. Demostrar que: *Si* $\mathrm{f}(z)$ *es regular en el semiplano* $y > 0$, $(z = x + iy)$, *con excepción de un número finito o infinito numerable de puntos singulares* $z_1, z_2, \ldots$, *que no se acumulan a distancia finita y los supondremos ordenados por módulos no decrecientes, con residuos* $r_1, r_2, \ldots$, *tales que* $\sum r_k$ *converge; si* $\mathrm{f}(z)$ *es regular en* $y = 0$, *y existen* $\mathrm{M} > 0$, $\varepsilon > 0$ *y* $\mathrm{H} > 0$, *tales que* $|\mathrm{f}(z)| < \mathrm{M}/|z|^{1+\varepsilon}$, *para* $|z| > \mathrm{H}$, $y > 0$; *entonces existe la integral y es:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} r_n .$$

7. *a*) Como caso particular del ejercicio 6, probar que si $\mathrm{R}(x)$ es una función racional dada como cociente de polinomios $\mathrm{P}(x)/\mathrm{Q}(x)$ con denominador sin ceros reales y con grado $\geqslant \{\mathrm{gr}\,\mathrm{P}(x)\} + 2$, es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{R}(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum r_n \quad ,$$

donde $\sum r_n$ es la suma (finita) de los residuos de los polos de $\mathrm{R}(x)$ en el semiplano $y > 0$; *b*) Aplicar este resultado para calcular:

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{a^4 + x^4} \quad (a > 0); \quad \mathrm{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1 + x^4} \; ;$$

$$\mathrm{K} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^{n+1}} \; .$$

8. Calculando

$$\int_{\mathrm{C}} \frac{z e^{iz}}{k^2 + z^2}\,\mathrm{d}z$$

sobre el contorno del semicírculo $|z| \leqslant \mathrm{R}$, $y \geqslant 0$, hallar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{k^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\, e^{-k}.$$

9. Demostrar que si $\mathrm{f}(z)$ es regular en $|z - a| < \sigma$ es

$$\mathrm{f}'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} \mathrm{R}[\mathrm{f}(a + re^{i\varphi})]e^{-i\varphi}\mathrm{d}\varphi \quad , \quad 0 < r < \varrho \quad ,$$

donde $\mathrm{R}(w)$ indica la parte real del complejo w.

10. Aplicando el teorema 2 de § 115-9, probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \zeta(z)$$

donde se toma la determinación principal de n^z (§ 45-3, *d*) representa una función (llamada *función zeta de* RIEMANN) regular en un recinto que contiene al semiplano $x > 1$, $(z = x + iy)$.

§ 116. FUNCIONES MULTIFORMES

1. **Función logarítmica.** — *a*) Vimos en § 45-3, *c*, que como consecuencia de la periodicidad de la función exponencial $z = e^w$ en el campo complejo, es el logaritmo

[116-1] $$w = \ln z \quad , \quad (z = x + iy, \ w = u + iv) \quad ,$$

una función *multiforme* con infinitas determinaciones:

[116-2] $$w = \ln z = \operatorname{Ln} z + 2k\pi i \quad , \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad ,$$

siendo la determinación principal

[116-3] $$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} |z| + i \operatorname{Arg} z \quad ,$$
$$(\operatorname{Ln} |z| \text{ real;} \quad -\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi)$$

y las demás

[116-4] $$\ln z = \operatorname{Ln} |z| + i \arg z \quad , \quad (\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi).$$

Si z recorre una curva, cada uno de los infinitos puntos homólogos w_1, w_2, ..., que resultan en [116-2] para distintos valores de k, engendra una curva, y todas ellas son congruentes, pues resultan de trasladar una cualquiera de ellas paralelamente al eje v. Si el punto z vuelve a la posición inicial recorriendo una curva cerrada que no encierre en su interior el origen, el argumento final coincide con el inicial y, por tanto, cada una de las curvas homólogas se cierra con independencia de las demás. Pero si z da una vuelta en torno de 0, es decir, si el argumento final difiere del inicial en 2π, entonces la curva engendrada por cada valor de w no se cierra en el mismo punto; la curva iniciada por w_1 termina en w_2; la iniciada por w_2 termina en w_3, etc. Si la curva engendrada por z da dos vueltas en torno del origen, la permutación de valores de w se verifica pasando w_1 a w_3, w_2 a w_4, etc.

b) Este comportamiento de la función logarítmica se explica fácilmente *definiéndola* (cfr. § 54-1, nota 3) por:

[116-5] $$w = \ln z = \int_{\tau(1, z)} \frac{d\zeta}{\zeta} \quad ,$$

donde $\tau(1, z)$ es un arco elemental (§ 115-1) de origen 1 y extremo z, que no pasa por el origen.

En cada recinto abierto simplemente conexo R del plano z que contenga al punto 1 y excluya el 0, [116-5] representa (§ 115-4, *a*) una función regular uniforme, cuyos valores están entre los de [116-2], pues como R contiene un segmento del semieje $y = 0$, $x > 0$, es aplicable el teorema 6 de § 115-11. Considerando en cambio el recinto $z \neq 0$ y todos los caminos

$\tau(1, z)$ en él es [116-5] multiforme; por ejemplo, para los caminos τ_1 y τ_2 de figura 424 es (§ 115-6, *a*) :

$$[116\text{-}6] \qquad \int_{\tau_2} \frac{d\zeta}{\zeta} - \int_{\tau_1} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_C \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i.$$

Para tener la determinación principal [116-3] debemos considerar los caminos $\tau(1, z)$ que no corten al semieje real ne-

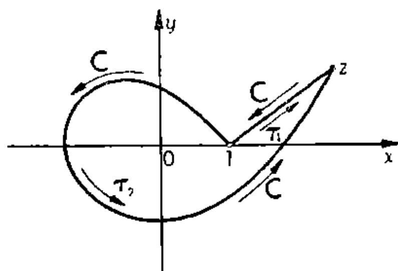


Fig. 424.

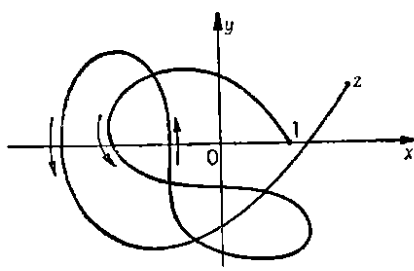


Fig. 425. — $k = 2 \quad 1 = 1$.

gativo $y = 0$, $x \leqslant 0$, o sea, contenidos en el recinto simplemente conexo que resulta mediante el "corte" o supresión de dicho semieje del plano z. Los puntos $z < 0$ se consideran accesibles desde el segundo cuadrante pero no desde el tercero (cfr. $-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$ en [116-3]).

Con demostración análoga a [116-3] se ve que las demás determinaciones, [116-2] con $k \neq 0$, se obtendrán para caminos $\tau(1, z)$ que dan $|k|$ vueltas en torno de cero en sentido positivo o negativo según sea $k > 0$ ó $k < 0$. Más precisamente, será k igual a la diferencia entre el número de veces que $\tau(1, z)$ atraviesa el "corte" del segundo al tercer cuadrante menos del tercero al segundo (fig. 425).

c) Para evitar las distinciones de casos a que obligan las conclusiones de *a*) o de *b*), y poder utilizar las ventajas de la uniformidad, tuvo RIEMANN la ingeniosa idea de concebir el *plano múltiple* (o *superficie de* RIEMANN), que en este caso constará de infinitas *hojas*, una para cada valor de k. A lo largo del corte efectuado sobre el semieje real negativo, cada borde superior (segundo cuadrante) de una hoja k se considera unido con el borde inferior (tercer cuadrante) de la hoja siguiente $k + 1$.

En la definición [116-5] el camino de integración $\tau(1, z)$ parte siempre del punto 1 situado *en la hoja* $k = 0$ *correspondiente a la determinación principal*. Para el camino de la figura 425 pasamos sucesivamente de la hoja $k = 0$ a la $k = 1$, de ésta a la $k = 0$ y finalmente de ésta a la hoja $k = 1$, donde

entonces queda situado z; para este camino, la integral [116-5] da

$$\operatorname{Ln} z + 2\pi i \quad ,$$

y *lo mismo para cualquier camino de extremo* z *en la hoja* $k = 1$. Un punto P de la superficie de RIEMANN de $\ln z$, no queda ya determinado por el valor de $z \neq 0$ solamente, es preciso conocer, además, la hoja k a la cual pertenece: pondremos $P(z \mid k)$. Con este convenio *es* $\ln z$ *función uniforme de* z *en la superficie de* RIEMANN. Por consiguiente, al recorrer z una curva *cerrada en la superficie de* RIEMANN, recorre w una curva *también cerrada* (cfr. *a*).

NOTAS: 1. La manera como se consideran "unidos" los bordes de las diferentes hojas indica cuál es la *topología que convendrá introducir en la superficie de* RIEMANN S de $\ln z$ mediante una oportuna definición de entornos de sus puntos $P(z_0 \mid k)$, $z_0 \neq 0$. Si z_0 no es real negativo, entorno E(P) será todo conjunto de puntos de S: $(z \mid k)$ cuando z varía en un conjunto abierto del *plano* z, que contiene a z_0 y excluye al semieje $x \leqslant 0$, $y = 0$. Si es $z_0 < 0$, entorno E(P) será todo conjunto de puntos de S: $(z \mid k + \varepsilon)$ cuando z varía en un conjunto abierto del *semiplano* $x < 0$ que contiene a z_0 y es $\varepsilon = 0$ ó $\varepsilon = 1$ según sea $y \geqslant 0$ ó $y < 0$.

2. La topología considerada en nota 1 es (equivalente a) la más débil (llamando así a la que tiene menos conjuntos abiertos, menos conjuntos cerrados, más sucesiones convergentes, Cap. XVIII, nota I, *b*) de las que hacen $\ln z$ continua en la superficie de RIEMANN con $z \neq 0$. De igual manera se caracteriza una topología en la superficie de RIEMANN de una función multiforme *continua* cualquiera $f(z)$.

3. En cualquier entorno del punto $z = 0$ del plano z, se pueden trazar caminos que en la superficie de RIEMANN van de una a otra cualquiera de sus hojas. Por esta razón $z = 0$ se llama *punto de ramificación* (en este caso de orden infinito) de la superficie de RIEMANN. Lo mismo ocurre con cualquier entorno del punto $z = \infty$ del *plano* z, o del *plano-esfera complejo* z (§ 114-5). Como no hay otros puntos con la misma propiedad, tenemos: *La superficie de* RIEMANN *de* $\ln z$ *cubre infinitas veces el plano-esfera complejo y tiene los únicos puntos de ramificación* $z = 0$, $z = \infty$.

4. La delimitación y numeración de las diferentes hojas es puramente convencional. Nada impide reemplazar el corte a lo largo del semieje real negativo por otro cualquiera, recto o no, que una los puntos de ramificación (nota 3) 0, ∞; por ejemplo, el semieje real positivo, o un semieje imaginario. Hemos elegido el corte, o sea, la delimitación de hojas, de modo tal que pertenezcan a la misma hoja todos los valores de la determinación principal [116-3].

d) Para estudiar la distribución de valores de la función $w = \ln z$ al variar z en el plano múltiple de RIEMANN, observemos que poniendo $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$, ($r > 0$, φ, u, v reales), de $z = e^w$ ó $r \cdot e^{i\varphi} = e^{u+iv} = e^u e^{iv}$ resulta

$$r = e^u \quad , \quad \varphi = v \quad ,$$

y entonces:

d$_1$) A cada circunferencia $r = C$ ($-\infty < \varphi < \infty$) del plano z, corresponde una recta "vertical" $u = \operatorname{Ln} C$ del plano w,

que al crecer el radio de 0 a ∞ $(0 < r = C < \infty)$, se desplaza "hacia la derecha" barriendo una vez el plano w $(-\infty < u = \operatorname{Ln} C < +\infty)$;

d_2) A cada rayo $\varphi = c$ $(0 < r < \infty)$ que parte del origen O del plano z, corresponde una recta "horizontal" $v = c$ del plano w. Cuando aquel rayo barre una vez el plano z (excluídos $z = 0$, $z = \infty$), al crecer φ de $-\pi$ a π $(-\pi < \varphi = c \leqslant \pi$, determinación principal Arg z del argumento), esta recta "sube" barriendo sólo una franja horizontal: $-\pi < v \leqslant \pi$, de anchura 2π, del plano w (franja de la determinación principal del logaritmo). A cada cuadrante III, IV, I, II del plano z corresponde una franja menor (de anchura $\frac{1}{2}\pi$), III′, IV′, I′, II′, como indica la figura 426.

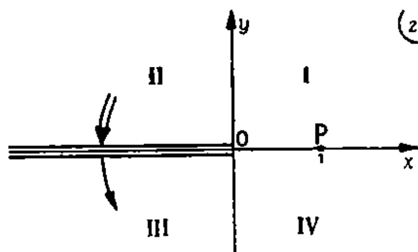


Fig. 426.

d_3) Si dejamos de lado la restricción $-\pi < c \leqslant \pi$ (es decir, consideramos cualquier determinación de $\arg z$), al crecer c de $-\infty$ a ∞, el rayo móvil barre infinitas veces el plano z. A cada barrido completo corresponde el de una franja horizontal de anchura 2π en el plano w. Cualquier rayo $\varphi = h$ puede fijarse como límite de barridos sucesivos del plano z

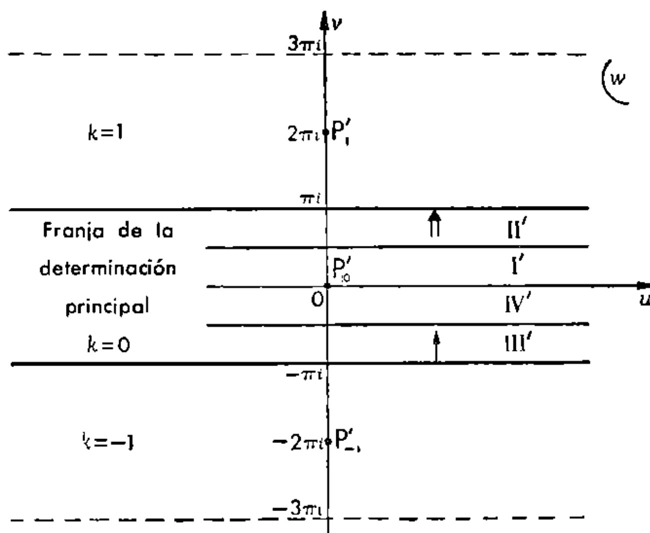


Fig. 427.

(cfr. nota 4). Para $h = \pi$ el límite será el semieje $y = 0$, $x < 0$, elegido en b como corte o delimitación de hojas en el plano múltiple de RIEMANN; en tal caso, una de las sucesivas franjas que en conjunto cubren una vez el plano w es la correspondiente a la determinación principal del logaritmo (cfr. d_2) y a la hoja $k = 0$ (cfr. c) de la superficie de RIEMANN, y las demás franjas corresponden a las demás hojas $k = \pm 1$, ± 2, ... (fig. 427).

EJEMPLO. Los puntos del rectángulo $a < u < b$, $c < v < d$ del plano w corresponden a los del sector de corona circular del *plano múltiple* z; $e^a < r < e^b$, $c < \varphi < d$, que tendrá puntos superpuestos en el *plano* z si y sólo si $d - c > 2\pi$.

NOTA 5. Si bien por d_1 a una circunferencia que barre una vez el plano z (salvo $z = 0$ é ∞) corresponde una recta vertical que barre una vez todo el plano w, debemos observar que a cada punto de una circunferencia corresponden infinitos puntos de la recta vertical correspondiente. Por ejemplo a los puntos $P(z = 1 \mid k)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) superpuestos en el *plano* z corresponden en el plano w los puntos $P'_k = 2k\pi i$ (fig. 427).

En cambio es biunívoca la correspondencia entre los puntos de la circunferencia $r = C$, $-\infty < \varphi < \infty$, *de la superficie de* RIEMANN, que es una curva abierta de longitud infinita, y los puntos de la recta $u = \text{Ln}\, C$.

2. Funciones $w = \sqrt{z}$ y $w = \sqrt[n]{z}$. — a) Consideremos la función más sencilla $z = w^2$ cuya inversa

$$[116\text{-}7] \qquad w = \sqrt{z} \quad , \quad \text{con} \quad z = re^{i\varphi} \ , \quad w = \varrho e^{i\theta} \quad ,$$

no es uniforme.

Como por [116-7] es (§ 10-2):

$$[116\text{-}8] \qquad \varrho = +\sqrt{r} \quad ; \quad \theta = \tfrac{1}{2}\varphi \quad ,$$

a cada semirrecta ($\varphi =$ constante) que parte de $O(z = 0)$ corresponden dos semirrectas opuestas a partir de $O'(w = 0)$, según se tome en la segunda [116-8] por ejemplo $\varphi = \text{Arg}\, z$ ó $\varphi = \text{Arg}\, z + 2\pi$. Las circunferencias de centro $O(z = 0)$ se transforman en circunferencias de centro $O'(w = 0)$.

Cada punto w es correspondiente de un único punto z; en cambio, a cada punto z corresponden dos puntos w diferentes. Así, por ejemplo, los puntos simétricos respecto del origen: $w_1(\varrho = 2,\ \theta = 30°)$ y $w_2(\varrho = 2,\ \theta = 210°)$ son correspondientes de un mismo punto: $z(r = 4,\ \varphi = 60°)$.

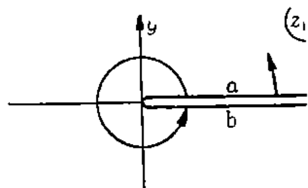


Fig. 428a.

Como en § 116-1, también ahora se pueden utilizar las ventajas de la uniformidad, mediante el plano múltiple de RIEMANN, que en este caso constará de dos hojas.

Imaginemos que una semirrecta del plano $w = u + iv$ gire alrededor del origen, partiendo de una posición inicial coincidente con el semieje de las u positivas (que llamamos a'); la semirrecta homóloga del plano $z = x + iy$ girará alrededor de O, iniciando su giro en la posición a, coincidente con el semieje de las x positivas (fig. 428a). Cuando la semirrecta móvil del plano w haya girado $\pi/4$, su homóloga del plano z habrá girado $\pi/2$; cuando la primera llegue a confundirse con el semieje posi-

tivo v, la segunda llegará a confundirse con el semieje negativo x; en fin, cuando la semirrecta del plano w haya descrito el semiplano $v > 0$, la homóloga habrá descrito ya todo el plano z (flechas simples de fig. 428c; y fig. 428a); y la posición b' de la primera será la correspondiente a la posición b. Obtenemos, pues, una correspondencia biunívoca y continua entre el semiplano superior $v > 0$ y el plano z, si efectuamos en éste un corte rectilíneo a lo largo del semieje $y = 0$, $x > 0$, considerando el borde a como homólogo del borde a' y el borde inferior b como homólogo del b'.

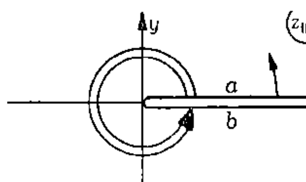


Fig. 428b.

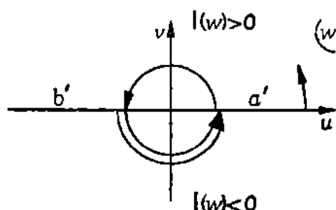


Fig. 428c.

Pero si el rayo generador del plano w sigue girando en sentido positivo y describe el semiplano inferior $v < 0$, desde la posición b' a la a', entonces, creciendo su argumento θ desde π a 2π, el argumento del rayo homólogo crece desde 2π a 4π, es decir, engendra de nuevo el plano z dando una segunda vuelta en torno de O (flechas dobles de fig. 428c; y fig. 428b). Esta segunda hoja engendrada, y que se corresponde biunívocamente con el semiplano $v \leqslant 0$, la hemos dibujado aparte (fig. 428b, z_{II}), para hacer más visibles sus relaciones; lo mismo que en la hoja I, es preciso considerar separadamente los dos bordes b y a inicial y final de esta hoja II que corresponden a los bordes b' y a' inicial y final del semiplano $v \leqslant 0$.

Construídas separadamente estas dos hojas, lograremos una correspondencia biunívoca y continua entre los puntos del plano completo w y del plano doble z, superponiendo la hoja I sobre la II y conectando los bordes que corresponden a una misma semirrecta del plano w, es decir, a con a y b con b, tal cual se indica en los cortes normales representados en la figura 429, en la cual se han separado algo las dos hojas superpuestas, para mostrar más claramente la contextura de este plano de dos hojas.

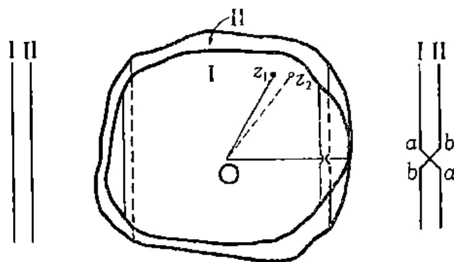


Fig. 429.

La correspondencia entre z y w es ya biunívoca, pues los puntos: $w_1(\rho = 2,\ \theta = 30°)$ y $w_2(\rho = 2,\ \theta = 210°)$ son correspondientes ahora de dos puntos superpuestos, pero en realidad diferentes: uno $z_1(r = 4,\ \varphi = 60°)$ situado en el plano I y el otro $z_2(r = 4,\ \varphi = 420°)$ situado por consiguiente en el plano II.

Al recorrer el punto w una curva cerrada que no corte a la semirrecta a', su homólogo z describe una curva cerrada contenida en una sola de las hojas y, por tanto, divide a la superficie de RIEMANN en dos porciones, una finita de una hoja y otra infinita de dos hojas.

Si w recorre una curva cerrada que contenga en su interior el origen, describe z una curva que da dos vueltas en torno de O, situada en ambas hojas, y que también divide a la superficie en dos porciones de dos hojas (cfr. § 116-4, nota 3).

b) Análogas consideraciones son aplicables a $w = \sqrt[n]{z}$, $n > 2$, pero ahora se tiene en lugar de [116-8]:

[116-9] $$\varrho = +\sqrt[n]{r} \quad , \quad \theta = \varphi / n \quad ,$$

y de la segunda de estas relaciones sigue como en *a*), que un rayo que parte de O′($w = 0$ y gira desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$, barriendo una vez todo el plano w, es homólogo de un rayo de origen O($z = 0$) que al girar desde $\varphi = 0$ hasta $\varphi = 2n\pi$ barre n veces el plano z. Entonces a un punto $z \neq 0$ del plano z corresponden n puntos del plano w; la unicidad se obtiene sólo con respecto a los puntos $P(z \mid k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ de un plano n-ple o de n hojas, donde se pasa de una hoja a la siguiente (módulo n, § 5-11) cada vez que se atraviesa en el sentido positivo de rotación una semirrecta (por ejemplo, $y = 0$, $x > 0$) de origen O($z = 0$).

NOTAS: 1. La topología de la superficie de RIEMANN de $\sqrt[n]{z}$ puede caracterizarse (§ 116-1, nota 2) como la más débil de las que hacen $\sqrt[n]{z}$ continua en la superficie de RIEMANN.

2. Los puntos $z = 0$ y $z = \infty$ del plano-esfera complejo z (§ 114-5) y sólo ellos son de ramificación (§ 116-1, nota 3) de la superficie de RIEMANN de $\sqrt[n]{z}$, que llamaremos *de orden* $n - 1$ por corresponder a n hojas *, y de *ramificación simple* para $\sqrt{z}$.

3. El corte a través del cual se pasa de una hoja a otra puede ser una curva simple cualquiera C que una los puntos de ramificación $z = 0$, $z = \infty$ (cfr. § 116-1, nota 4). C define la delimitación de hojas.

3. **Función de Joukowski** $z = \frac{1}{2}[w + (1/w)]$. — Éste es uno de los ejemplos más sencillos de función racional no lineal, muy importante en Aerodinámica **.

La función está definida en todo el plano w, y es finita en él, excepto en los puntos 0 é ∞. La hemos escrito en la forma $z = f(w)$ porque habremos de considerar su función inversa, que es biforme, como resulta de la ecuación:

[116-10] $$w^2 - 2zw + 1 = 0 \quad ; \quad w = z \pm \sqrt{z^2 - 1} \quad ,$$

y solamente hay dos *puntos de ramificación* (comunes a las dos ramas de la superficie de RIEMANN; cfr. § 116-1, nota 3) $z = 1$ y $z = -1$, cada uno de los cuales tiene confundidos sus dos homólogos, por anular al discriminante $z^2 - 1$. Para cualquier otro punto z, resultan dos valores de w, recíprocos uno de otro, como resulta de la ecuación [116-10]; por tanto, uno de ellos es interior a la circunferencia $r = 1$ y otro exterior.

La correspondencia entre ambos planos se obtiene fácilmente observando que si es $w = \varrho e^{i\theta}$, resulta:

* Algunos autores, en especial alemanes, llaman de orden n al punto de ramificación de n hojas.

** A una circunferencia C del plano w que pase por $w = -1$ y contenga al punto $w = 1$ en su interior, corresponde en el plano z una curva en forma de ala, llamada *perfil de* JOUKOWSKI, de modo que se corresponden conformemente los exteriores. Para las distintas circunferencias C en las condiciones dichas, se tiene una familia de perfiles de JOUKOWSKI de donde puede elegirse uno que represente exacta o aproximadamente un ala dada, y utilizarlo en los problemas prácticos que plantea el estudio del flujo de aire a su alrededor.

$$z = x + iy = \frac{1}{2}\left[\varrho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) + \frac{1}{\varrho}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)\right],$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)\cos\theta \quad , \quad y = \frac{1}{2}\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)\text{sen}\,\theta.$$

Cada circunferencia $\varrho = \text{const.}$ del plano w corresponde a la elipse:

[116-11] $$\frac{x^2}{\left(\dfrac{\varrho^2+1}{2\varrho}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{\varrho^2-1}{2\varrho}\right)^2} = 1.$$

A cada rayo $\theta = \text{constante}$, corresponde la hipérbola:

[116-12] $$\frac{x^2}{\cos^2\theta} - \frac{y^2}{\text{sen}^2\,\theta} = 1.$$

Cada par de circunferencias concéntricas, cuyos radios sean números recíprocos ϱ y $1/\varrho$, dan como transformada la misma elipse [116-11]; y a la circunferencia $\sigma = 1$ corresponde como elipse límite el segmento $(-1, +1)$, en el cual habrá que considerar dos bordes; correspondiendo al inferior a la semicircunferencia superior a' y al borde superior b la semicircunferencia inferior b'. Si efectuamos en el plano z un corte a lo largo de este segmento $(-1, +1)$ (fig. 430), obtenemos una correspondencia biunívoca y continua con los puntos del círculo de radio 1. Puesto que cada dos puntos inversos w y $1/w$ tienen el mismo homólogo, resulta análogamente el plano z, con el mismo corte $(-1, +1)$, como transformado del recinto infinito exterior a dicho círculo; correspondiendo al borde superior a la semicircunferencia superior a' y al inferior b la inferior b'.

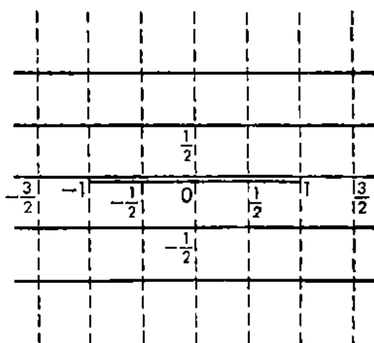


Fig. 430.

Uniendo estas dos hojas idénticas, de igual modo que lo están las dos regiones del plano w, es decir, a con a y b con b, obtenemos un plano doble, que es la superficie de RIEMANN correspondiente a la función estudiada.

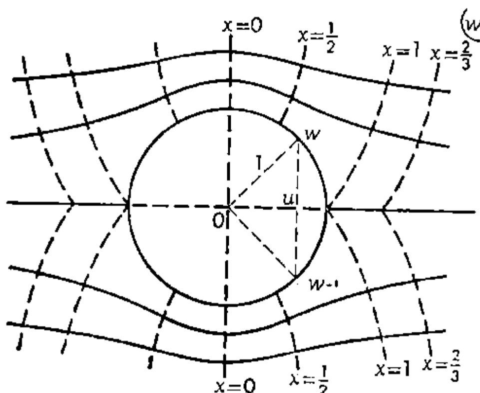


Fig. 431.

Dibuje el lector el retículo polar del plano w y su homólogo, como acabamos de indicar, pues en la figura se ha adoptado el cartesiano, que interesa más en Mecánica de flúidos. Las líneas $y = \text{constante}$ son *líneas de corriente* de un flúido que se desliza paralelamente con un cilindro circular sumergido en él; las líneas $x = \text{constante}$ se llaman *equipotenciales*; en los puntos $w = \pm 1$ en que se anula la derivada, la velocidad es nula y se llaman *puntos de remanso* (fig. 431).

4. Caso general. — Aunque sale del plan general de este libro el estudio sistemático de planos riemannianos, procuremos siquiera sacar algunas consecuencias de estos ejemplos, aplicables a otros. Si $z = \mathrm{f}(w)$ es uniforme, hemos visto en § 114-2, *b*, que los únicos puntos regulares w tales que en la proximidad de su homólogo la función inversa puede dejar de ser uniforme, son aquellos w_0 que anulan a la derivada, es decir, las raíces de la ecuación $\mathrm{f}'(w) = 0$. El punto $z_0 = \mathrm{f}(w_0)$ que tiene al menos dos valores homólogos confundidos en w_0 se llama *punto de ramificación* en el plano z, y son justamente tales puntos aquellos en que se ramifican las diversas hojas del plano múltiple extendido sobre el plano z, o en que se confunden diversas ramas de la función inversa.

Así, en la función w^2 su derivada tiene la sola raíz $w = 0$ y el único punto *propio* de ramificación es el $z = 0$ (cfr. § 116-2, nota).

Para la función de JOUKOWSKI (§ 116-3), su derivada es $1 - (1/w^2)$, que se anula en los puntos $w = \pm 1$ y los correspondientes de ramificación son los $z = \pm 1$. Las dos hojas del plano doble deben cruzarse por una línea trazada entre ambos (por ejemplo, el segmento que los une), como indica la figura 430, donde solamente se ha dibujado una hoja y el recinto homólogo del plano w. La otra hoja, con el mismo reticulado, corresponde al círculo $|w| \leqslant 1$.

La derivada de e^w no se anula para ningún valor propio, pero cada punto z que tiende a 0, ó bien a ∞, tiene sus infinitos logaritmos que tienden a confundirse con el punto $w = \infty$ en uno u otro sentido, y por eso las infinitas hojas se han conectado en una línea que une el punto $z = 0$ con el $z = \infty$.

Definida la función analítica completa (§ 115-12) a partir de un elemento uniforme, la unicidad de la prolongación a lo largo de una misma sucesión de recintos rampantes (por ejemplo, cadena de círculos), no obsta para que los valores alcanzados a lo largo de dos caminos distintos puedan ser diferentes y aún más que el punto final del plano z se presente como regular a lo largo de un camino y como singular de otro; también puede decirse que la prolongación de la función a lo largo de una curva cerrada que empiece y acabe en z_0 puede dar al final un elemento de función en z_0 (acaso ni existente) que no coincida con el primitivo.

EJEMPLO. La función $w = \sqrt{\ln z}$ tiene sus ramas definidas por

$$w = \pm \sqrt{\mathrm{Ln} z + i(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi)} \quad , \quad -\pi < \mathrm{Arg}\, z \leqslant \pi \quad ;$$

el punto $z = 1$ no es regular para ninguna de las dos ramas correspondientes a $k = 0$, pero sí para todas las demás.

NOTAS: 1. El conjunto de elementos a los que se llega en z partiendo de z_0, cualquiera que sea el camino de z_0 a z a lo largo del cual la

función es prolongable, se demuestra que, a lo más, es infinito-numerable (POINCARÉ-VOLTERRA).

2. Puede conseguirse una *uniformación local* alrededor de los puntos de ramificación a de n hojas por el cambio de variable $z - a = t^n$. En el caso de que la función uniforme $t^m f(a + t^n)$ (con m número natural) sea regular en $t = 0$, se dirá que a es un *punto algebraico* o *singularidad algebraica* de $f(z)$. Si el punto de ramificación es de orden infinito, se obtiene una representación uniforme mediante $t = \ln(z - a)$, de modo que $f(a + e^t)$ sea uniforme en el entorno de a; se dice entonces que el punto a es una *singularidad logarítmica* de $f(z)$. El problema mucho más delicado de la uniformación global fué atacado en el siglo XIX por KLEIN y POINCARÉ, y posteriormente por KOEBE.

3. Las superficies de RIEMANN tienen propiedades topológicas esencialmente diferentes a las del simple plano-esfera. Así, en ellas puede no cumplirse el teorema de JORDAN sobre las dos regiones que separa toda curva simple cerrada. Por ejemplo, la superficie de RIEMANN de dos hojas correspondiente a la función.

$$w = \sqrt{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)}$$

tiene los 4 puntos de ramificación a_i; una curva cerrada C contenida por completo en la hoja superior y que encierre sólo los puntos a_1 y a_2 no divide a la superficie en dos regiones; pues dos puntos z_0 y z_1 que en la hoja superior son interior y exterior a C, pueden unirse por un camino (fig. 432) que *no atraviese* a C valiéndose de los cortes para pasar a la hoja inferior (donde el camino se ha dibujado a trazos).

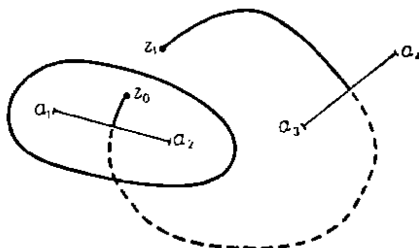


Fig. 432.

EJERCICIOS

1. Partiendo de las fórmulas de EULER (§ 45-3, *b*), obtener las siguientes expresiones de las funciones circulares inversas:

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{i}{2} \ln \frac{i + z}{i - z};$$

$$\operatorname{arc\,sen} z = i \,.\, \ln(\sqrt{1 - z^2} - iz).$$

2. Deducir del ejercicio 1 los infinitos valores de cada una de las dos funciones $\operatorname{arc\,tg} z$, $\operatorname{arc\,sen} z$.

3. Dibujar en los planos z, w, los reticulados definidos por las fórmulas [116-11] y [116-12] en que se descompone en coordenadas polares la función de JOUKOWSKY, y construir en el plano z las transformadas de curvas dadas sobre el plano w por ecuaciones polares.

§ 117. SINGULARIDADES

1. Puntos singulares aislados. — *a*) *Singularidades evitables.* — De igual modo que en el campo real se completa la definición de una función en un punto a con el verdadero valor, cuando existe límite para $x \to a$, se dice que la singularidad del punto a es evitable cuando, completando la definición de $f(z)$ en él, se hace regular en el mismo. También aquí aparece una vez más la diferencia esencial ya señalada; mientras la acotación de $f(x)$ no basta para la existencia de límite y, aún existiendo éste, solamente se logra la continuidad (aunque exista derivada en los restantes puntos), en cambio basta exigir la regularidad y la acotación de la función $f(z)$ en el entorno reducido (es decir, excluído a) para asegurar la regularidad en a, o sea, la existencia de límite o verdadero valor, y la monogeneidad en él (WEIERSTRASS, 1841; RIEMANN, 1851).

En efecto, aplicando el mismo artificio que en § 115-7, si C es una circunferencia que contiene en su interior el punto a, c otra de centro z y radio r; y α otra de centro a y radio ϱ, ambas exteriores entre sí y contenidas dentro de C (fig. 433), se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f(t)}{t-z}\,dt.$$

El primer sumando vale $f(z)$ como vimos en § 115-7, y el segundo es en valor absoluto menor que

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{K2\pi\varrho}{d} = \frac{K}{d}\,\varrho \quad ,$$

si es $\quad |t-z| > d, \quad |f(z)| < K,$

luego, es un número arbitrariamente pequeño, que debe ser nulo, pues el primer miembro es constante; la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt = f(z) \quad ,$$

Fig. 433.

expresa, pues, el valor de $f(z)$ en todo punto interior a C, distinto de a; pero según § 115-8 esta integral es también regular en el punto a, luego la función dada $f(z)$ queda completada con su verdadero valor, que viene dado por dicha integral, poniendo $z = a$.

Si $f(z)$ es regular en el entorno del punto $z = \infty$, es decir, para $|z| > R$, y está acotada en ese entorno, haciendo el cambio de variable $z = 1/\zeta$, la nueva función $f(1/\zeta)$ es regular y acotada en el entorno del punto $\zeta = 0$, luego tiene verdadero valor en él; por tanto, es finito el $\lim f(z) = k$, el cual asignaremos a $f(z)$ en el punto ∞ escribiendo $f(\infty) = k$, notación legítima como ya hemos justificado en § 114-5. La función

$f(z)$ se dice regular en el punto ∞, cuando la $f(1/\zeta)$ lo es en 0.

b) *Clasificación de los puntos singulares aislados.* — Se llama así todo punto en que $f(z)$ no es regular, siéndolo en cambio en un entorno reducido de dicho punto. Sea el punto a propio o impropio, es decir, sea el valor complejo finito o infinito, caben solamente tres casos:

1º) Existe $\lim f(z) = k$ finito para $z \to a$ (singularidad *evitable*, ver *a*).

2º) Existe $\lim f(z) = \infty$ para $z \to a$ (singularidad *polar*).

3º) No existe límite finito ni infinito para $z \to a$ (singularidad *esencial*).

Si la singularidad en a es polar, este punto propio o impropio se llama *polo*, y como la función $1/f(z)$ tiene límite nulo para $z \to a$, el verdadero valor de $f(z)$ es ∞.

Aunque la función $f(z)$ no esté definida en un punto a, si su límite es 0 y se completa con este verdadero valor, es a un cero (§ 115-11) de $f(z)$. Por tanto:

Los ceros de $f(z)$ *son polos de* $1/f(z)$ *y recíprocamente.*

Si los puntos w se representan sobre la esfera, quedan equiparados los ceros y los polos z, puesto que a cada uno le corresponde un punto bien determinado en dicha esfera. Por esta razón, las verdaderas singularidades son las del tercer tipo, y por ello se llaman esenciales. Una función se dirá *regular esféricamente* en un recinto si en él es regular o, a lo más, tiene polos.

De § 115-11, teor. 4, resulta: *Si* $f(z) \not\equiv 0$, *todo punto de acumulación de ceros es singular esencial.*

Si a es tal punto de acumulación de ceros y, por tanto, límite de una sucesión de ceros a_r, no puede ser polo, por la definición; tampoco punto regular, pues entonces sería $f(a) = \lim f(a_r) = 0$ y resultaría cero no aislado, luego $f(z) \equiv 0$.

Resulta, pues, que la existencia de infinitos ceros implica la de algún punto singular esencial propio o ∞, pues el teorema de Bolzano (§ 64-4, nota 3) vale también en el plano-esfera complejo. Lo mismo sucede si hay infinitos *puntos de nivel*, esto es, soluciones de la ecuación $f(z) = k$, o sea, ceros de la función $f(z) - k$.

Si a es singular esencial, la función $f(z)$ no está acotada en su entorno, es decir, toma valores arbitrariamente grandes; pues de lo contrario, sería la singularidad evitable en virtud del teorema de Weierstrass-Riemann (*a*) ; y no solamente se acerca indefinidamente al valor ∞ en el entorno de a, sino también a cada valor finito k; pues si fuese $|f(z) - k| > h$ en todo un entorno de a, la función $1/[f(z) - k]$, acotada superiormente, tendría límite finito para $z \to a$; si este límite fuese nulo, sería a polo de $f(z) - k$ y también de $f(z)$; si el

límite fuese distinto de 0, sería a punto regular de $f(z) - k$ y, por tanto, de $f(z)$. Resulta así el llamado teorema de CASSORATI - WEIERSTRASS:

En cada entorno de un punto singular esencial se aproxima $f(z)$ *indefinidamente a cada valor complejo, finito o infinito.* (WEIERSTRASS, 1876).

NOTA. El siguiente criterio es de gran aplicación práctica para conocer la naturaleza de un punto z_0 respecto de una función que se sepa es regular en un entorno reducido de z_0: Dado un valor c, si es $\lim f(z) = c$ para $z \to z_0$, la función es regular y tiene un punto c en z_0, (a); si existe un entorno de c *fuera* del cual caigan todos los valores de $f(z)$ correspondientes a los puntos de un entorno de z_0, el punto z_0 es regular y en él la función *no toma* el valor c; si no se da ninguna de ambas condiciones el punto z_0 es singular esencial. Dicho criterio aplicado a $c = \infty$ constituye el teorema de WEIERSTRASS-RIEMANN (a).

Aún más, si $|z - z_0|^k |f(z)|$ se conserva acotado cuando $z \to z_0$ (bastando que ocurra ello sobre una sucesión de circunferencias $|z - z_0| = r_n$ con $r_n \to 0$), entonces el punto z_0 es, a lo más, un polo de orden k. En particular, para $z_0 = \infty$ se tiene la siguiente generalización del teorema de LIOUVILLE: *Si la función entera* $f(z)$ *es tal que* $|f(z)/z^k|$ *se conserva acotado para* $z \to \infty$ *(bastado que ello ocurra sobre una sucesión de circunferencias cuyo radio* $\to \infty$*), entonces* $f(z)$ *se reduce a un polinomio de grado* $\leqslant k$.

EJEMPLOS: 1. La función $w = z$ es regular en todo el plano excepto el punto ∞, que es polo.

2. La función $1/z$ es regular en todo el plano, incluso en el punto ∞, que es su único cero, y excluído el punto $z = 0$ que es polo.

3. Una función racional $P(z)/Q(z)$ es *regular* en todo el plano, excepto en los ceros de $Q(z)$ que son *polos* de ella; el punto $z = \infty$ es *regular* si el grado de P no supera al de Q, pues entonces hay límite finito (en particular ∞ es un cero si el grado de P es menor que el de Q); y dicho punto ∞ es *polo* de la función si el grado de P supera al de Q, pues entonces el límite es infinito.

4. La función e^z es *entera*, es decir, regular en todo el plano; pero ∞ es singular esencial. Si $z \to \infty$ en la dirección $+x$, resulta límite $+\infty$; en la dirección $-x$, resulta límite 0; en la dirección $+y$ la función $e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ carece de límite y toma todos los valores de módulo 1.

2. **Clasificación de las funciones por sus singularidades.** — Se llaman *enteras* las funciones regulares en todo plano propio; tales son los polinomios (funciones algebraicas enteras), que tienen como polo el punto ∞, y, en general, las definidas por series de radio infinito; pronto veremos (§ 118-2) que este algoritmo expresa todas las funciones enteras; si la serie no se reduce a un polinomio, el punto ∞ es singular esencial y la función se llama *trascendente entera*.

Las funciones racionales no enteras tienen polos finitos, por el teorema fundamental del Álgebra (§ 18-1), y el punto ∞ es regular o polo, según sean los grados de numerador y denominador (§ 117-1, ej. 3; cfr. § 118-2).

Si f(z) no tiene otras singularidades finitas que polos (pudiendo ser esencial el punto ∞), se llama *meromorfa*. En general suele llamarse *meroforma en un dominio,* si en él carece de puntos singulares esenciales; y si también carece de polos, es decir, si es regular (§ 114-3), se dice que es *holomorfa* (cfr. § 115-12).

Si la función no es uniforme, se presentan, además, los *puntos de ramificación* que ya hemos considerado en § 116.

EJEMPLOS: 1. Son trascendentes enteras: e^z, e^{-z}, e^{iz}, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, pues vienen definidas por series de radio ∞ y, como hemos visto en § 117-1, ejemplo 4, carecen de límite para $z \to \infty$.

2. Las funciones $(\operatorname{sen} z)/z$ y $z/(\operatorname{sen} z)$ son también enteras, pues en el punto $z = 0$, único que anula al denominador, existe el verdadero valor 1, por definición de derivada.

3. La función $\operatorname{cotg} z$ tiene como polos los ceros de $\operatorname{sen} z$, es decir, $\pm n\pi$, por ser ceros de la recíproca $\operatorname{tg} z$. Viceversa, los polos de ésta son los ceros de $\operatorname{cotg} z$, o sea, los de $\cos z$, que son $(\pm n + \frac{1}{2})\pi$. Ambas funciones son meromorfas.

4. Más general: el cociente de dos funciones enteras $P(z)/Q(z)$ es una función regular en los puntos que no anulan al denominador, pues tiene derivada finita, que se puede calcular por la regla del cociente; los ceros de $Q(z)$ que no lo sean de $P(z)$ son polos de cociente, por ser ceros de la recíproca. El cociente es, por tanto, una función meromorfa; y puede ser entera, como en el ejemplo 2.

NOTA. En cada polo simple a, el residuo (§ 115-6) se calcula por la misma regla dada en § 115-6, *b*), para el cociente de polinomios, esto es: $P(a)/Q'(a)$, como el lector puede deducir de la fórmula de CAUCHY (§ 115-7). Por ejemplo, el residuo en el punto $n\pi$ de la función $\operatorname{cotg} z$ es $\cos n\pi/\cos n\pi = 1$ y el de $\operatorname{cosec} z$ es $1/\cos n\pi = (-1)^n$.

3. **Residuo de la derivada logarítmica.** — Se dice que el punto a es polo de *orden* m cuando (§ 117-1, *b*) es cero de orden m en la función $1/\mathrm{f}(z)$, es decir, cuando se verifica en todo un entorno de a:

$$[117\text{-}1] \qquad \mathrm{f}(z) = (z - a)^{-m}\,\varphi(z) \quad , \qquad [a \text{ regular, pero no cero de } \varphi(z)]\,.$$

Se pueden considerar, pues, los polos, como ceros de orden negativo.

Sea m positivo o negativo; tomando logaritmos en [117-1] y derivando después, resulta en todo punto $z \neq a$ de un entorno de a:

$$[117\text{-}2] \qquad \ln \mathrm{f}(z) = m \ln(z - a) + \ln \varphi(z) \quad ,$$

$$\frac{\mathrm{f}'(z)}{\mathrm{f}(z)} = \frac{m}{z - a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,.$$

Como $\varphi(a)$ es finito no nulo, resulta:

a) Todo cero y todo polo de f(z) *es polo de primer orden de la derivada logarítmica y el residuo en él es su orden, si*

se conviene en asignar a los polos orden negativo. Por tanto,

$$[117\text{-}3] \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P \quad ,$$

si es N el número de ceros y P el de polos, entendiendo que se cuentan los interiores a C, y cada uno con su orden positivo.

La primitiva de la derivada logarítmica es $\ln f(z)$ y su incremento al recorrer z la curva C es el incremento de $i \cdot \arg w$, luego, el primer miembro de [117-3] es el número de vueltas que da w alrededor del origen al recorrer z el circuito C; resulta así este teorema, que generaliza otro de Álgebra (§ 41-3, nota):

b) El número de vueltas que el punto w da en torno del origen al recorrer z un circuito C, *es el número de ceros de* $f(z)$ *menos el número de polos interiores a* C.

En particular, si $f(z)$ es regular, se tiene el número de ceros; y por fraccionamiento del recinto se pueden separar y calcular éstos por método geométrico, pero no existe un algoritmo que permita determinar el número de vueltas, como se hizo en Álgebra.

4. **Teorema de Picard y direcciones J, de Julia.** — Según el teorema de WEIERSTRASS (§ 117-1, *b*), en el entorno de cada punto singular esencial se aproxima $f(z)$ indefinidamente a todo valor finito, y también a ∞; pero en el ejemplo e^z, vemos que no solamente se aproxima en cada entorno del punto $z = \infty$ a cualquier valor, sino que los toma todos, excepto el 0 y el ∞. En efecto, será $e^z = a$ en los infinitos puntos:

$$\ln a = \ln |a| + i(\operatorname{Arg} a + 2k\pi) \quad , \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

PICARD logró demostrar que esta propiedad es general para toda función *meromorfa*; es decir, si $f(z)$ es regular esféricamente en todo el plano, con el punto ∞ singular esencial, toma en cada entorno de él todos los valores, excepto a lo sumo dos.

Más general: *Si el punto z_0 es singular esencial y en un entorno no existen otros puntos singulares esenciales (aunque puede haber polos), la función toma en cada entorno de z infinitas veces cada valor, finito e infinito, excepto a lo sumo dos.* (PICARD, 1879).

En particular, si $f(z)$ es holomorfa en el entorno del punto singular esencial, tiene a lo sumo un valor excepcional finito. Así, una función *trascendente entera* (que en el plano propio ya nunca alcanza el valor ∞) toma en cada entorno del punto ∞ todos los valores *finitos*, excepto a lo sumo *uno*.

Este teorema, que completa brillantemente el de WEIERSTRASS, ha dado origen a copiosa literatura e impulsado el progreso de la teoría de funciones.

Observemos en la función e^z que los infinitos puntos z en que la función toma un valor prefijado, se alejan infinitamente en sentido vertical; de modo tal, que si se toma un entorno angular del semieje $y > 0$ o bien $y < 0$, en cada uno de estos ángulos toma w todos los valores finitos excepto uno. En cambio, si se toma el entorno angular de otra recta (por ejemplo del semieje $x > 0$ ó del $x < 0$) en él no tiene w la misma propiedad. Las semirrectas que parten de un punto singular esencial y tienen esa propiedad de que en cada entorno angular suyo toma la función *holomorfa* $f(z)$ todos los valores excepto a lo más uno finito, se llaman *direcciones* de JULIA ó J, y su estudio iniciado por este insigne analista francés en 1924, ha perfeccionado el teorema de PICARD, demostrando que toda trascendente entera tiene al menos una dirección J.

La función exponencial tiene, pues, dos de tales direcciones, que son las de los semiejes $y > 0$, $y < 0$.

NOTA. El caso de las funciones *meromorfas* ha sido completamente estudiado por OSTROWSKI. Si éstas son de *género positivo* (§ 118-5, *b*), admiten también, al menos, una semirrecta J tal que en un ángulo de abertura arbitrariamente pequeña, bisecado por J, la función meromorfa toma una infinidad de veces todo valor finito o infinito, salvo a lo más dos valores excepcionales. Pero ahora *el teorema deja de cumplirse para ciertas funciones meromorfas de género cero* cuyos polos y ceros verifican condiciones particulares de regularidad.

EJERCICIOS

1. Probar que si $f(z)$ tiene en un recinto limitado por una curva simple cerrada C un solo cero simple a y es regular en C y su interior, aquel cero está dado por

$$a = \frac{1}{2\pi i}\int_C z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

2. Generalizar el teorema sobre el residuo de la derivada logarítmica (§ 117-3) en la siguiente forma: *Si* $\varphi(z)$ *es analítica en el dominio cerrado limitado por una curva regular simple y cerrada* Γ, *y* $f(z)$, *regular esféricamente* (§ 117-1, *b*) *en el mismo dominio, tiene en él sus ceros en* $a_1, a_2, \ldots, a_N$ *y sus polos en* $b_1, b_2, \ldots, b_P$, *se tiene*:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(t)\,\frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \sum_{n=1}^{N}\varphi(a_n) - \sum_{p=1}^{P}\varphi(b_p).$$

3. Mediante el cálculo del residuo de la derivada logarítmica (§ 117-3), demostrar el siguiente *teorema de* ROUCHÉ: *Si* $f(z)$ *y* $\varphi(z)$ *son regulares en un contorno simple cerrado* C *y su interior* G, *y* $|\varphi(z)| < |f(z)|$ *en* C, *el número* N_1 *de ceros de* $f(z)$ *en* G *es igual al número* N_2 *de ceros de* $f(z)+\varphi(z)$ *en* G.

4. Aplicando el teorema de ROUCHÉ (ejercicio 3) a las funciones $f(z)=a_0z^n$, $\varphi(z)=a_1z^{n-1}+a_2n^{n-2}+\ldots+a_n$, demostrar que $f(z)+ + \varphi(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ tiene exactamente n ceros (contando cada uno con su orden) en $|z|<R$ si R es suficientemente grande (*teorema fundamental del Álgebra*).

5. Utilizando el teorema de ROUCHÉ (ejercicio 3) demostrar el siguiente *teorema de* HURWITZ: *Sea* $f_n(z)$ *una sucesión de funciones regulares en un recinto* G, *uniformemente convergente en* G *hacia una función* $f(z)$ (regular por § 115-9, teor. 2) *no idénticamente nula. Un punto* $z_0 \in G$ *es cero de* $f(z)$ *si y sólo si es punto límite de ceros de las funciones* $f_n(z)$, *considerando también puntos límites a los que son ceros de infinitas* $f_n(z)$.

Por tanto, el conjunto de los ceros de una serie de potencias en el interior del círculo de convergencia, coincide con el conjunto de los puntos de acumulación de los ceros de las sumas parciales.

6. Diremos que una función $F(z)$ es *univalente* cuando de $z_1 \neq z_2$ sigue $F(z_1) \neq F(z_2)$. Mediante el teorema de HURWITZ (ejercicio 5) demostrar que: *Si* $f_n(z)$ *es una sucesión de funciones regulares, uniformes y univalentes en un recinto* G, *que converge hacia una función* $f(z)$, *no constante, uniformemente en todo dominio cerrado contenido en* G, *entonces es* $f(z)$ *univalente en* G.

§ 118. Desarrollos indefinidos y aplicaciones

1. **Desarrollo de Laurent.** — Cuando el dominio de regularidad de f(z) es anular, la integral de CAUCHY que expresa f(z) en él, se desdobla así:

$$[118\text{-}1]\quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)}{t-z}\,dt \quad ,$$

tomando c en sentido positivo.

Consideremos separadamente las funciones:

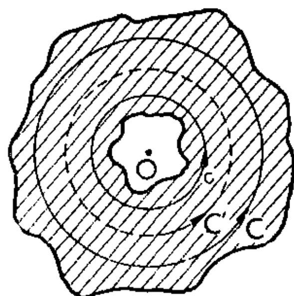


Fig. 434.

$$[118\text{-}2]\quad f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt,$$

$$[118\text{-}3]\quad f_2(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)}{t-z}\,dt.$$

Como f(t) es continua en C, es $f_1(z)$ holomorfa en el interior de C, y análogamente es holomorfa $f_2(z)$ en el exterior de c.

Supongamos ahora que el recinto contenga un anillo $r < |z| < R$, y adoptemos sus circunferencias como contornos c y C de integración (fig. 434). Según § 115-9, teor. 1, la función $f_1(z)$ admite un desarrollo en serie entera, válido en todo el círculo C:

$$[118\text{-}4]\quad f_1(z) = \sum_0^\infty a_n z^n, \quad \text{con} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t^{n+1}}\,dt \quad ,$$

y análogamente, partiendo de la identidad

$$[118\text{-}5]\quad -\frac{1}{t-z} = \frac{1}{z} + \frac{t}{z^2} + \ldots + \frac{t^{n-1}}{z^n} + \frac{t^n}{z^n(z-t)} \quad ,$$

que resulta de [115-26] permutando t con z, se demuestra:

Toda función

$$F(z) = \int_\tau \frac{f(t)}{t-z}\,dt$$

expresada por una integral de tipo CAUCHY (§ 115-8) *es desarrollable en serie de potencias de exponentes negativos*

$$[118\text{-}6]\quad F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} z^{-m} \quad \text{con} \quad a_{-m} = -\int_\tau f(t)\, t^{m-1}\,dt \quad ,$$

convergente en el exterior del mínimo círculo de centro O *que contiene el arco* τ *de integración.*

Multiplicando [118-5] por $f(t)$ e integrando sobre el arco τ resulta

[118-7] $$F(z) = a_{-1}z^{-1} + \dots + a_{-n}z^{-n} + T_{-n}(z) \quad ,$$

siendo $a_{-1}, \dots, a_{-n}$ dadas por [118-6] y

[118-8] $$T_{-n} = \int_{\tau} \frac{f(t)t^n}{z^n(t-z)}\,dt \quad ,$$

luego si z es exterior al círculo $R = \text{máx}\,|t|$, las acotaciones hechas en § 115-10 se cambian así (fig. 435):

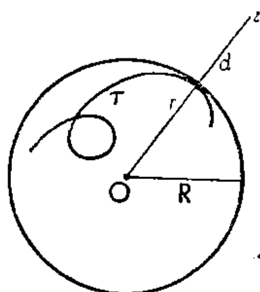


Fig. 435.

$$r = |z| = R + d, \quad |t| \leqslant R, \quad |t-z| \geqslant d,$$

y el módulo del integrando de [118-8] es inferior a $(R^n/r^n)(M/d)$, que tiende a cero para $n \to \infty$, por ser $R/r < 1$.

Aplicando [118-6] y [118-3] resulta

[118-9] $$f_2(z) = \sum_1^{\infty} a_{-m}z^{-m} \quad \text{con}$$

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(t)t^{m-1}\,dt \quad ,$$

tomando c en sentido directo.

Como los desarrollos [118-4] y [118-9] valen respectivamente en el interior de C y en el exterior de c, en el interior de la corona cC valen ambos, y resulta el *desarrollo de* LAURENT (1843):

[118-10] $$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n + \sum_1^{\infty} a_{-m}z^{-m}, \quad \text{o bien:} \quad f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

cuyos coeficientes a_n, a_{-m} se calculan separadamente por las fórmulas [118-4], [118-9], o bien todos ellos por la fórmula [118-4], dando a n todos los valores enteros, incluso negativos, y tomando c como circuito para calcular estos coeficientes de índice negativo a_{-n}; o para ambos una circunferencia concéntrica C′ de la corona.

Si el anillo tiene centro b, el desarrollo de LAURENT adopta la forma:

[118-11] $$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n(z-b)^n + \sum_1^{\infty} a_{-m}(z-b)^{-m} \quad ,$$

con

[118-12] $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{(t-b)^{n+1}}\,dt \quad ,$$

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(t)(t-b)^{m-1}\,dt \quad ,$$

observándose que la fórmula de a_n vale también para índices negativos, a condición de integrar sobre c, en lugar de C, en sentido positivo respecto de b, o en ambas sobre C′.

2. **Aplicación a los puntos singulares aislados.** — La aplicación más importante es la expresión de f(z) en el entorno de un punto singular aislado; en este caso, puede tomarse el radio r arbitrariamente pequeño, y como los coeficientes a_{-m} son independientes de r, pues al disminuir éste las integrales [118-12] no varían, por la regularidad del integrando entre cada dos circunferencias, el desarrollo [118-11] vale para todos los puntos de un cierto entorno reducido de b, de modo que su parte descendente, llamada también *parte principal* del desarrollo [118-11], permite caracterizar la singularidad de b. En efecto, si la parte descendente no existe, resulta b regular. Más general: si los coeficientes a_{-m} son nulos desde uno en adelante, es decir, si la parte descendente o parte principal se reduce a un polinomio de grado k, es b polo de orden k; y recíprocamente, si un punto b es polo de orden k, o sea, si f(z) es cociente por $(z-b)^k$ de una función regular y no nula, simplificando resulta un desarrollo de aquel tipo; por ejemplo, si $z=0$ es polo de orden 2, se tiene:

$$\mathrm{f}(z) = \frac{c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots}{z^2} =$$

$$= \frac{c_0}{z^2} + \frac{c_1}{z} + c_2 + c_3 z + c_4 z^2 + \ldots$$

Caracterizados así puntos regulares y polos, resulta caracterizado, por exclusión, el punto singular esencial aislado, por ser una serie de infinitos términos no nulos la parte descendente del desarrollo de LAURENT en ese punto.

NOTAS: 1. El desarrollo en el entorno del punto ∞ se forma poniendo $z = 1/\zeta$ y, aplicando las fórmulas anteriores a la función obtenida, resulta, al restituir la variable z, un desarrollo cuya parte entera es de uno de estos tipos:

constante	polinomio de grado $k > 0$	serie
(∞ regular)	(∞ polo de orden k)	(∞ singular esencial)

es decir, se obtiene el mismo criterio antedicho para los puntos propios, pero mediante la parte ascendente (ahora llamada *principal*) y no la descendente, que ahora no interesa, pues define una función regular en ∞.

2. No se crea que la parte ascendente o entera del desarrollo en el punto 0 indica la naturaleza del punto ∞, pues aquel desarrollo solamente vale en un círculo que no tenga otro punto singular; y solamente será válido en todo el plano cuando la función tenga un solo punto singular finito, caso único, en que permite caracterizar a la par éste y el ∞, como acontece en el siguiente ejemplo 1, pero no en el ejemplo 2.

3. *Funcionalmente* se definen las funciones *racionales* como las funciones uniformes que son regulares esféricamente en todo el plano-esfera (incluso en el ∞), es decir, pueden tener a lo más polos. Éstos se darán en número finito (§ 117-1, b, y teor. de BOLZANO), y entonces por aplicación del desarrollo de LAURENT es inmediato ver que una función racional en el sentido funcional anterior puede expresarse siempre mediante

el cociente de dos polinomios (definición *aritmética*), que recíprocamente sabemos ya (§ 117-2) es racional en sentido funcional.

Por esto, si una función entera (§ 117-2) tiene en el infinito un polo, se llama *racional entera* y se reduce a un polinomio.

La propiedad fundamental de las funciones racionales viene dada por el teorema siguiente: *Una función regular esféricamente en todo el plano-esfera, que no se reduce a una constante, ha de tomar forzosamente todos los valores, tanto los propios como el impropio.*

Este teorema, aplicado a los valores propios, es el fundamental del Álgebra (§ 18-1); aplicado al valor impropio es el llamado teorema de Liouville (§ 114-7).

Ejemplos: 1. Sean las funciones:

$$\frac{z^3-z^2-1}{z} = z^2 - z - \frac{1}{z}\ ,\qquad \frac{z^2+2z-1}{z^4} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^4}\,.$$

El origen es polo de primer orden en la primera función, y de cuarto en la otra; ∞ es polo de segundo orden en la primera, por ser de segundo grado el polinomio componente, y es regular en la segunda, por no existir parte entera en el desarrollo. Los restantes puntos del plano son regulares.

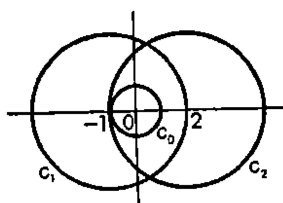


Fig. 436.

2. La función

$$\frac{3}{z^2-z-2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1},$$

tiene los siguientes desarrollos:

$$z = 0,\quad w = -\frac{3}{2} + \frac{3}{4}z - \frac{9}{8}z^2 + \dots \qquad (R=1)$$

$$z = -1,\quad w = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(z+1) - \frac{1}{3^3}(z+1)^2 - \dots - \frac{1}{z+1}\ ;\quad (R=3)$$

$$z = 2,\quad w = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}(z-2) + \frac{1}{3^3}(z-2)^2 + \dots + \frac{1}{z-2}\ ;\quad (R=3)$$

$$z = \infty,\quad w = \frac{3}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{9}{z^4} + \frac{15}{z^5} + \dots \qquad (R=2)$$

El 1º vale dentro de c_0 (fig. 436), el 2º dentro de c_1, y el 3º dentro de c_2 y el 4º fuera de la circunferencia, $|z| = 2$.

3. **Series de polinomios.** — Siendo las potencias sucesivas z^n las más sencillas funciones enteras, ocurre considerar como inmediatas a las series de potencias las series de polinomios de grados crecientes; pero conviene saber que las sencillas propiedades de las series de potencias, en que radica su utilidad, no subsisten. Consideremos, por ejemplo, la serie geométrica formada por las potencias sucesivas de z; basta multiplicar sus términos por el binomio $1-z$, para que la serie de binomios así obtenida:

$$(1-z) + (1-z)z + (1-z)z^2 + \dots$$

ofrezca novedades extrañas. La suma de esta serie es evidentemente igual a 1 para todo z interior al círculo unitario; pero haciendo $z=1$, resulta suma nula. He aquí, pues, una función discontinua en el punto $z=1$.

Consideremos ahora el desarrollo binómico:

$$(1-u)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 - \dots$$

que define una de las dos ramas de la función biforme: la que vale 1 en el origen. Sustituyendo $u = 1 - z^2$ resulta la serie:

$$1 - \frac{1}{2}(1 - z^2) - \ldots,$$

convergente para $|1 - z^2| < 1$.

Este campo está limitado por la curva $|(z-1)(z+1)| = 1$ que es una lemniscata (fig. 437). En el óvalo de la derecha, este desarrollo coincide con la función z; mientras que en el óvalo de la izquierda coincide con la función $-z$.

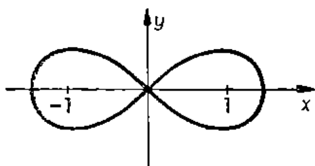


Fig. 437.

No es extraña esta duplicidad, pues cada serie de polinomios define funciones distintas en los diversos recintos que forman su campo de convergencia.

Tomando un número suficiente de términos, se forma un polinomio $P_n(z)$ que difiere arbitrariamente poco de z en el óvalo de la derecha y, en cambio, en el otro se aproxima a $-z$.

Si consideramos solamente valores reales, la serie anterior es el desarrollo de la función $|x|$, y estos polinomios se aproximan a ella indefinidamente. Obsérvese la gráfica de $|x + a| - |x - a|$ y dedúzcase la aproximación de toda función poligonal por polinomios. De aquí, resulta la *aproximación de toda función continua por polinomios* (WEIERSTRASS).

Como ejemplo de la fuerza de expansión de un método, citaremos la generalización que APPELL ha realizado de los desarrollos de TAYLOR y LAURENT aplicados a un recinto R cuyo contorno está formado por un número finito cualquiera de arcos de circunferencia o de circunferencias enteras (fig. 438).

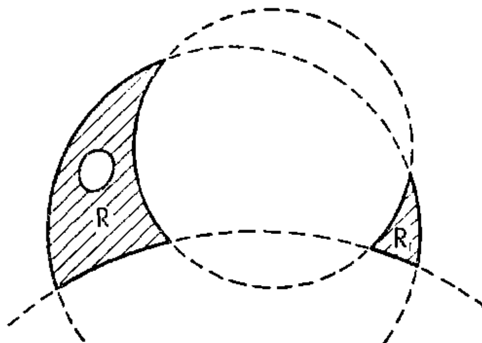


Fig. 438.

El desarrollo de una función holomorfa en dicho recinto R se obtiene descomponiendo la fórmula de la integral de CAUCHY en sumandos extendidos a lo largo de cada uno de los arcos de circunferencia o circunferencias enteras que forman el contorno de R y será la suma de series de potencias positivas o negativas según convenga para que converjan dentro o fuera de las circunferencias que limitan el recinto R considerado; dichas potencias se refieren a los centros de las respectivas circunferencias.

El desarrollo obtenido será también convergente en las partes comunes a todas las regiones de convergencia de las series parciales obtenidas, pero la suma en dichas partes comunes, tal como R_1, exteriores al recinto R considerado (es decir, al que se refieren los coeficientes del desarrollo obtenibles mediante integrales extendidas a los arcos que limitan R), ya no representará la función dada, aunque ésta también esté definida en ellas; por el teorema fundamental de CAUCHY (§ 115-2, *c*) aplicado a la integral que da origen al desarrollo anterior, dicha suma en R_1 será nula. He aquí otro ejemplo de una misma expresión analítica, en este caso una

serie, que representa en recintos sin puntos comunes dos funciones *distintas* (§ 115-12).

Dicho método ha sido aún aplicado por PAINLEVÉ para obtener resultados más generales; así, sea un contorno simple cerrado C, formado por una curva con tangente continua, tal que ésta tenga común con C solamente el punto de contacto (caso particular de curva *convexa*); entonces, puede hacerse corresponder a cada punto t de C un punto $\alpha(t)$, en que α es función continua de t, tal que existe un círculo de centro α tangente a C en t y conteniendo a C en su interior; si ahora damos una función $f(z)$ holomorfa en el interior de C y continua sobre C, entonces para todo punto z interior a C se verifica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{[z-\alpha(t)]^n}{[t-\alpha(t)]^{n+1}} f(t)\,dt \quad ,$$

donde la serie es uniformemente convergente en todo dominio contenido en el interior de C, con términos que son polinomios $P_n(z)$ de grado n a lo más.

Más en general, puede demostrarse que toda función holomorfa en un recinto simplemente conexo R es desarrollable en una serie de polinomios que sea uniformemente convergente en todo dominio parte de R; si la función dada es continua en el contorno de R, puede conseguirse que la serie de polinomios converja uniformemente en el dominio $\overline{R}$ clausura de R. Este teorema sólo puede aplicarse a recintos simplemente conexos, porque si una serie de funciones holomorfas converge uniformemente sobre un contorno simple cerrado, también converge uniformemente en su interior (§ 115-9, nota 2, teor. 2). G. FABER ha demostrado que a cada uno de tipos muy generales de recintos simplemente conexos se le puede asignar una sucesión de polinomios $P_n(z)$ tal que toda función holomorfa en el recinto sea suma de una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$, donde sólo los coeficientes a_n dependen de la particular función que se considere; por ejemplo, para recintos circulares de centro el origen se toma $P_n(z) = z^n$, obteniéndose el desarrollo de TAYLOR.

La representación de la función por series de polinomios no es unívoca y en las aplicaciones se emplean, bien los *polinomios de interpolación*, tales que tomen en puntos dados los mismos valores que la función (hipótesis aplicable asimismo a las derivadas), bien los *polinomios de aproximación*, para los que sea mínima la máxima separación de sus valores respecto de los de la función, separación posiblemente expresada en distintas formas. Toda esta cuestión está también íntimamente ligada a métodos diversos de prolongación analítica (§ 115-12).

4. **Desarrollo en fracciones simples.** — *a*) Toda función racional admite una descomposición en fracciones simples (§ 46-4) de la forma $a_{-m}(z-b)^{-m}$ que pone de manifiesto sus polos y las partes principales (§ 118-2) correspondientes. Así, para la función racional $f(z)$ de polos $b_1, b_2, \ldots, b_k$ con partes principales respectivas

$$G_i\left(\frac{1}{z-b_i}\right) = \frac{a_{-1}^{(i)}}{z-b_i} + \frac{a_{-2}^{(i)}}{(z-b_i)^2} + \cdots + \frac{a_{-r_i}^{(i)}}{(z-b_i)^{r_i}} \quad ,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k) \quad ,$$

resulta ser $f(z) - \sum_{i=1}^{k} G_i[1/(z-b_i)]$ un polinomio, pues es holomorfa en todo el plano propio, con un polo, a lo más, en el infinito. Por otra parte, si se da arbitrariamente un número finito de polos con sus respectivas partes principales, existen siempre funciones racionales que tienen éstos y sólo éstos polos con las respectivas partes principales, fun-

ciones que difieren entre sí únicamente en un sumando que es una función racional entera arbitraria.

La generalización de esta propiedad a las funciones meromorfas trascendentes ha sido hecha por WEIERSTRASS, así como el caso de infinitas singularidades esenciales aisladas en el plano propio, ha sido estudiado con otras generalizaciones por MITTAG-LEFFLER.

Dada en el plano la sucesión de puntos

[118-13] $$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

tal que el punto ∞ sea su único posible punto de acumulación, ordenada en forma que $|b_n| \leqslant |b_{n+1}|$, hagámosle corresponder una sucesión de funciones enteras, racionales o trascendentes:

[118-14] $$G_0(z),\ G_1(z),\ G_2(z),\ \ldots,\ G_n(z),\ \ldots;$$

entonces, se llama *problema de* MITTAG-LEFFLER, el de construir una función analítica uniforme, holomorfa en todo el plano, excepto en los puntos [118-13] y en el infinito, tal que en $z = b_n$ tenga singularidades aisladas de partes principales respectivas dadas por $G_n[1/(z - b_n)]$.

La dificultad del problema consiste en que, aun cuando se trate de polos, es decir, todas las $G_n(z)$ sean racionales, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} G_n[1/(z - b_n)]$ será en general divergente. Para soslayar esto se modifican sus sumandos en la siguiente forma: Se toma arbitrariamente una sucesión de números positivos $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n,\ \ldots$ tal que $\sum\varepsilon_n$ sea convergente (por ejemplo, $\varepsilon_n = 1/2^n$) y si $|b_1| > 0$, se desarrolla

[118-15] $$G_n[1/(z - b_n)] = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + \ldots + a_m^{(n)} z^m + \ldots, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

convergente en $|z| < |b_n|$; fijado un número positivo $\theta < 1$, se puede siempre determinar un entero $q^{(n)}$ tal que en todo el círculo $|z| < \theta |b_n|$ sea

$$|a_{q^{(n)}+1}^{(n)} z^{q^{(n)}+1} + a_{q^{(n)}+2}^{(n)} z^{q^{(n)}+2} + \ldots| < \varepsilon_n \quad ;$$

así la serie de sumandos

[118-16] $$F_n(z) = G_n[1/(z - b_n)] - a_0^{(n)} - a_1^{(n)} z - \ldots - a_{q^{(n)}}^{(n)} z^{q^{(n)}}$$

a partir de $n = k + 1$ en adelante, resulta *uniforme y absolutamente convergente* en todo círculo $|z| \leqslant R$ que deje fuera los puntos singulares desde el b_{k+1} en adelante; como para $k \to \infty$ puede hacerse $R \to \infty$, resulta que la función

[118-17] $$F(z) = G_0[1/(z - b_0)] + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(z)$$

es la solución del problema de MITTAG-LEFFLER. Se incluye en el segundo miembro de [118-17] el primer sumando por el posible caso de que sea $b_0 = 0$. La solución más general del problema se obtiene añadiendo al segundo miembro de [118-17] una función entera arbitraria; recíprocamente, una función *previamente dada*, que tenga por únicas singularidades las determinadas por [118-13] y [118-14], diferirá de la función construída en [118-17] sólo en una cierta función entera.

Si las funciones [118-14] son racionales enteras (polinomios) estaremos en el caso particular de las funciones meromorfas. Más en particular, *si los puntos* [118-13] *son polos simples de residuo* 1 *tales que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} [1/|b_n|^{p+1}]$ *sea convergente*, bastará que en [118-16] se tome $q^{(n)} = p - 1$, para dar

[118-18] $$F(z) = \frac{1}{z - b_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - b_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{z}{b_n^2} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{b_n^p} \right)$$

como solución del problema de MITTAG-LEFFLER.

b) La obtención práctica del desarrollo de MITTAG-LEFFLER aplicado a una función meromorfa *dada*, aparte de su falta de unicidad, tropieza con la difícil determinación del sumando constituído por la función entera desconocida. Mucho antes de que se obtuviesen los resultados generales anteriores, se conocía el *método de* CAUCHY fundado en la teoría de residuos para desarrollar en fracciones simples una función meromorfa que cumpla hipótesis restrictivas de carácter muy general.

Sea la función meromorfa $f(z)$, cuyos polos forman la sucesión

[118-19] $$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

con el único punto de acumulación en el infinito, tales que

$$0 < |b_1| \leqslant |b_2| \leqslant \ldots \leqslant |b_n| \leqslant \ldots$$

y cuyas respectivas partes principales se representen por $G_n[1/(z-b_n)]$; supongamos que sea posible escoger una sucesión de contornos simples cerrados $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ alrededor del origen, cuya mínima distancia a éste sea $R_n \to \infty$ y tengan la respectiva longiutd L_n, de modo que no pasen por ninguno de los polos y cumplan:

1º) Existe un número positivo M independiente de n tal que $|f(z)| < M$ para z tomado sobre C_n;

2º) Se conserva la razón $L_n/R_n < L$ fijo, independiente de n; entonces, si s_k es el residuo de $f(z)/k$ respecto del polo b_k, es válido en todo el plano propio el desarrollo:

[118-20] $$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ G_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right) + s_k \right\}.$$

En particular, si los polos b_k son simples, con residuos r_k, será $s_k = r_k/b_k$ y queda:

[118-21] $$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \left[\frac{1}{z-b_k} + \frac{1}{b_k}\right].$$

En efecto, si z no es un polo, como los únicos polos del integrando son los polos de $f(z)$ y el punto z, tendremos (§ 118-1):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = f(z) - \sum_{C_n} G_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right),$$

donde la suma se extiende a todos los polos b_k interiores a C_n. Por otra parte, supuesta $f(z)$ regular en el origen, es:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f(t)}{t}\,dt + \frac{z}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f(t)}{t(t-z)}\,dt =$$

$$= f(0) + \sum_{C_n} s_k + \frac{z}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f(t)}{t(t-z)}\,dt.$$

Para $R_n > 2|z|$, es (§ 115-5):

$$\left|\int_{C_n} \frac{f(t)}{t(t-z)}\,dt\right| < \frac{M}{R_n \cdot \frac{1}{2}R_n} L_n < \frac{2ML}{R_n} \to 0$$

para $n \to \infty$, por lo que restando las dos igualdades anteriores sigue:

$$0 = f(z) - f(0) - \lim_{n\to\infty} \sum_{C_n} \left[G_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right) + s_k \right]$$

que es la [118-20].

NOTAS: 1. Si en lugar de la condición $|f(z)| < M$, se tiene la condición $|z^{-p} f(z)| < M$, donde M es independiente de n cuando z está sobre C_n y p es un número natural, se habría de calcular

$$\int_{C_n} \frac{f(t)}{t-z}\, dt$$

mediante el desarrollo

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \frac{z^2}{t^3} + \dots + \frac{z^{p+1}}{t^{p+1}(t-z)}$$

y en lugar de [118-20] resultaría

[118-22] $$f(z) = \sum_{q=0}^{p} \frac{z^q f^{(q)}(0)}{q!} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[G_k\left(\frac{1}{z-b_k}\right) + s_k^{(0)} + s_k^{(1)} z + \dots + s_k^{(p)} z^p \right],$$

si $s_k^{(q-1)}$ es el residuo de $f(z)/z^q$ relativo al polo b_k. En particular, si los polos b_k son *simples*, con residuos r_k, será $s_k^{(q-1)} = r_k/b_k^q$ y queda

[118-23] $$f(z) = \sum_{q=0}^{p} \frac{z^q f^{(q)}(0)}{q!} + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \left[\frac{1}{z-b_k} + \frac{1}{b_k} + \frac{z}{b_k^2} + \dots + \frac{z^p}{b_k^{p+1}} \right].$$

2. Si en [118-21] los polos simples son $\pm b_k$, simétricos respecto del origen, con el mismo residuo r_k, asociando los respectivos sumandos se anulan los términos $\pm 1/b_k$ generadores de convergencia y queda sencillamente

[118-24] $$f(z) = f(0) + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k}{z^2 - b_k^2},$$

donde cada término se refiere a un par de polos simétricos; sin embargo, podría diverger $\sum_{k=1}^{\infty} [r_k/(z-b_k)]$ al suprimir el sumando r_k/b_k generador de convergencia.

EJEMPLO. Las funciones impares $\operatorname{cosec} z$ y $\operatorname{cotg} z$ tienen los polos simples $\pm n\pi$ y eligiendo $d = \pi/2$ se ve fácilmente que están acotadas en C, luego es aplicable el desarrollo [118-24] y resulta (cfr. § 45, ejerc. 3), respectivamente, para todo z no múltiplo de π:

[118-25] $$\begin{cases} \operatorname{cosec} z = \dfrac{1}{z} + 2z \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2\pi^2}, \\ \operatorname{cotg} z = \dfrac{1}{z} + 2z \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}. \end{cases}$$

Si queremos que figuren las fracciones simples correspondientes a los polos por separado y no tomadas a pares simétricos, bastará aplicar [118-21], obteniéndose:

[118-26] $$\begin{cases} \operatorname{cosec} z = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (-1)^n \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right); \\ \operatorname{cotg} z = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right), \end{cases}$$

donde el acento indica la omisión del término correspondiente a $n = 0$. Ambas sumas serían divergentes (§ 22-2, b_2) si suprimiéramos de ellas el sumando $1/(n\pi)$ generador de convergencia.

5. **Productos infinitos.** — Desarrollar una función en producto infinito equivale, en virtud de Cap. XI, nota III, d_1, a desarrollar en serie su logaritmo. He aquí una aplicación importante:

La serie $\sum \frac{-2z}{n^2\pi^2 - z^2}$ que figura en la segunda [118-25] es absolutamente convergente en todo punto z no múltiplo de π, pues llamando R al mayor módulo de z en un arco, el denominador se conserva mayor que $n^2\pi^2 - R^2$, y como los términos son menores que una serie numérica convergente, resulta, por el criterio de la serie mayorante (§ 22-2, b), la convergencia uniforme en todo arco, e integrando entre 0 y z, como el numerador es la derivada del denominador, las primitivas son los logaritmos; y la primitiva de $\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}$ es $\ln \frac{\operatorname{sen} z}{z}$, que se anula para $z = 0$, luego resulta: $\ln \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \sum_1^\infty \ln \frac{n^2\pi^2 - z^2}{n^2\pi^2}$, de donde:

$$\text{[118-27]} \qquad \operatorname{sen} z = z \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

desarrollo válido en todo punto distinto de $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, ..., que generaliza la descomposición factorial de los polinomios y da la pauta para la teoría general de las funciones enteras.

Así también, el método de CAUCHY (§ 118-4, b) da lugar al desarrollo en producto infinito de una función entera que tenga ceros simples y para la que $|f'(z)/f(z)| < M$ sobre los C_n de dicho método, pues entonces $f'(z)/f(z)$ tendrá polos simples con residuo $+1$ en los ceros de $f(z)$. Por ejemplo, la segunda [118-26] da lugar a

$$\text{[118-28]} \qquad \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \prod_{n=1}^\infty \left\{\left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}}\right\}\left\{\left(1 + \frac{z}{n\pi}\right) e^{-\frac{z}{n\pi}}\right\},$$

donde no es posible prescindir de los factores $e^{\pm z/(n\pi)}$ para la convergencia incondicional del producto.

6. **Funciones enteras.** — a) Generalizando [118-27] y [118-28], veamos la expresión de una función entera (§ 117-2) $f(z)$ mediante sus ceros.

CASO 1º Si no existen, es decir, $f(z) \neq 0$ para todo z, es entera (§ 117-3) la derivada logarítmica $g'(z) = f'(z)/f(z)$, luego $f(z) = e^{g(z)}$, siendo $g(z)$ entera; y recíprocamente, para todo exponente $g(z)$, función entera, resulta una función entera sin ceros.

CASO 2º Si $f(z)$ tiene número *finito* de ceros, a_n, el producto $\prod[1 - (z/a_n)]$, donde cada factor se repite tantas veces como sea la multiplicidad de a_n, es una función entera con los mismos ceros de $f(z)$, luego, su cociente es una función entera sin ceros, y por tanto, es $f(z) = e^{g(z)} \prod[1 - (z/a_n)]$.

CASO 3º Si $f(z)$ tiene *sucesión* de ceros $a_n \to \infty$, los ordenaremos por módulos crecientes $0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \ldots (r_n = |a_n|)$ repitiendo cada uno m veces, si es m su orden de multiplicidad; y por la equivalencia, para $z \to 0$ de los infinitésimos:

[118-29] $$|\ln(1-v)| = \left| -v - \frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3} - \dots \right| = |v|(1+o) \sim |v|$$

la convergencia absoluta del producto infinito

$$\prod u_n = \prod (1-v_n) = \prod [1-(z/a_n)]$$

o de la serie $\sum \ln(1-v_n)$ es consecuencia (Cap. XI, nota III, *c*, *d*) de la convergencia absoluta de la serie $\sum' v_n$, es decir, de la hipótesis $\sum 1/r_n < \infty$. Tales funciones son las más sencillas, y se llaman de *género* 0; entre ellas están los polinomios.

En general: para obtener las expresiones llamadas *canónicas*, llamaremos *exponente entero* de $f(z)$ al entero *mínimo* p, tal que la serie $\sum 1/r_n^{p+1}$ *converge* (es decir, $\sum 1/r_n^p$ *diverge*); y para lograr la convergencia de la serie de logaritmos, basta que éstos sean equivalentes a $|v_n|^{p+1}$ en lugar de $|v_n|$. Se logra esta equivalencia agregando a cada binomio $1-v_n$ el factor

$$E_n(v) = \exp\left(v_n + \frac{v_n^2}{2} + \frac{v_n^3}{3} + \dots + \frac{v_n^p}{p} \right), \quad (\exp t = e^t),$$

pues

$$\ln u_n = \ln(1-v_n) + \ln E_n = -\frac{v_n^{p+1}}{p+1} - \dots$$

Siendo

$$(1-v_n)E_n \sim \frac{1}{p+1}|v_n|^{p+1} = \frac{r^{p+1}}{p+1} \cdot \frac{1}{r_n^{p+1}},$$

converge $\prod[1-(z/a_n)]E(z/a_n)$ para todo z. Este producto define, pues, una función *entera*, con los mismos ceros a_n de $f(z)$, y sus mismos órdenes de multiplicidad, luego, el cociente de ambas es una función entera sin ceros, es decir, una función del tipo $e^{g(z)}$, siendo g entera. Si es $f(0)=0$ el factor correspondiente a este cero *m*-ple es z^m, luego resultan estas dos expresiones de $f(z)$:

$$f(z) = Ae^{g(z)} \prod \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) E\left(\frac{z}{a_n}\right) \right\},$$
$$g(0) = 0, \quad A = f(0) \neq 0;$$
$$f(z) = Ae^{g(z)} z^m \prod \left\{ \frac{z}{a_n} E\left(\frac{z}{a_n}\right) \right\},$$
$$A = f^{(m)}(0)/m! \neq 0$$

En estas expresiones *canónicas* están incluídas las dadas en los casos 1º y 2º.

b) *Orden, género y tipo*. — El orden de crecimiento de $f(z)$ para $z \to \infty$, depende no solamente del factor exponencial, es decir, de $g(z)$, sino también de los factores exponenciales E, es decir, de la distribución de los ceros; y el estudio de este crecimiento es capítulo esencial de la teoría.

Orden ρ de $f(z)$ es el extremo inferior de los valores $k>0$, tales que $f(z) = O(e^{r^k})$. Son, pues, de orden $\rho = 0$ las funciones que se conservan inferiores a toda exponencial de exponente $r^k (k > 0)$. Tales son, por ejemplo, los polinomios y las funciones sin factor exponencial y con ceros de serie $\sum 1/r_n$ convergente $(p=0)$.

Son de orden 1 las importantes funciones e^{hz} (exponente $p=0$) y las $\operatorname{sen} hz$, $\cos hz$ (h real o imaginario), que son de exponente $p=1$; pues dicha serie, que es armónica, diverge, pero converge la serie de cuadrados. El hecho notable, de que haya sido posible la expresión fac-

torial [118-27] sin factores E, radica en haber agrupado los ceros por pares simétricos, notable ejemplo de hiperconvergencia o ampliación del campo de convergencia. Sin tal agrupación ordenados los ceros π, $-\pi$, 2π, -2π, ..., habría aparecido con cada binomio el factor $E_n = \exp[z/(\pm n\pi)]$.

Funciones de orden $\rho = 2$ son, por ejemplo, $\exp z^2$ sin ceros, y la función $\operatorname{sen} \pi z^2$ de ceros $\pm \sqrt{n}$ sin factor exponencial: en el primer caso el orden de crecimiento viene dado por la exponencial y en el segundo por los factores E_n, cuyos exponentes son $v + \frac{1}{2}v^2 (v = z/\sqrt{n})$. Aquí aparece clara la doble causa del crecimiento de $f(z)$, y la sencillez de resultados cuando el orden es *finito*, caso bien estudiado. HADAMARD demostró que el exponente debe ser un polinomio $Q(z)$; y si es q su grado, el mayor de los números p y q naturales, se llama *género* de $f(z)$.

Más importante para la determinación del orden es el *exponente* de $f(z)$; llamamos así al número *real* $\rho_1 \geqslant 0$, extremo inferior de los exponentes h que hacen convergente la serie $\sum 1/r_n{}^h$, siendo, por tanto: $p = [\rho_1] \leqslant \rho$ y el teorema fundamental expresa: *el orden* ρ *es el mayor de los números* ρ_1 *y* q. Resulta, pues, que el género es un entero comprendido entre $\rho - 1$ y ρ.

Dentro del orden ρ cabe afinar más la medida del crecimiento, con la acotación $|f(z)| < \exp(Ar^\rho)$; y el extremo inferior de tales números $A > 0$ se llama *tipo*. Así, por ejemplo, e^z es de orden 1, tipo 1; pero e^{2z}, del mismo orden 1, es de tipo 2.

c) *Funciones enteras de orden infinito.* — Es $\rho = \infty$ si $g(z)$ no es polinomio (trascendente entera como $\operatorname{sen} z$, e^z, ...) o no existe exponente de convergencia, es decir, divergen todas las series $\sum 1/r_n{}^p$ (por ejemplo, si los ceros son $\ln n$). Pocas propiedades se conocen de ellas, pero cabe demostrar el teorema general de WEIERSTRASS:

Dada un sucesión cualquiera $a_n \to \infty$, *existen funciones enteras que tienen estos ceros.* Basta, en efecto, elegir exponentes crecientes p_n que hagan convergente la serie. La sucesión más sencilla de exponentes es 1, 2, 3, ...; pues en el punto z desde un n es $r_n > 2|z|$ y la serie de potencias de $\frac{1}{2}$ es convergente. Basta modificar levemente el resto de la demostración dada, para extenderla a este caso general.

EJERCICIOS

1. 1º) El residuo en un punto singular aislado a es igual al coeficiente b_1 de $(z-a)^{-1}$ en el desarrollo de LAURENT [118-10], y si a es un *polo simple* es $b_1 = \lim_{z \to a} (z-a) . f(z)$; 2º) Hallar así los residuos de $z . e^{iz}/(z^2 + k^2)$ en sus polos.

2. Probar que si $f(z)$ es regular en $|z| \leqslant R$, y M es el máximo de $|f(z)|$ en $|z| = R$; *a*) Los coeficientes de $f(z) = \sum a_n z^n$ verifican $|a_n| \leqslant M/R^n$ (*acotación de* CAUCHY); *b*) Las derivadas en todo punto interior $|z| < R$ verifican $|f^{(n)}(z)| \leqslant n! RM/(R - |z|)^{n+1}$; *c*) De *a* deducir el teorema de LIOUVILLE (§ 114-7, *a*).

3. Demostrar el siguiente *teorema de* VIVANTI: "*Si* $f(z) = \sum a_n z^n$, *con* $a_n \geq 0$, *tiene radio de convergencia* R, *es* $z = R$ *singular*", aplicando las desigualdades evidentes

$$(*) \qquad |f^{(n)}(\tfrac{1}{2}Re^{i\varphi})| \leqslant f^{(n)}(\tfrac{1}{2}R), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

para comparar los desarrollos de centros $\frac{1}{2}R$ y $\frac{1}{2}Re^{i\varphi}$.

4. Si $f(z) = \sum_0^\infty z^{2^n}$ probar que $f(z) = z + f(z^2)$ y deducir entonces de ejercicio 3 que $|z| = 1$ es frontera natural (§ 115-12).

5. *a*) Si $f(z)$ tiene radio de convergencia $R=1$, y sus únicas singularidades en $|z|=1$ son polos simples, los coeficientes a_n son acotados; *b*) Si $R=1$ y las únicas singularidades en el contorno $|z|=1$ son polos de orden p como máximo, es $a_n = O(n^{p-1})$.

6. Aplicando el teorema de § 43-5, *b*, y la expresión de los coeficientes del desarrollo de TAYLOR por las derivadas, demostrar el siguiente *"teorema de las series dobles"* de WEIERSTRASS: *Si* $f_n(z) = \sum_r a_r^{(n)}(z-z_0)^r$, $(n=0,1,2,\ldots)$, *son analíticas por lo menos para* $|z-z_0|<R$ *y es* $F(z)=\sum_n f_n(z)$ *uniformemente convergente en* $|z-z_0|\leqslant r<R$, *entonces convergen las series* $\sum_n a_r^{(n)} = A_r$, $(r=0,1,2,\ldots)$ *y también* $\sum_r A_r(z-z_0)^r$ *por lo menos en* $|z-z_0|<r$, *con suma* $F(z)$.

7. Probar que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2z^2+4} :$$

1º) Es continua para z real; 2º) Tiene los infinitos polos $z = \pm 2i/n$ con el punto de acumulación $z=0$, que es entonces punto singular esencial.

8. Probar que $f(z) = \operatorname{cosec} z - (1/z) = (z - \operatorname{sen} z)/(z\,.\operatorname{sen} z)$; *a*) Tiene en $z=0$ una singularidad evitable con "verdadero valor" $f(0)=0$; *b*) Tiene en $z=n\pi$ un polo simple de residuo $(-1)^n$; *c*) Está acotada en el conjunto de los contornos de los cuadrados C_n de vértices $(n+\frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)\pi$.

9. Deducir de [118-25] los desarrollos siguientes:

$$a) \quad \operatorname{cosec} z = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z-n\pi} \text{ (valor principal)};$$

$$b) \quad \operatorname{cotg} z = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-n\pi} \text{ (valor principal)};$$

$$c) \quad \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6};$$

$$d) \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

10. Expresando $\cos z = \operatorname{sen} 2z/(2 \operatorname{sen} z)$ llegar al desarrollo:

$$\cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)\cdots$$

11. Deducir de [118-27] la fórmula de WALLIS (§ 53-3) poniendo $z=\pi/2$.

12. Demostrar que la adición de una constante a una función entera no modifica su orden.

13. Demostrar que toda función entera de orden finito no entero, tiene ceros.

14. *a*) Probar que toda función entera de orden finito no entero, toma todos los valores; *b*) Probar que toma cada valor infinitas veces.

NOTAS AL CAPÍTULO XXIX

I. Condiciones de monogeneidad. — Las ecuaciones características, que suelen llamarse de CAUCHY-RIEMANN, eran ya conocidas por D'ALEMBERT (1752), EULER (1777) y LAGRANGE (1783); pero su verdadero alcance ha sido aquilatado muy recientemente. Aún en libros modernísimos y rigurosos, como el de TITCHMARSH (citado en Cap. XI, nota IV, 3), se suponen *continuas* las cuatro derivadas en toda una región, para deducir la monogeneidad en ella, mediante tales ecuaciones; se reconoce, además, que la monogeneidad en un punto no resulta de ellas, pero sin dar las condiciones suficientes. El problema queda resuelto de la manera más simple y completa (§ 114-2, *a*) gracias al concepto de función diferenciable, debido a THOMAE (1875), cuyas ventajas evidentes no han bastado para vencer la inercia de los tratadistas, aunque VALLÉE-POUSSIN las puso de manifiesto. Carecería de interés averiguar quién haya sido el primero en imprimir el criterio de monogeneidad (§ 114-2), pero es seguro que muchos profesores lo habrán utilizado en sus cursos, como nosotros.

En la misma obra de TITCHMARSH se pone un ejemplo de función que satisface en el origen a las ecuaciones características, pero no es monógena en él; es la función $\exp(-z^{-4})$, que viene a la memoria de todo el que recuerda la de CAUCHY, $\exp(-z^{-2})$ (§ 38-5), la cual admite derivada en la dirección real, pero no en la perpendicular; es obvio que de este caso se pasa al de TITCHMARSH, y aún a cualquier otro de función derivable, no ya en dos, sino en varias direcciones, sin ser monógena en ese punto, pues basta transformar el exponente para fundir todas ellas en una sola dirección. Más interesante es el ejemplo que damos en § 114-2, ejemplo 4, donde existe derivada en *toda dirección*, sin ser la función monógena en el punto.

Muy distinto es el problema de la monogeneidad cuando ella no concierne a un punto dado sino a todos los de un recinto. Si se suponen continuas en un recinto G las funciones reales $u = \mathrm{u}(x, y)$, $v = \mathrm{v}(x, y)$, es suficiente (MONTEL, 1913) que existan las derivadas parciales y cumplan las ecuaciones características [114-7] (es decir, exista $\lim \Delta w/\Delta z$ según dos direcciones perpendiculares fijas) en el recinto G, salvo eventualmente un conjunto de medida nula (§ 82-2), para que, entonces, la función $w = \mathrm{f}(z)$, $(z = x + iy,\ w = u + iv)$ sea *regular* en G (y se verifiquen [114-7] para todos los puntos de G).

En las investigaciones más modernas juega un papel esencial la univalencia (una función se llama *univalente* en un recinto G si no toma el mismo valor en dos puntos distintos de G) y además se parte con frecuencia de la existencia de límite único del módulo o bien del argumento de $\Delta w/\Delta z$ en determinadas condiciones. Así, H. BOHR ha demostrado (1918) que *si* $w = \mathrm{f}(z)$ *es univalente en un recinto* G *y en cada punto de* G *existe* $\lim |\Delta w/\Delta z|$ *para* $\Delta z \to 0$ *de cualquier modo, entonces* $\mathrm{f}(z)$ *es regular en* G *o bien conjugada de una función regular en* G. Más generalmente, D. MENCHOFF (*Bull. Soc. Math. de France*, 1931) ha demostrado que *una función* $w = \mathrm{f}(z)$ *univalente en un recinto* G *es regular en* G *o conjugada de una función regular en* G *si una de las condiciones siguientes se verifica en todo punto de* G *salvo eventualmente un conjunto numerable*:

a [*b*]) $|\Delta w/\Delta z|$ [*o bien* $\arg \Delta w/\Delta z$] *tiende a un mismo límite cuando* $\Delta z \to 0$ *según tres direcciones* (*que pueden variar de un punto a otro, sin estar nunca dos sobre una recta*);

c) $\Delta w/\Delta z$ *tiende a un mismo límite cuando* $\Delta z \to 0$ *según dos direcciones.*

II. Movimiento plano estacionario irrotacional de flúidos incompresibles. — *a*) *Movimiento plano.* — El movimiento de un flúido en el espacio queda determinado desde el punto de vista *local* o *euleriano* (§ 93-2) por el campo vectorial de la velocidad en cada punto del espacio: $\mathbf{v} = \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}$. En general, estos vectores son funciones de (x, y, z, t), es decir, la velocidad de las diversas moléculas que pasan por cada punto varía con el tiempo; cuando la velocidad no depende del tiempo, el movimiento se llama estacionario (§ 91-2, nota 3), y las velocidades (ξ, η, ζ) forman un campo vectorial constante.

Se dice que el movimiento es *plano* según una cierta orientación, cuando adoptado el eje z perpendicular a ella, las componentes ξ, η de la velocidad son independientes de z, y además $\zeta = 0$. Es decir: todos los vectores representantes de las velocidades en los diversos puntos de la masa flúida, son paralelos al plano xy, y todos los puntos situados en cada recta paralela al eje z están animados de la misma velocidad en dirección y magnitud.

Para estudiar un movimiento plano bastará, pues, considerar un plano cualquiera paralelo al xy y las dos funciones $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ componentes de la velocidad. También es útil considerar dos planos paralelos al plano xy a la distancia 1 entre ellos; así, por ejemplo, llamaremos *flujo a través de una curva* del plano xy (o de un plano paralelo) a la cantidad de flúido que en la unidad de tiempo pasa entre aquellos dos planos paralelos, a través de la línea; dicho de otro modo, a través de la superficie cilíndrica normal a ambos planos y que tiene la curva como directriz. Como la altura del prisma líquido es 1, es indiferente medir el volumen del prisma, o el área de su base.

b) *Movimiento plano estacionario.* — Si el movimiento es estacionario (§ 91-2, nota 3), de la ecuación de continuidad de EULER [93-24], por ser $\partial\rho/\partial t = 0$, resulta $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$, y si el flúido es incompresible:

[XXIX-1] $$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0.$$

Además, las trayectorias seguidas por las partículas de flúido coinciden con las líneas de corriente (§ 91-2, nota 3), es decir, están caracterizadas por la propiedad de que en cada punto el vector velocidad es tangente a la curva, o sea, en todo punto ha de verificarse:

[XXIX-2] $$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}.$$

Si las funciones ξ, η fuesen conocidas, la integración de esta ecuación diferencial se haría fácilmente, pues, en virtud de [XXIX-1], la expresión $\xi\,dy - \eta\,dx$ es la diferencial exacta de una función $V(x, y)$ tal que

[XXIX-3] $$\partial V/\partial y = \xi \quad , \quad \partial V/\partial x = -\eta \quad ,$$

y siendo: $\xi\,dy - \eta\,dx = dV = 0$, la integral general de [XXIX-2] es $V(x, y) = \text{const.}$

Las líneas de corriente están, pues, dadas por la ecuación $V(x, y) = C$; y por tanto sobre el contorno que limita el movimiento del flúido debe ser $V = \text{const.}$

c) *Movimiento plano estacionario irrotacional.* — Si el movimiento es además irrotacional (§ 91-5), es decir, $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, o sea:

[XXIX-4] $$\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial x} \quad ,$$

entonces (§ 91-6, *e*) existe un *potencial de velocidades* $U = U(x, y)$ tal que

[XXIX-5] $$\frac{\partial U}{\partial x} = \xi \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \eta .$$

Las ecuaciones [XXIX-1] y [XXIX-4], escritas en la forma

[XXIX-6] $$\frac{\partial \xi}{\partial x} = - \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

no son sino las ecuaciones características (§ 114-1, *a*) para la monogeneidad de la función $\xi - i\eta = f(x + iy)$, y entonces (§ 114-3) las funciones η, ξ son armónicas conjugadas. En virtud de [XXIX-5] y [XXIX-3] determinan dos funciones U, V tales que:

[XXIX-7] $$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial V}{\partial x} \quad ,$$

es decir, también las funciones U y V son conjugadas, y componen la función analítica $U + iV$ de la variable compleja $x + iy$. En este hecho fundamental radica la aplicación de las funciones analíticas. Desde luego podemos establecer: *Las líneas equipotenciales* $U = const.$, *son ortogonales a las líneas de corriente* $V = const.$

Puesto que en cada línea de corriente es $V =$ const. y una función armónica en un recinto simplemente conexo se reduce a una constante si en su contorno tiene un valor fijo, resulta: *En un movimiento plano estacionario irrotacional, en un recinto simplemente conexo, las líneas de corriente no pueden ser cerradas.*

Por la misma razón, puesto que el contorno de un recipiente es línea de corriente, resulta: *En todo movimiento plano estacionario, en un recipiente simplemente conexo, existe algún torbellino.*

Finalmente, observando que el módulo de la velocidad es igual al módulo de la función analítica $\xi - i\eta$, del teorema del módulo máximo (§ 114-6) resulta éste de LORD KELVIN *: *La velocidad alcanza su mayor valor absoluto en puntos del contorno.*

Puesto que toda función analítica $f(z) = U + iV$ determina un par de funciones U, V que satisfacen a [XXIX-7] y de ellas se deducen por [XXIX-3] o bien por [XXIX-5] dos funciones ξ, η que cumplen las dos condiciones [XXIX-6] características del movimiento estacionario irrotacional, resulta un método sencillo para estudiar tipos de movimientos planos, partiendo de funciones analíticas cualesquiera; y como cada una determina dos pares de funciones armónicas conjugadas, que son U, V, y V, —U, obtenemos dos tipos distintos de movimientos, siendo las líneas de corriente en cada uno las curvas equipotenciales del otro.

d) *Ejemplo de movimiento estacionario.* — Como prototipo de este método vamos a estudiar el tipo de movimiento estacionario que corresponde a la función analítica:

$$f(z) = U + iV = kz + \frac{h}{z} \quad , \quad \text{siendo:} \quad (h > 0,\ k > 0).$$

Designando por r^2 el cociente $h:k$, la función puede escribirse así:

$$U + iV = k\left(z + \frac{r^2}{z} \right)$$

de donde resulta el par de funciones conjugadas:

[XXIX-8] $$U = k\left(x + \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} \right) \quad , \quad V = k\left(y - \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \right) .$$

* Son, pues, innecesarias las demostraciones de LORD KELVIN y KIRCHHOFF (no rigurosas) expuestas en LAMB: *Hydrodynamics* (citado en Cap. XXIII, nota V, 5).

Las curvas equipotenciales están definidas por la ecuación:

$$x(x^2 + y^2) + r^2x = C$$

y son cúbicas simétricas respecto del eje x. Las líneas de corriente tienen la ecuación:

$$y(x^2 + y^2 - r^2) = C$$

y son simétricas respecto del eje y, siendo curvas simétricas respecto del eje x las correspondientes a valores opuestos de C.

En particular, para $C = 0$, resulta la línea de corriente compuesta de:

$$y = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 = r^2$$

es decir, sigue el eje de las x, bifurcándose en dos ramas a uno y otro lado del círculo de radio r, que vuelven a unirse en el eje de las x.

Al crecer x positiva o negativamente, tiende y hacia el número $C:k$, es decir: las líneas de corriente tienden a ser paralelas al eje x, cuando se alejan del círculo. Al crecer C la curva tiende hacia la recta $y = C:k$, es decir: al alejarse del círculo en el sentido de las y, tienden a hacerse rectilíneas.

Vemos, pues, que la función estudiada representa el movimiento de un flúido en un canal muy ancho, en el que figura un cilindro circular vertical, de radio r muy pequeño respecto de la anchura del cauce.

El significado del parámetro k resulta inmediatamente calculando:

$$\text{[XXIX-9]} \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{\partial U}{\partial x} = k + \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, kr^2 \\[2ex] \eta = \dfrac{\partial U}{\partial y} \quad = - \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\, kr^2 \end{cases}$$

Para $x \to \infty$ resulta: $\lim \xi = k$, $\lim \eta = 0$; luego k mide la velocidad en cualquer punto suficientemente alejado del eje y.

III. **Demostración de Goursat del teorema de Cauchy.** — Sin suponer la continuidad de la derivada, vamos a demostrar que es nula la integral sobre todo circuito rectificable contenido en el recinto G simplemente conexo donde $f(z)$ es regular. Como el circuito se puede aproximar indefinidamente con poligonales de lados paralelos a los ejes, sin más que sustituir cada cuerda de una poligonal inscripta por sus dos segmentos componentes, bastará probar la anulación de la integral sobre tales poligonales y para ello será suficiente demostrarlo para cada contorno rectangular interior a G, pues cada poligonal de este tipo es suma de contornos rectangulares, positivos y negativos, de lados paralelos a los ejes *.

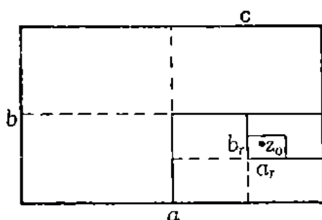


Fig. 439.

Consideremos, pues, un rectángulo de lados $a \geqslant b$ paralelos a los ejes (fig. 439), contenido en G y supongamos que la integral sobre su contorno sea $\int_C \neq 0$, es decir, tenga valor absoluto positivo. Multiplicando $f(z)$ por un factor positivo, podemos lograr que ese valor absoluto de la integral sea precisamente el área ab del rectángulo. Dividido en cuatro rectángulos iguales, como la suma de las integrales sobre sus contornos es $\int_C$, alguna de ellas debe ser en valor absoluto $\geqslant$ que el área

* Omitimos la demostración de esta propiedad netamente combinatoria, es decir, aritmética.

del correspondiente rectángulo, pues si las cuatro fueran menores, sería $|\int_0| < ab$, contra lo supuesto; fraccionando dicho rectángulo en cuatro y eligiendo uno en que subsista la propiedad de ser la integral $\geq$ que el área, y así prosiguiendo, queda determinado un punto z; donde, por definición de derivada, se verifica en todo un entorno del mismo para cada $\varepsilon > 0$:

$$(*) \qquad f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \delta(z - z_0); \qquad |\delta| < \varepsilon.$$

Sea c uno de los contornos rectangulares antes elegidos, interior a dicho entorno; por verificarse entonces (*) en c, despejando $f(z)$, la integral a lo largo de c se puede expresar así:

$$\int_c f(z)\,dz = f(z_0)\int_c dz + f'(z_0)\int_c (z - z_0)\,dz + \int_c \delta(z - z_0)\,dz \quad ;$$

los dos primeros sumandos son nulos por tener primitiva uniforme; para acotar el último basta observar que siendo z punto de contorno y z_0 interior al rectángulo $a_r b_r$ es $|z - z_0| < 2a_r$ y el perímetro es menor que $4a_r$, luego, dicha integral residual es menor que $\varepsilon \,.\, 2a_r \,.\, 4a_r$ y si se ha elegido

$$\varepsilon < \frac{1}{8} \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{8} \cdot \frac{b_r}{a_r} \quad ,$$

resulta:

$$\left| \int_c f(z)\,dz \right| < a_r b_r \quad ,$$

es decir, la integral de contorno es menor que el área, en contradicción con la selección hecha. No es posible, por tanto, que la integral sobre C sea distinta de 0, quedando así demostrado el teorema de CAUCHY.

IV. Monogeneidad y analiticidad. — El teorema 2 de § 115-10 es uno de los más bellos resultados del siglo XIX, por establecer equilibrio entre el campo de las funciones *analíticas* de LAGRANGE, sistematizado por WEIERSTRASS, y el de las *monógenas* de CAUCHY. El concepto de función *monógena* (en un recinto y por ende holomorfa en él) se basó desde entonces en la prolongación analítica mediante círculos, cuya superposición forma el campo de existencia, o campo *natural* de la función, con frontera que es imposible sobrepasar.

Desde su tesis de 1894 intentó BOREL afinar la prolongación analítica (§ 115-12) para *filtrar* la función a través de esa frontera, no por círculos, sino por rectas, en ciertos casos como el de las series $\sum k_n(z - a_n)$ de coeficientes k_n sumables absolutamente, cuando los puntos a_n forman conjunto denso sobre una curva finita —por ejemplo, los puntos de división de la circunferencia $|z| = 1$ en 2^m partes $(m = 2, 3, 4, \ldots)$—, caso en que no solamente todos los puntos a_n son singulares en $f(z)$, sino también todos los de la línea, mientras que a cada lado de ésta define la serie una función analítica; y, si la curva es cerrada, resultan tantas funciones como regiones del plano produzca. Sin embargo, logró BOREL transformar la serie en otra de polinomios, que no solamente converge a ambos lados de la línea, sino también en infinitas rectas que la atraviesan, realizando la filtración anunciada. Pero este resultado era solamente ensayo y comienzo de su futura teoría generalizada de las funciones monógenas, cuya esencia vamos a exponer, aunque todavía no ha pasado a los tratados *.

* Se evitará así una posible confusión en los alumnos mediocres, que al leer en algún autor francés la "diferencia esencial entre monogeneidad y analiticidad", comparen con el teorema de § 115-10 que expresa bien claramente dónde reside la diversidad de puntos de vista.

Sea D un dominio finito o infinito del plano complejo, y sea N una sucesión densa en una parte H de D (fig. 440). Si excluímos en D el interior de un círculo de centro a_1, en el recinto restante excluímos el interior de un círculo c_2 con centro en el primer punto de N interior, que numeraremos a_2; y así siguiendo se va numerando a_3, a_4, ..., al primer punto interior excluído por los círculos anteriores, excluyendo cada uno con un entorno circular situado en el recinto precedente, resulta un conjunto cerrado C, por ser complementario de un abierto dentro del dominio cerrado D. Si cada radio se elige no mayor que la mitad del anterior, y es r el primero, la suma total de radios es $\leqslant 2r$, luego, eligiendo r suficientemente pequeño, las proyecciones del sistema de círculos c_i según cualquier dirección del plano sobre un eje transverso tienen suma arbitrariamente pequeña y en cada intervalo $\geqslant \delta$ del eje hay trazas de rectas que no cortan a ningún círculo, es decir, situadas en el conjunto C. Parecería a la intuición que al suprimir todos los puntos de N, denso en H, suprimiendo con cada uno todo un entorno, no quedaría punto ninguno de H; y sin embargo queda un conjunto C, cerrado y conexo, con

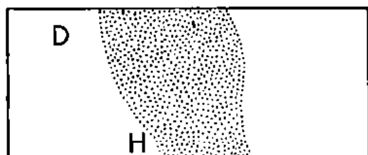


Fig. 440.

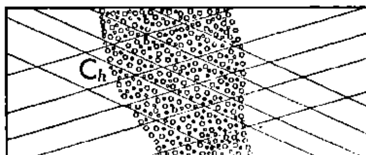


Fig. 441.

infinitas rectas en toda dirección, que pasan libremente entre los infinitos círculos, sin tocar a ninguno.

Ese amplio campo limitado por las infinitas circunferencias c_i se amplía todavía más dividiendo todos los radios por 2^h y resulta un campo $C_h > C$ (fig. 441). La suma de todos los C_h (o extremo superior o límite de ellos para $h \to \infty$) que a todos los contiene, es decir, el conjunto E de puntos que pertenecen a algún C_h y a todos los siguientes, fué designado por BOREL *dominio de* CAUCHY, y para distinguirlo del W de WEIERSTRASS, lo llamaremos *campo de monogeneidad* B, para evitar doble uso de la palabra dominio, no aplicable en este caso. La función f(z) se dirá *monógena* en E si es continua en E, es decir, en cada C_h, y admite en cada punto z de E derivada única, continua, hipótesis de las que se deducen los teoremas fundamentales de la teoría clásica y el desarrollo tayloriano, sobre cada recta de E.

V. Principio de acumulación de funciones analíticas. — *a) Teorema de* VITALI. — *Si la sucesión* $\{f_n(z)\}$, *de funciones regulares en un recinto* G *y acotadas en su conjunto en él:*

$$[\text{XXIX-10}] \qquad |f_n(z)| \leqslant M, \quad z \varepsilon G; \quad n = 1, 2, \ldots,$$

converge en un conjunto C *de puntos con un punto de acumulación* z_0 *interior a* G, *entonces* $\{f_n(z)\}$ *converge hacia una función* f(z) *uniformemente en todo dominio interior a* G. *Por tanto* (§ 115-9, teor. 2) *es* f(z) *regular en* G.

DEM. a_1) Basta considerar el caso en que G es un círculo y z_0 su centro, pues de él se pasa al caso general extendiendo el dominio de convergencia uniforme por un procedimiento análogo al de prolongación analítica (§ 115-12).

a_2) Sea R el radio del círculo. Como $f_n(z) - f_n(z_0)$ se anula en $z = z_0$ y además por [XXIX-10]:

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| \leqslant |f_n(z)| + |f_n(z_0)| \leqslant 2M \quad ,$$

el lema de SCHWARZ (§ 114-7) aplicado a $f_n(z) - f_n(z_0)$ como función de $z - z_0$, da:

[XXIX-11] $$|f_n(z) - f_n(z_0)| \leqslant 2M\,|z - z_0|/R.$$

Sea $z' \varepsilon C$ y $z' \neq z_0$. Se tiene:

$$|f_{n+p}(z_0) - f_n(z_0)| \leqslant |f_{n+p}(z_0) - f_{n+p}(z')| + |f_{n+p}(z') - f_n(z')| +$$
$$+ |f_n(z') - f_n(z_0)| \leqslant 4(M/R)\,|z' - z_0| + |f_{n+p}(z') - f_n(z')|.$$

Dado $\varepsilon > 0$ puede elegirse z' de modo que el primer término sea $< \varepsilon/2$ y fijado z' puede hallarse n_0 de modo que el segundo término sea $< \varepsilon/2$ para $n > n_0$, $(p > 0)$. Entonces $|f_{n+p}(z_0) - f_n(z_0)| < \varepsilon$ para $n + p > > n > n_0$, es decir, la sucesión $\{f_n(z_0)\}$ converge a un límite a_0. Poniendo

[XXIX-12] $$f_n(z) = a_{0,n} + a_{1,n}(z - z_0) + a_{2,n}(z - z_0)^2 + \dots \quad ,$$
$$|z - z_0| < R \quad ,$$

será entonces $\lim a_{0,n} = a_0$. Consideremos ahora la sucesión de funciones:

[XXIX-13] $$\varphi_n(z) = \frac{f_n(z) - a_{0,n}}{z - z_0} = a_{1,n} + a_{2,n}(z - z_0) + \dots$$

que también converge en z'. Además $|\varphi_n(z)| \leqslant 2M/R$ en $|z - z_0| = R$ y por tanto en $|z - z_0| \leqslant R$. Entonces la sucesión $\{\varphi_n(z)\}$ cumple, salvo el valor de la cota en [XXIX-10], las mismas condiciones que $\{f_n(z)\}$, y entonces existe $\lim a_{1,n} = a_1$. Sucesivamente se demuestra así que convergen todas las sucesiones

$$a_{k,1} \quad , \quad a_{k,2} \quad , \quad a_{k,3} \quad , \quad \dots \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Por la acotación de CAUCHY (§ 118, ejercicio 2) es $|a_{k,n}| \leqslant M/R^k$, y entonces la convergencia de [XXIX-12] es uniforme respecto de n y de z para $|z - z_0| < R - \varepsilon$. Finalmente, como cada término de [XXIX-12] tiende a un límite, la suma tiende a un límite uniformemente para $|z - z_0| < R - \varepsilon$, lo que demuestra el teorema.

b) *Principio de acumulación. — Si* $\{f_n(z)\}$ *es una sucesión de funciones regulares en un recinto* G *y acotadas en su conjunto en* G *por* [XXIX-10], *existe una sucesión contenida en ella* (§ 20-3) *que converge uniformemente en todo dominio interior a* G.

Sea $\{z_n\}$ una sucesión de puntos de G con un punto de acumulación interior a G. Como los puntos $w_n = f_n(z_1)$ pertenecen por [XXIX-10] al círculo $|w| \leqslant M$, tienen al menos un punto de acumulación, es decir, en la sucesión $\{f_n(z)\}$ está contenida otra $\{f_{n_i}(z)\}$ convergente en z_1. De $\{f_{n_i}(z)\}$ podemos extraer una sucesión parcial o contenida $\{f_{p_i}(z)\}$ convergente en z_2; de ésta, una sucesión parcial $\{f_{q_i}(z)\}$ convergente en z_3, etc. La "sucesión diagonal" $f_{n_1}(z)$, $f_{p_2}(z)$, $f_{q_3}(z)$, ..., está contenida en cada una de las anteriores y en consecuencia (§ 20-3) converge en todos los puntos z_n. Por el teorema de VITALI, esta sucesión diagonal converge en G, uniformemente en todo dominio interior a G.

c) *Si* $\{f_n(z)\}$ *es una sucesión de funciones regulares y univalentes en un recinto* G, *que converge uniformemente en todo dominio interior a* G, *entonces la función límite* f(z) *es también monovalente, o bien se reduce a una constante.*

La posibilidad de que la función límite sea constante resulta del ejemplo $f_n(z) = z/n$. Si no fuera ese el caso y además hubiera en G

dos puntos distintos z_1 y z_2 tales que $f(z_1) = f(z_2) = \alpha$, bastaría aplicar a la sucesión $\{f_n(z) - \alpha\}$ el teorema de HURWITZ (§ 117, ejercicio 5) para tener una contradicción.

VI. Representación conforme. — *a*) TEOREMA DE RIEMANN. — *Dado un recinto simplemente conexo* R *con dos puntos de contorno por lo menos, existen infinitas funciones analíticas regulares en todo él, que lo transforman biunívoca y conformemente en un círculo. Cada función está determinada dando tres puntos* A, B, C *del contorno con sus tres homólogos* A', B', C' *en la circunferencia, de modo que* ABC *y* A'B'C' *determinen el mismo sentido de recorrido sobre ambos contornos, o bien dando un punto interior como homólogo del centro del círculo y un punto de contorno como homólogo de un punto de la circunferencia, o bien dando un punto interior y una dirección a partir de él como homólogos del centro del círculo y la dirección del semieje real positivo.*

La demostración de RIEMANN, dada en su tesis doctoral y fundada en la integración de la ecuación de D'ALEMBERT (§ 91-6, *d*), adolecía de dos defectos capitales: Estudiando la integral definida de una función indeterminada que debe cumplir determinadas condiciones, admitía que existe una cierta función para la cual obtiene esa integral su valor mínimo (este postulado, que en Física se utiliza con frecuencia, suele llamarse *principio de* DIRICHLET). En segundo lugar, admitía sin demostración que la correspondencia biunívoca, continua y conforme de los puntos interiores a dos recintos, lleva consigo la correspondencia de los contornos.

Señalada la insuficiencia del método de RIEMANN, diversos matemáticos acometieron la empresa de demostrar la existencia de la función que efectúa la representación conforme de cualquier recinto sobre el círculo, estudiando además la correspondencia de los contornos. Al fin consiguieron SCHWARZ y NEUMANN, hacia 1870, resolver el problema para tipos muy generales de recintos, apoyándose en la teoría del potencial logarítmico (ver *c*), o sea, la integración de la ecuación de D'ALEMBERT (§ 91-6, *d*). Más recientemente, KOEBE, CARATHÉODORY y BIEBERBACH, han iniciado una nueva época, abordando la resolución directa del problema de RIEMANN sin utilizar la teoría del potencial, esto es, combinando solamente los recursos de la teoría de las funciones analíticas.

Puesto que puede representarse conformemente un círculo en sí mismo por una transformación homográfica (§ 114-4) de modo que se correspondan, o bien tres pares de puntos de contorno con conservación del sentido de recorrido de éste (§ 114, ejercicio 10, *a*), o bien un par de puntos interiores y uno de puntos de contorno, o bien un par de puntos interiores y una dirección a partir de cada punto (§ 114, ejercicio 7, 1º), bastará probar:

TEOR. *Todo recinto simplemente conexo* R *de un plano simple* (es decir, no múltiple, § 116-1) z, *con dos puntos* a, b *de contorno por lo menos, se puede transformar biunívoca y conformemente en un círculo mediante una función analítica.*

DEM. a_1) Sin restringir la generalidad del teorema *podemos suponer* R *acotado*. En efecto, la función $w = \sqrt{(z-a)/(z-b)}$ representa el plano *doble* z ramificado en a y en b, en el plano *simple* w, y entonces R, que está en *una* rama del plano doble z, se transforma en un recinto del plano simple w tal que su complemento contiene un recinto G, el cual por una transformación homográfica puede llevarse a cubrir el exterior de un círculo.

a_2) Suponiendo (por a_1) el recinto R acotado, consideremos para $z_0 \varepsilon$ R el conjunto $C(z_0)$ de las funciones $f(z)$ regulares y univalentes (nota I) en R, con $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 1$ y tales que exista finito:

$$M(f) = \operatorname*{extr\,sup}_{z \varepsilon R} |f(z)|. \quad \text{Sea} \quad \varrho = \operatorname*{extr\,inf}_{f \varepsilon C(z_0)} M(f).$$

Entonces, o bien hay en $C(z_0)$ una función $\varphi(z)$ tal que $M(\varphi) = \varrho$; o bien hay una sucesión $f_1, f_2, \ldots$, de funciones de $C(z_0)$, tal que $\lim M(f_n) = \varrho$. Probaremos que este segundo caso se reduce al primero. En efecto, como las funciones de la sucesión $\{f_n(z)\}$ están acotadas en su conjunto en R [pues $M(f_n) < \varrho + 1$ para n suficientemente grande], por el principio de acumulación (nota V, *b*) podemos seleccionar una sucesión $\{f_{n_i}\}$ contenida en $\{f_n\}$ y que tiende a una función regular $f(z)$, uniformemente en cada dominio interior a R. Esta función verifica $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 1$; por tanto, no es constante y entonces (nota V, *c*) es univalente. Por definición de $\{f_n\}$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $r_0 = r_0(\varepsilon)$ tal que para $r > r_0$ es

$$M(f_{n_r}) < \varrho + \varepsilon, \quad \textit{o sea} \quad |f_{n_r}(z)| < \varrho + \varepsilon, \quad z \varepsilon G,$$

y haciendo $r \to \infty$ sigue $|f(z)| \leqslant \varrho + \varepsilon$ en R con lo que $f \varepsilon C(z_0)$, y como ε es arbitrario: $M(f) \leqslant \varrho$. Además, por definición de ϱ es $M(f) \geqslant \varrho$ y entonces $M(f) = \varrho$.

a_3) *Probaremos que la función* $w = f(z)$ *definida en* (a_2) *representa* R *biunívoca y conformemente en el círculo* $|w| < \varrho$. Como $M(f) = \varrho$, el recinto S transformado de R por f, es parte (propia o impropia) de $|w| < \varrho$ y tiene al menos un punto de contorno en la circunferencia $|w| = \varrho$. Si el teorema no fuera cierto, habría en el contorno de S un punto α con $|\alpha| < \varrho$ y entonces cada rama de la función biforme

$$w_1 = \varrho \sqrt{\varrho(w - \alpha) / (\varrho^2 - \bar{\alpha} w)}$$

sería regular y univalente en S. Por otra parte, para $|w| < \varrho$ es $|w_1| < \varrho$ (§ 114, ejercicio 7, 2º) y $w_1(0) = \sqrt{-\alpha\varrho}$. Pongamos

[XXIX-14] $$w_2 = \varrho^2[w_1 - w_1(0)]/[\varrho^2 - \overline{w_1(0)} \, . \, w_1] \quad ,$$

entonces, para $|w_1| < \varrho$ es $|w_2| < \varrho$. Pero la derivada

$$\frac{dw_2}{dw} = \frac{dw_2}{dw_1} \frac{dw_1}{dw}$$

toma para $w = 0$ el valor $(\varrho + |\alpha|)/2\sqrt{-\alpha\varrho}$ cuyo módulo es > 1. Entonces tendríamos una función

[XXIX-15] $$w_3 = 2w_2\sqrt{-\alpha\varrho}/(\varrho + |\alpha|),$$

perteneciente al conjunto $C(z_0)$ y tal que $M(w_3) < \varrho$, lo que contradice la definición de ϱ. Entonces $w = f(z)$ transforma R en *todo* el círculo $|w| < \varrho$ y queda demostrado el teorema de RIEMANN.

b) *Método de representación conforme de* BIEBERBACH. — b_1) *Radio de un recinto.* — Puesto que podemos adoptar ejes coordenados arbitrarios para representar los recintos, desde ahora en adelante adoptaremos como orígenes los dos puntos homólogos y como semiejes reales positivos los indicados por dos direcciones homólogas. A la representación conforme así obtenida la llamaremos *normal*. Si $f(z)$ es la función que efectúa la representación conforme normal de un recinto R sobre el círculo de radio 1, el valor de la dilatación en el origen a correspondiente al centro, es $|f'(a)|$; pero si ampliamos o reducimos el círculo, dividiendo su radio por $|f'(a)|$, la dilatación en el punto a se habrá reducido a 1. El radio $1/|f'(a)|$ del círculo así obtenido está, pues, determinado para cada punto de R y desempeña importante papel en la demostración del teorema fundamental (ver *a*) así como en muchos teoremas de la teoría:

A cada punto interior de un recinto simplemente conexo R *corres-*

ponde un número positivo, que llamaremos radio de R *en dicho punto. Este número es el radio del círculo transformado conforme de* R *de modo que su centro corresponda a dicho punto y que la dilatación en él sea la unidad.*

b_2) *Principio de mínimo.* — El método de representación conforme que vamos a exponer, se apoya en el siguiente teorema: *Entre todos los recintos que tienen en el punto* 0 *el mismo radio* ϱ, *el de área mínima es el círculo de centro* 0. (BIEBERBACH, 1912).

Decir que el radio de un recinto en el punto 0 es ϱ, equivale (b_1) a expresar que la función analítica que efectúa su representación conforme sobre el círculo de radio ϱ, tiene su derivada en 0 igual a 1. Adoptando como variable independiente la que representa al círculo, el desarrollo en serie de la función w será del tipo:

[XXIX-16] $$w = \mathrm{f}(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

Puesto que el área del círculo, en coordenadas polares, tiene por expresión

$$\int\int_C r\, d\varphi\, dr = \pi\varrho^2 \quad ,$$

y la razón de semejanza infinitesimal en cada punto, entre el círculo y el recinto (es decir, la *dilatación*) vale $|\mathrm{f}'(z)|$, la razón entre los elementos homólogos de área es $|\mathrm{f}'(z)|^2$; luego el área del recinto R transformado del círculo por la función [XXIX-16] es:

[XXIX-17] $$\mathrm{A} = \int\int_C |\mathrm{f}'(z)|^2 r\, dr\, d\varphi .$$

Para calcular cómodamente $|\mathrm{f}'(z)|^2$, observemos que siendo:

$$\mathrm{f}'(z) = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \ldots = \mathrm{U} + i\mathrm{V} \quad ,$$

si formamos la serie de términos conjugados, el producto de ambas es:

$$|\mathrm{f}'(z)|^2 = 1 + \mathrm{P} + \mathrm{Q} = \mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2 \quad ,$$

designando por P y Q, para abreviar, las sumas de las series:

$$\mathrm{P} = 4\alpha_2^2 r^2 + 9\alpha_3^2 r^4 + 16\alpha_4^2 r^6 + \ldots ,$$
$$\mathrm{Q} = 2\alpha_2 r \cos(\varphi + \Psi_2) + 3\alpha_3 r^2 \cos(2\varphi + \Psi_3) + \ldots ;$$

la primera resulta de agrupar el producto de cada término por su homólogo, la segunda serie resulta agrupando el producto de cada dos términos no homólogos con el producto de sus conjugados. Por brevedad hemos llamado r al módulo de z, φ a su argumento, α_i a los módulos de los coeficientes a_i, y Ψ_i a sus argumentos.

El área del recinto R resulta, reemplazando en [XXIX-17]:

$$\mathrm{A} = \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} r\, dr\, d\varphi + \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} \mathrm{P} r\, dr\, d\varphi + \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} \mathrm{Q} r\, dr\, d\varphi =$$
$$= \pi\varrho^2 + \pi(2\alpha_2^2\varrho^4 + 3\alpha_3^2\varrho^6 + \ldots),$$

puesto que la integral de Q es nula, por reducirse a cero la integral de cada término entre los límites 0 y 2π. La serie encerrada entre paréntesis tiene positivos todos sus términos, y por tanto: $\mathrm{A} > \pi\varrho^2$.

b_3) *Límite de error.* — Si R difiere poco de un círculo, y es σ la diferencia de área entre ambos, es decir:

$$\pi(2\alpha_2^2\varrho^4 + 3\alpha_3^2\varrho^6 + \ldots) = \sigma$$

resultan las limitaciones siguientes:

$$a_2\rho^2 < \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} \quad , \quad a_3\rho^3 < \sqrt{\frac{\sigma}{3\pi}} \quad , \quad \ldots, \quad a_n\rho^n < \sqrt{\frac{\sigma}{n\pi}} \quad , \quad \ldots,$$

es decir, los coeficientes de la función se conservan inferiores a números fijos. Cuanto menor sea la diferencia de áreas entre R y el círculo, tanto menores serán los coeficientes, y tanto menos diferirá cada punto $z = re^{i\varphi}$ del círculo, de su homólogo w. En efecto:

$$|\mathrm{f}(z) - z| = |a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots| \leqslant a_2r^2 + a_3r^3 + \ldots \quad ,$$

y llamando θ al número $r/\rho < 1$, es decir $r = \rho\theta$, resulta:

$$|\mathrm{f}(z) - z| \leqslant \theta^2\sqrt{\sigma/(2\pi)} + \theta^3\sqrt{\sigma/(3\pi)} + \\ + \ldots < \theta^2\sqrt{\sigma/(2\pi)}\,(1 + \theta + \theta^2 + \ldots)$$

o sea

[XXIX-18] $$|\mathrm{f}(z) - z| < \frac{\theta^2}{1-\theta}\sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} \, .$$

Dada una representación conforme entre un recinto y un círculo, con dilatación 1 *en el centro, cada punto difiere de su homólogo en menos de un número dado por* [XXIX-18], *que depende de la distancia al centro y de la diferencia de áreas; número que tiene por límite cero cuando cualquiera de estos números* σ *ó* θ *tiende a cero.*

b_4) Representación conforme aproximada. — Dado un recinto simplemente conexo R, la función que lo transforma en círculo es regular en todo el campo R; pero, en general, su desarrollo en serie no será válido en todo él, pues puede haber puntos singulares exteriores a R, que disten del origen menos que algunos puntos del contorno; por esta razón, para poder utilizar el cómodo algoritmo de las series, hemos adoptado en (b_2) como variable independiente z la que representa al círculo. Ahora vamos a adoptar como variable z la que representa los puntos de R; mas desaparece aquel inconveniente considerando funciones enteras del tipo:

[XXIX-19] $$w = \mathrm{f}(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots + a_nz^n \quad ,$$

que por ser regulares en todo el plano, transforman el recinto R en recintos finitos R′, de una o varias hojas, transformados conformes de R. Entre todos los sistemas posibles de valores reales que pueden recibir $a_2, a_3, \ldots, a_n$ vamos a elegir el que nos dé un recinto R′ que difiera lo menos posible de un círculo.

Las áreas de R y de R′ son:

$$\mathrm{A} = \int\!\!\int_{\mathrm{R}} dx\,dy \quad , \quad \mathrm{A}' = \int\!\!\int_{\mathrm{R}} |\mathrm{f}'(z)|^2\,dx\,dy \quad ,$$

y desarrollando, resulta:

[XXIX-20] $$\mathrm{A}' = \int\!\!\int_{\mathrm{R}} [1 + 2a_2(x+iy) + \ldots + na_n(x+iy)^{n-1}] \,. \\ . \, [1 + 2a_2(x-iy) + \ldots + na_n(x-iy)^{n-1}]\,dx\,dy = \\ = \mathrm{A} + \mathrm{M}a_2^2 + \mathrm{N}a_3^2 + \ldots + \mathrm{Q}a_n^2 + \mathrm{T}a_2a_3 + \ldots + \mathrm{U}a_2 + \ldots + \mathrm{Z}a_n,$$

habiendo designado por M, N, ..., los coeficientes que resulten después de efectuada la integración del polinomio real que aparece bajo el signo integral. El término constante del polinomio obtenido es el área A de R.

Dando valores convenientes a $a_2, a_3, \ldots, a_n$, este polinomio llega a adquirir valores tan grandes como se quiera. Basta para ello, por ejemplo, hacer $a_3 = \ldots = a_n = 0$ y a_2 muy grande. Por consiguiente: *Las*

áreas de los recintos transformados de R *por todas las funciones enteras del tipo* [XXIX-19] *no tienen máximo absoluto.*

Si C es un círculo de centro 0 interior a R, como el transformado R' por cualquier función contiene al transformado C', y éste tiene mayor área que C, también el área de R' es mayor que la de C. Por consiguiente, las áreas de todos los recintos R' obtenidos con todas las funciones [XXIX-19], por ser superiores a un número fijo tienen un *extremo inferior* $\alpha > 0$, y como el polinomio es función continua, existe efectivamente un sistema de valores de $a_2, a_3, \ldots, a_n$ tal que el recinto obtenido R' tiene el área mínima α, luego: *Entre todos los polinomios de grado n del tipo* [XXIX-19] *hay uno que transforma al recinto* R *en otro de área mínima.*

Como en un polinomio real el mínimo absoluto es también mínimo relativo, calcularemos fácilmente el sistema de coeficientes que da el recinto mínimo, igualando a cero las derivadas parciales del polinomio [XXIX-20], respecto de a_2, de a_3, ..., de a_n, y resolviendo el sistema de ecuaciones lineales así formado.

Si en vez del polinomio [XXIX-19] adoptamos otro de grado $n' > n$, y aplicamos el mismo procedimiento para determinar sus coeficientes por la condición de mínimo, el recinto así obtenido no tendrá mayor área que el R' suministrado por el de grado n, puesto que entre los polinomios de grado n' figuran, como caso particular, los de grado n, y hemos obtenido la menor área que pueden dar *todos* los polinomios de grado n. Resulta de aquí que la aproximación va en aumento al crecer el grado de los polinomios elegidos (al menos no disminuye); pero nada puede asegurarse *a priori* respecto del grado de aproximación que se logrará con polinomios de cierto grado. Ni es tampoco necesario, pues una vez calculados los coeficientes y dibujado el contorno de R' que este polinomio suministra, veremos si la aproximación lograda es suficiente. Y aunque el contorno difiera sensiblemente de una circunferencia, si sabemos calcular el radio del recinto (como sucede en los polígonos regulares) la fórmula [XXIX-18] dirá para qué puntos interiores puede reputarse suficiente la aproximación lograda, y para cuáles otros debe recurrirse a polinomios de grado superior.

c) Relación con la teoría del potencial. — c_1) El teorema siguiente muestra la equivalencia del problema de representación conforme con el de hallar una función de GREEN (Cap. XXVIII, nota IX, h_1) del operador de D'ALEMBERT Δu (§ 91-6, *d*).

TEOR.: 1º) *Sea* $w = \varphi(z, \zeta)$ *función analítica de z en un recinto simplemente conexo* R *y su contorno* Γ, *formado por una curva analítica, y represente biunívoca y conformemente* R *en* $|w| < 1$ *de modo que a* $z = \zeta$ *corresponda* $w = 0$. *Entonces*

[XXIX-21] $$\frac{1}{2\pi} \ln|\varphi(z, \zeta)| = G(x, y, \xi, \eta), \quad (\xi + i\eta = \zeta),$$

es la función de GREEN *en* R, *del operador* Δu *y condición de contorno* $u = 0$ *en* Γ, *con polo* (ξ, η).

2º) *Recíprocamente, si* $G(x, y, \xi, \eta)$ *es la función de* GREEN *de* Δu *en* R, *la función*:

[XXIX-22] $$w = \varphi(z, \zeta) = e^{2\pi(G+iH)},$$

donde H *es conjugada* (§ 114-3) *de* G, *representa biunívoca y conformemente* R *en* $|w| < 1$ *de modo que a* $z = \zeta = \xi + i\eta$ *corresponde* $w = 0$.

3º) *Además, toda función* $u(x, y)$ *armónica en* R *y continua en* $R + \Gamma$ *se puede expresar por sus valores en el contorno* Γ *mediante la fórmula de* GREEN:

[XXIX-23] $$u(x, y) = \int_\Gamma u(s) \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad ,$$

siendo s la abscisa curvilínea sobre Γ y n la normal interior.

DEM. 1º) En el entorno de $z = \zeta$ es

[XXIX-24] $$\varphi(z, \zeta) = a_1(z - \zeta) + a_2(z - \zeta)^2 + \ldots,$$

con $a_1 \neq 0$, pues la representación es conforme. Por tanto:

[XXIX-25] $$\ln \varphi(z, \zeta) = \ln(z - \zeta) + \ln [a_1 + a_2(z - \zeta) + \ldots],$$

y entonces

[XXIX-26] $$\frac{1}{2\pi} \ln |\varphi(z, \zeta)| = \frac{1}{2\pi} \ln r + \gamma, \quad (r = |z - \zeta|),$$

donde γ es armónica no sólo en el entorno de ζ, sino en todo R, pues $f(z)$ no vuelve a anularse en R.

Cuando $z \to z_0 \varepsilon \Gamma$, $|\varphi(z, \zeta)| \to 1$ y entonces $\ln |\varphi(z, \zeta)| \to 0$.

2º) Recíprocamente, la función $G - (2\pi)^{-1} \ln r$ es armónica en R simplemente conexo, y entonces tiene una conjugada uniforme (§ 114-3) determinada salvo una constante aditiva, y como la conjugada de $(2\pi)^{-1} \ln r$ es la función *multiforme* $(2\pi)^{-1} \arg(z - \zeta)$, toda conjugada H de G es también multiforme, incrementándose en 1 cada vez que se rodea el punto $z = \zeta$ en sentido positivo. Pero como e^t tiene período $2\pi i$, la función [XXIX-22] es *uniforme*, valiendo los desarrollos [XXIX-24] y [XXIX-25].

Es por [XXIX-22] y [XXIX-25]:

$$G + iH = \frac{1}{2\pi} \ln \varphi(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln(z - \zeta) + \frac{1}{2\pi} \varrho(z, \zeta),$$

con $\varrho(z, \zeta)$ función analítica de z en un entorno de ζ. Por tanto

$$\varphi(z, \zeta) = (z - \zeta) \cdot e^{\varrho(z, \zeta)} \quad ,$$

y como

$$\varphi_z(\zeta, \zeta) = e^{\varrho(\zeta, \zeta)} \neq 0$$

la representación es conforme en el entorno de ζ. También lo es en todo R, y como es $G < 0$ en R, por [XXIX-22] es $|w| = e^{2\pi G} < 1$ y $\varphi(z, \zeta)$ representa R en todo o parte del círculo $|w| < 1$. Pero dado un w_1 con $|w_1| < 1$, veremos que corresponde a un punto de R. Pues poniendo $w_1 = e^{a+ib}$, $(a < 0)$, la circunferencia $|w| = e^a$, que contiene a w_1, es imagen de una curva analítica $G = a/(2\pi)$ del plano z. Al recorrerla, H aumenta en 1 y por [XXIX-22], w toma todos los valores de módulo $|w_1|$, entre ellos w_1.

3º) Como $\varphi(z, \zeta)$ es función regular de z en R, y se anula sólo en $z = \zeta$, tendremos por § 117, ejercicio 2, y § 115-2, nota 2, si $f(z)$ es regular en R y continua en $R + \Gamma$:

[XXIX-27] $$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(t) \frac{\varphi_t(t, \zeta)}{\varphi(t, \zeta)} dt.$$

De [XXIX-22] sigue $\ln \varphi = 2\pi(G + iH)$, y entonces indicando con s la abscisa curvilínea sobre Γ se tiene:

[XXIX-28] $$\frac{\varphi_t}{\varphi} dt = 2\pi \left(\frac{\partial G}{\partial s} + i \frac{\partial H}{\partial s} \right) ds.$$

Es $\partial G/\partial s = 0$ pues $G = 0$ en Γ, y además $\partial H/\partial s = -\partial G/\partial n$, si n indica la normal interior, por tanto [XXIX-27] da:

[XXIX-29] $$f(\zeta) = \int_\Gamma f(t)\,\frac{\partial G}{\partial n}\,ds.$$

Poniendo aquí $f(z) = u + iv$ y tomando partes reales se obtiene la fórmula de GREEN [XXIX-23].

c_2) *Integral de* POISSON. — Es el caso especial de la fórmula de GREEN [XXIX-23] en que el recinto es el círculo $|z| < R$, a transformar por $w = \varphi(z,\zeta)$ en $|w| < 1$, de modo que $z = \zeta$ se transforme en $w = 0$. Entonces (§ 114, ejercicio 7, 2º):

$$\varphi(z,\zeta) = \frac{R(z-\zeta)}{\bar{\zeta} z - R^2}$$

y como en [XXIX-27] hay que formar $(\varphi_t/\varphi)dt$ para $z = t$ en el contorno, pongamos:

$$z = R\,.\,e^{i\omega}, \qquad \zeta = r\,.\,e^{i\theta}, \qquad (0 \leqslant r < R).$$

Entonces:

$$\frac{\varphi_t}{\varphi}\,dt = \frac{iz}{z-\zeta}\,d\omega + \frac{\bar{\zeta}\,iz}{R^2 - z\bar{\zeta}}\,d\omega =$$

$$= \left[\frac{Re^{i\omega}}{Re^{i\omega} - re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}\,.\,e^{i\omega}}{R - e^{i\omega}\,.\,re^{-i\theta}}\right] i\,d\omega =$$

$$= \left[\frac{Re^{i\omega}}{Re^{i\omega} - re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{Re^{-i\omega} - re^{-i\theta}}\right] i\,d\omega =$$

$$= \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\omega-\theta) + r^2}\,i\,d\omega \quad ,$$

y de aquí resulta la integral de POISSON (cfr. § 112-2, ej. 2):

[XXIX-30] $$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\omega-\theta) + r^2}\,u(R,\omega)\,d\omega.$$

Aunque esta fórmula expresa la parte real de una función analítica en un punto interior por los valores de dicha parte real en el contorno, no puede obtenerse simplemente tomando partes reales en la integral de CAUCHY.

VII. Integrales eulerianas. — *a*) *Diversas definiciones de la función Gamma.* — a_1) El producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right\}$$

converge uniformemente en cada círculo $|z| < \frac{1}{2}A$, como resulta (Cap. XI, nota III, *e*) de la siguiente acotación de los logaritmos de sus términos:

$$\left|\ln\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right| = \left| -\frac{1}{2}\,\frac{z^2}{n^2} + \frac{1}{3}\,\frac{z^3}{n^3} - \ldots \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|z|^2}{n^2}\left[1 + \left|\frac{z}{n}\right| + \left|\frac{z}{n}\right|^2 + \ldots\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A^2}{4n^2}\left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\right] = \frac{A^2}{2}\,.\,\frac{1}{n^2}\,.$$

En consecuencia (§ 115-9), dicho producto define una función analítica para todo z finito. Definiremos la *función Gamma* $\Gamma(z)$ por:

[XXIX-31] $$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right\} \quad ,$$

siendo γ la constante de EULER (§ 22-3, *b*), y entonces $\Gamma(z)$ *es analítica en todo el plano propio salvo en los puntos* $z = 0, -1, -2, \ldots,$ *donde tiene polos simples.*

a_1) De [XXIX-31] y la definción de γ resulta:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{k \to \infty} \left[e^{[1 + \frac{1}{2} + \ldots + (1/k) - \ln k]z} \prod_{n=1}^{k} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right\} \right] =$$

$$= z \lim_{k \to \infty} \left[k^{-z} \prod_{n=1}^{k} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \right] =$$

$$= z \lim_{k \to \infty} \left[\prod_{n=1}^{k-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-z} \prod_{n=1}^{k} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \right]$$

y como puede ponerse k como límite superior del primer producto, pues $\lim[1 + (1/k)]^z = 1$ para $k \to \infty$, resulta la *fórmula de* EULER que expresa $\Gamma(z)$ como producto infinito:

$$\text{[XXIX-32]} \quad \Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \right\} ,$$

$$(z \neq 0, -1, -2, \ldots).$$

Esta relación se escribe también:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \lim_{k \to \infty} \left\{ \left[\prod_{n=1}^{k-1} \frac{n+1}{n} \right]^z \Big/ \prod_{n=1}^{k} \frac{z+n}{n} \right\}$$

y da la siguiente expresión equivalente a [XXIX-32] y también debida a EULER:

$$\text{[XXIX-33]} \qquad \Gamma(z) = \lim_{k \to \infty} \frac{k!k^z}{z(z+1)\ldots(z+k)} .$$

a_3) Veremos ahora que para $R(z) > 0$ vale la siguiente expresión de $\Gamma(z)$ por una integral impropia, debida también a EULER:

$$\text{[XXIX-34]} \qquad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt \quad , \quad [R(z) > 0].$$

a_{31}) Para demostrar que la integral [XXIX-34] *representa una función analítica en el semiplano* $R(z) > 0$ bastará probar (§ 115-9) que converge uniformemente en toda faja vertical $0 < \varepsilon \leqslant R(z) \leqslant H$. Haciendo la descomposición:

$$\text{[XXIX-35]} \qquad \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} \, dt + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt \quad ,$$

vemos que las dos integrales del segundo miembro convergen uniformemente en esa faja, pues los módulos de sus integrandos no superan a los integrandos de las integrales convergentes

$$\int_0^1 t^{\varepsilon-1} \, dt \quad , \quad \int_1^{\infty} t^{H-1} e^{-t} \, dt = \int_1^{\infty} \frac{t^{H+1} e^{-t}}{t^2} \, dt .$$

a_{32}) Para probar [XXIX-34] consideremos la integral

$$\text{[XXIX-36]} \qquad G_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \, dt = n^z \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} \, d\tau \quad ,$$

$$(t = n\tau) \quad ;$$

integrando reiteradamente por partes resulta

$$\int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau = \left[\frac{1}{z}\tau^z(1-\tau)^n\right]_0^1 - \frac{n}{z}\int_0^1 (1-\tau)^{n-1}\tau^z d\tau =$$

$$= \dots = \frac{n(n-1)\dots 1}{z(z+1)\dots(z+n)} ,$$

y por [XXIX-33] y [XXIX-36]: $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} G_n(z)$ de modo que:

[XXIX-37] $$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt - \Gamma(z) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^n t^{z-1}\left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] dt + \int_n^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \right\}$$

y bastará probar que este límite es cero. Ahora bien, el segundo término tiende a cero por la convergencia de la integral [XXIX-34] y el primero en virtud de las desigualdades *

[XXIX-38] $$0 < e^{-t} - [1-(t/n)]^n < n^{-1} t^2 e^{-t}$$

pues, siendo $R(z) = x > 0$:

$$\left| \int_0^n t^{z-1}\left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] dt \right| <$$

$$< \int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n} dt < \frac{1}{n}\int_0^\infty t^{x+1} e^{-t} dt \to 0 .$$

Haciendo en [XXIX-34] el cambio de variables $t = s\tau$, $(s > 0)$, resulta la fórmula de uso frecuente:

[XXIX-39] $$\frac{\Gamma(z)}{s^z} = \int_0^\infty \tau^{z-1} e^{-s\tau} d\tau .$$

a_4) Históricamente, la función Γ fué primero introducida por Euler (carta a Goldbach, 1729) por el producto infinito [XXIX-32], y luego por el límite equivalente [XXIX-33]. La definición [XXIX-31] es de Weierstrass (1856) pero [XXIX-31] fué obtenida de [XXIX-32] por F. W. Newman en 1848. La notación $\Gamma(z)$ fué introducida en 1814 por Legendre, quien dió a la integral [XXIX-34], mediante la cual suele *definirse* $\Gamma(z)$ en $R(z) > 0$, el nombre de *integral euleriana de segunda especie*. La de primera especie será introducida en *c*.

b) *Propiedades de la función Gamma*. — b_1) *Ecuación funcional*. — Resulta de [XXIX-34] por integración por partes, para $R(z) = x > 1$:

---

* Para demostrar [XXIX-38] observemos que $y = e^s$ tiene por tangente en el origen $y = 1 + s$ con su concavidad hacia $y > 0$ (§ 33-9), lo que prueba es $1 + s < e^s$ para s positivo o negativo, de donde con $s = \pm t/n$ se obtiene:

$$[1 + (t/n)]^{-n} > e^{-t} > [1-(t/n)]^n ;$$

y de ahí resultan las relaciones

$$0 < e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left[1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] <$$

$$< e^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right] ,$$

que ya dan la primera [XXIX-38], y también la segunda, pues si en $(1-\delta)^n > 1 - n\delta$, $(0 < \delta < 1)$ (demostrable por recurrencia si $n\delta < 1$, cfr. § 2-2, ejemplo; y trivial si $n\delta \geq 1$) ponemos $\delta = t^2/n^2$ resulta el último corchete $< t^2/n$.

$$\Gamma(z) = \Big[t^{z-1} e^{-t} \Big]_0^{\infty} + (z-1) \int_0^{\infty} t^{z-2} e^{-t}\, dt$$

y como el término integrado se anula resulta la *ecuación funcional de la función Gamma*:

[XXIX-40] $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1), \quad [R(z) > 1],$

o bien:

[XXIX-41] $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad [R(z) > 0].$

Para $z = n$ entero, teniendo en cuenta que

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = 1,$$

resulta por aplicación reiterada de [XXIX-40]:

[XXIX-42] $\Gamma(n) = (n-1)!$

y en consecuencia la función $\Gamma(z)$ puede considerarse como una generalización del factorial (fig. 442).

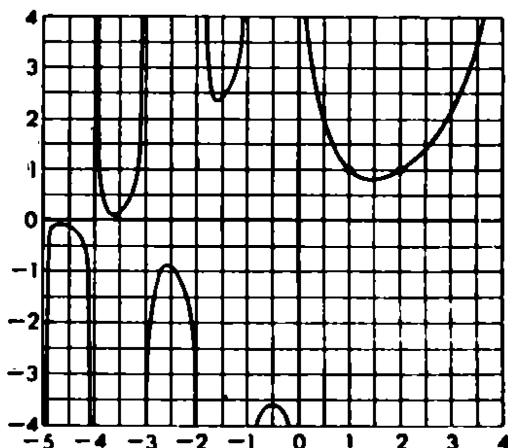


Fig. 442.

La ecuación funcional [XXIX-41] reduce el estudio de la función $\Gamma(z)$ en $R(z) > 0$, al estudio de sus valores en la faja $0 < R(z) < 1$. Una reducción a la faja $0 < R(z) < \frac{1}{2}$ se obtiene con la relación siguiente:

b_1) *Relación de los complementos.* — De la definición de Weierstrass [XXIX-31] y la expresión del seno en producto infinito (§ 118-5) resulta:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) =$$

$$= -\frac{1}{z^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right\}^{-1} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \right\}^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{z^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} = \frac{-\pi}{z \operatorname{sen} \pi z}$$

y como por [XXIX-41] $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ resulta la llamada *relación de los complementos*:

[XXIX-43] $$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}.$$

En particular, para $z = \frac{1}{2}$ (ver b_s) resulta $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi$ y como por [XXIX-31] es $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$ resulta:

[XXIX-44] $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

b_3) *Persistencia de las relaciones funcionales.* — La relación funcional [XXIX-41], probada para $R(z) > 0$, se extiende por el teorema de identidad de funciones analíticas (§ 115-11, teor. 5) a todo z que no sea un entero negativo, pues la función $\Gamma(z+1) - z\Gamma(z)$, por ser nula en $R(z) > 0$, lo es en todo su campo de regularidad.

Observemos que la relación de los complementos [XXIX-43] fué demostrada en b_2 para $R(z) < 0$ por haberse usado [XXIX-41] cambiando z por $-z$. Pero por la misma razón vale para todo z. Como consecuencia se encuentra de nuevo (ver a_1) que $1/\Gamma(z)$ es una función entera pues $1/\Gamma(z) = (1/\pi)\Gamma(1-z) \operatorname{sen} \pi z$ y las únicas posibles singularidades del segundo miembro, que serían los polos simples de $\Gamma(1-z)$ (ver a_1) en $1 - z = 0, -1, -2, \ldots$, es decir $z = 1, 2, 3, \ldots$, son "evitadas" por los ceros de $\operatorname{sen} \pi z$.

b_4) *Otras propiedades.* — La siguiente *"fórmula de duplicación"*

[XXIX-45] $$\Gamma(2z)\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}),$$

que demostraremos en c_7, es caso particular ($n = 2$) de la siguiente *fórmula de multiplicación* de GAUSS y LEGENDRE:

[XXIX-46] $$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-nz}(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}\Gamma(nz).$$

La fórmula de STIRLING [53-14] se generaliza para la función Γ:

$$\Gamma(z) \sim (z-1)^{z-1} e^{-z+1}\sqrt{2\pi(z-1)},$$

o en la forma más usual

[XXIX-47] $$\Gamma(z) \sim z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}\sqrt{2\pi},$$

equivalente a la anterior, pues

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x . e \sim 1$$

(§ 21-5, c). En el campo complejo, el límite 1 del cociente de ambos miembros de [XXIX-47] se alcanza para $z \to \infty$ uniformemente en todo ángulo menor que π y con el semieje real positivo como bisectriz.

c) *Función Beta.* — La *función Beta* $B(p, q)$ o *integral euleriana de primera especie* en la terminología de LEGENDRE, se define por:

[XXIX-48] $$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

estando x^{p-1} y $(1-x)^{q-1}$ dadas por la determinación real de los logaritmos en $e^{(p-1)\ln x}$ y $e^{(q-1)\ln(1-x)}$ respectivamente. La integral es uniformemente convergente cuando p y q varían en un par de semiplanos $R(p) \geqslant \varepsilon > 0$, $R(q) \geqslant \varepsilon$, pues en tal caso el módulo del integrando no supera al integrando de la integral convergente

$$\int_0^1 x^{\epsilon-1}(1-x)^{\epsilon-1}\,dx.$$

Veamos algunas propiedades importantes de la función Beta:

c_1) *Relación de simetría.* — Haciendo en [XXIX-48] el cambio de variables $x = 1 - t$ resulta:

[XXIX-49] $$B(p, q) = B(q, p).$$

c_2) *Si p ó q es entero positivo se obtiene una expresión explícita para* $B(p, q)$. — Para $q = 1$ se tiene

$$B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1}\,dx = \frac{1}{p},$$

y para $q = n > 1$ entero, integrando por partes sucesivamente:

[XXIX-50] $$B(p, n) = \frac{n-1}{p}\int_0^1 x^p (1-x)^{n-2}\,dx =$$

$$= \frac{n-1}{p} B(p+1, n-1) = \ldots = \frac{(n-1)!}{p(p+1)\ldots(p+n-1)}.$$

Multiplicando ambos términos de esta fracción por $\Gamma(p)$ resulta por [XXIX-41] y [XXIX-42]:

[XXIX-51] $$B(p, n) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(n)}{\Gamma(p+n)}$$

relación donde veremos (c_5) se puede eliminar la restricción n entero.

c_3) La igualdad de primer y tercer miembro de [XXIX-50] es válida sin la restricción n entero y suele escribirse en la forma:

[XXIX-52] $$B(p, q+1) = (q/p)B(p+1, q).$$

Junto a ella son útiles las relaciones:

[XXIX-53] $$B(p, q) = B(p+1, q) + B(p, q+1);$$

[XXIX-54] $$B(p, q+1) = [q/(p+q)]B(p, q).$$

La primera resulta descomponiendo

$$B(p, q+1) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)(1-x)^{q-1}\,dx$$

en dos integrales, una para cada término del binomio $1-x$; la segunda resulta aplicando la primera en el segundo miembro de [XXIX-52].

c_4) *Otras expresiones integrales de* $B(p, q)$. — Haciendo en [XXIX-48] el cambio de variables $x = y/(1+y)$ resultan $1 - x = 1/(1+y)$, $dx = dy/(1+y)^2$ y los nuevos límites 0, ∞; entonces:

[XXIX-55] $$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}\,dy}{(1+y)^{p+q}}.$$

Descomponiendo esta integral en dos extendidas a los intervalos $(0; 1)$ y $(1; \infty)$ y cambiando y por $1/y$ en la última, resulta la siguiente expresión integral que pone en evidencia la simetría [XXIX-49]:

[XXIX-56] $$B(p, q) = \int_0^1 \frac{y^{p-1} + y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy.$$

c_5) *Reducción de* B *a* Γ. — Suponiendo primero $R(p) > \frac{1}{2}$, $R(q) > \frac{1}{2}$, es

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx \cdot \int_0^\infty y^{q-1}e^{-y}\,dy,$$

y reemplazando x, y por x^2, y^2:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \lim_{R\to\infty} \int_0^R x^{2p-1} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R y^{2q-1} e^{-y^2} dy =$$

$$= 4 \lim_{R\to\infty} \int\int_{Q_R} x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy \quad ,$$

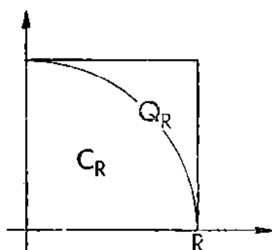


Fig. 443.

siendo la integral doble absolutamente convergente en el cuadrado $Q_R: (0 \leqslant x \leqslant R;\ 0 \leqslant \leqslant y \leqslant R$; fig. 443), donde el integrando, que llamaremos $F(x, y)$, es continuo. Como

$$\int\int_{Q_R} |F(x, y)|\, dx\, dy$$

converge a un límite:

$$4 \int_0^\infty |x^{2p-1}| e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty |y^{2q-1}| e^{-y^2} dy \quad ,$$

se tiene:

$$\left| \int\int_{Q_R} F\, dx\, dy - \int\int_{C_R} F\, dx\, dy \right| \leqslant \int\int_{Q_R - C_R} |F|\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\int_{Q_R} |F| - \int\int_{Q_{\frac{1}{2}R}} |F| \to 0 \quad \textit{para} \quad R \to \infty.$$

Por tanto:

$$\lim_{R\to\infty} \int\int_{Q_R} F\, dx\, dy = \lim_{R\to\infty} \int\int_{C_R} F\, dx\, dy \quad ,$$

y como la última integral es, en coordenadas polares (r, λ):

$$\int_0^R e^{-r^2} r\, dr \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (r \cos\lambda)^{2p-1} (r \operatorname{sen}\lambda)^{2q-1} d\lambda \quad ,$$

tendremos:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2p-1}\lambda \cdot \operatorname{sen}^{2q-1}\lambda\, d\lambda =$$

$$= 2\Gamma(p+q) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2p-1}\lambda \cdot \operatorname{sen}^{2q-1}\lambda\, d\lambda$$

y poniendo $\cos^2\lambda = t$ la última integral se convierte en

$$\frac{1}{2} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \frac{1}{2}\, B(p, q)$$

y resulta la fórmula de reducción *

---

* Recíprocamente, puede expresarse Γ con B mediante límite por:

[XXIX-57] $$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} n^z B(z, n)$$

como consecuencia de [XXIX-50] y [XXIX-33].

[XXIX-58] $$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

La restricción $R(p) > \frac{1}{2}$, $R(q) > \frac{1}{2}$ se elimina mediante [XXIX-54].

c_6) *Cálculo de integrales trigonométricas.* — La transformación efectuada en la última integral precedente da, reemplazando p y q por $\frac{1}{2}p$, $\frac{1}{2}q$:

[XXIX-59] $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p-1}x \operatorname{sen}^{q-1}x \, dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

Las fórmulas elementales conocidas para el caso en que p y q son enteros, dan nuevas relaciones para la función Beta.

c_7) *Demostración de la fórmula de duplicación* [XXIX-45]. — De [XXIX-58] y [XXIX-48] resulta para $q = p$:

$$\frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)} = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx,$$

y haciendo en la integral la sustitución $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{y}$, de donde $x(1-x) = (1-y)/4$, resulta:

$$\frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1-y}{4}\right)^{p-1} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2^{1-2p}\int_0^1 (1-y)^{p-1} y^{\frac{1}{2}-1}\,dy =$$
$$= 2^{1-2p}\,\Gamma(p)\Gamma(\tfrac{1}{2})/\Gamma(p+\tfrac{1}{2}),$$

de donde resulta [XXIX-45].

VIII. **Transformación de Laplace.** — a) *Definiciones.* — Ya hemos visto en § 99-3 y 4, ejemplos de transformaciones funcionales dadas por integrales paramétricas. De esta clase es también la transformación funcional siguiente, donde C es una curva cualquiera, abierta o cerrada, del plano de la variable compleja t:

[XXIX-60] $$f(p) = \int_C e^{-pt} F(t)\,dt.$$

Se la llama *transformación de* LAPLACE (aunque ya en 1737 consideró EULER integrales de esta forma para la integración de ecuaciones diferenciales), pero modernamente se indica como *transformación de* LAPLACE L el caso especial en que C es el semieje real positivo:

[XXIX-61] $$f(p) = L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}F(t)\,dt.$$

Esta transformación [XXIX-61] se llama también *de* LAPLACE *ordinaria* o *de primera especie* o *unilateral*, indicándose por L_I, para distinguirla de la siguiente *de segunda especie* o *bilateral.*

[XXIX-62] $$f(p) = L_{II}\{F(t)\} = \int_{-\infty}^\infty e^{-pt}F(t)\,dt.$$

La transformación [XXIX-61] que trataremos preferentemente, hace corresponder a cada función de variable real $F(t)$ (*función objeto*) de una cierta clase (ver b), una función de variable compleja $f(p)$ (*función-imagen* o *transformada de* LAPLACE) que veremos (teor. 9) es regular en un semiplano donde la integral [XXIX-61] converge.

b) *Series de potencias y de* DIRICHLET; *integrales de* LAPLACE-STIELTJES *y de* LAPLACE. — En muchas cuestiones es útil observar la analogía entre las expresiones [XXIX-61] y

[XXIX-63] $$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n,$$

como aptas para representar, en una parte del plano complejo, una función analítica. Basta observar, además de los teoremas 2, 5, 8 y 9 de más adelante, que con el cambio de variable $z = e^{-p}$ [de donde $|z| = e^{-R(p)}$, $R(p) =$ = parte real de p] la serie [XXIX-63] supuesta de radio de convergencia r, se transforma en la serie

[XXIX-64] $$\sum_{n=0}^{\infty} F_n e^{-pn}, \textit{ convergente en } R(p) > -\ln r,$$

es decir en un semiplano, que es a la vez semiplano de convergencia simple y absoluta. En cambio, hay un semiplano de convergencia simple, y otro en general distinto de convergencia absoluta, en el algoritmo más general de las *series de* DIRICHLET:

[XXIX-65] $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-l_n p}$$

donde los *exponentes* l_n forman una sucesión creciente no acotada, mientras los *coeficientes* a_n son complejos cualesquiera. Estas series presentan notable analogía con las integrales de LAPLACE, y ambas están comprendidas en las llamadas *integrales de* LAPLACE-STIELTJES:

[XXIX-66] $$\int_0^{\infty} e^{-pt} \, d\, G(t),$$

resultando [XXIX-61] si $G(t)$ admite derivada integrable (§ 78-2) $F(t)$ y [XXIX-65] si $G(t)$ es una función de saltos (§ 78-5):

[XXIX-67] $$G(t) = \sum_{l_n \leqslant t} a_n \quad ,$$

con salto (real o complejo) a_n en $t = l_n$.

Con frecuencia se consideran integrales [XXIX-66] con extremo inferior impropio, definiéndose entonces

[XXIX-68] $$\int_0^{\infty} e^{-pt} d\, G(t) \equiv \lim_{\substack{\varepsilon \to +0 \\ \omega \to +\infty}} \int_{\varepsilon}^{\omega} e^{-pt} d\, G(t) \quad ,$$

cuando este límite existe, en cuyo caso se dice que [XXIX-66] es *convergente*. Cuando esto ocurre para algún p diremos que $G(t)$ es LS-*transformable.*

En nuestra exposición nos concretaremos en lo posible a integrales del tipo [XXIX-61] y diremos que $F(t)$ es L-*transformable* si cumple las condiciones:

b_1) Está definida para todo $t > 0$ y es acotada e integrable (R) en cada intervalo $[t_1, t_2]$, $(0 < t_1 < t_2 < \infty)$;

b_2) Para todo $T > 0$ existe $\int_0^T |F(t)|\, dt$, eventualmente como integral (R-C) (§ 80-1) con extremo singular 0;

b_3) Existen un número real o complejo p_0 y un número positivo $\tau > 0$, tales que converge:

[XXIX-69] $$\int_{\tau}^{\infty} e^{-p_0 t} F(t)\, dt \equiv \lim_{\omega \to \infty} \int_{\tau}^{\omega} e^{-p_0 t} F(t)\, dt.$$

Es fácil ver que entonces existe el número, llamado *integral de* LAPLACE

[XXIX-70] $$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} \mathrm{F}(t)\,dt \equiv \lim_{\substack{\varepsilon \to +0 \\ \omega \to +\infty}} \int_{\varepsilon}^{\omega} e^{-p_0 t} \mathrm{F}(t)\,dt.$$

EJEMPLO 1. Si $\mathrm{F}(t)$ cumple b_1 y b_2 y es acotada: $|\mathrm{F}(t)| < \mathrm{K}$, es L-transformable pues verifica b_3 siendo p_0 un complejo de parte real positiva: $\mathrm{R}(p_0) > 0$. En efecto:

$$\int_r^s |e^{-p_0 t}\mathrm{F}(t)|\,dt < \mathrm{K} \int_r^s e^{-t\,\mathrm{R}(p_0)}\,dt \leqslant \mathrm{K} \int_r^{\infty} e^{-t\,\mathrm{R}(p_0)}\,dt =$$

$$= \mathrm{K}\,\frac{e^{-r\,\mathrm{R}(p_0)}}{\mathrm{R}(p_0)} \to 0 \text{ si } r \to \infty\ (s > r) \quad ,$$

y entonces converge [XXIX-70] por el criterio de BOLZANO-CAUCHY.

Este razonamiento muestra que con las condiciones

[XXIX-71] $$b_1,\ b_2,\quad |\mathrm{F}(t)| < \mathrm{K} \quad ,$$

la integral [XXIX-61] converge *absolutamente* en el semiplano abierto $\mathrm{R}(p) > 0$. Análogamente las condiciones

[XXIX-72] $$b_1,\ b_2,\quad |\mathrm{F}(t)| < \mathrm{K}\,e^{at} \quad , \quad (a \text{ real}),$$

aseguran convergencia absoluta en el semiplano abierto $\mathrm{R}(p) > a$.

c) *Convergencia absoluta y simple.* — TEOR. 1. *Si la integral de Laplace* [XXIX-61] *converge absolutamente para* $p = p_0$, *entonces converge absolutamente en el semiplano cerrado* $\mathrm{R}(p) \geqslant \mathrm{R}(p_0)$.

Pues:

$$\int_r^s |e^{-pt}\mathrm{F}(t)|\,dt = \int_r^s |e^{-(p-p_0)t}| \,.\, |e^{-p_0 t}\,\mathrm{F}(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_r^s |\,e^{-p_0 t}\,\mathrm{F}(t)|\,dt \quad .$$

Por teor. 1, la integral $\int_0^{\infty} |e^{-pt}\mathrm{F}(t)|\,dt$ converge o bien para todo p real (y entonces para todo p complejo) o bien para ningún p real (y entonces para ningún p complejo), o bien los p reales que hacen convergente o no la integral forman una cortadura en el campo real (§ 7-6, *d*) de número frontera a perteneciente a una u otra clase, y entonces:

TEOR. 2. *El campo de convergencia absoluta de la integral de* LAPLACE *es un semiplano abierto* $\mathrm{R}(p) > a$, *o cerrado* $\mathrm{R}(p) \geqslant a$ (*semiplano de convergencia absoluta*), *si se conviene en que* a (*abscisa de convergencia absoluta*) *es* $a = -\infty$, *ó* $a = +\infty$ *si el "semiplano" es respectivamente todo el plano, o el conjunto vacío.*

Propiedades análogas valen para la convergencia simple, es decir, cuando no se especifica si es absoluta o condicional.

TEOR. 3. *Si la integral de* LAPLACE [XXIX-61] *converge para* $p = p_0$, *entonces converge también para todo* p *con parte real mayor:* $\mathrm{R}(p) > \mathrm{R}(p_0)$.

Definiendo la función continua de u, $\mathrm{f}(u;\, p)$ por:

[XXIX-73] $$\mathrm{f}(u;\,p) \equiv \int_0^u e^{-pt}\mathrm{F}(t)\,dt \quad \text{si} \quad u > 0 \quad , \quad \mathrm{f}(0;\,p) \equiv 0 \quad ,$$

existe por hipótesis:

[XXIX-74] $$\lim_{u \to \infty} f(u;\ p_0) = f(p_0) \quad ,$$

y por tanto es $f(u;\ p_0)$ acotada:

[XXIX-75] $$|f(u;\ p_0)| < K.$$

Integrando por partes se tiene $[0 < r < s,\ R(p) > R(p_0)]$:

$$\int_r^s e^{-pt}F(t)\,dt = \int_r^s e^{-(p-p_0)t}[e^{-p_0t}F(t)]dt =$$

$$= e^{-(p-p_0)s} f(s;\, p_0) - e^{-(p-p_0)r} f(r;\, p_0) + (p - p_0)\int_r^s e^{-(p-p_0)t} f(t;\, p_0)\,dt.$$

Consideremos los tres términos de este último miembro para $r \to +0$, $s \to +\infty$. El primero tiende a cero en virtud de [XXIX-75] por tender a cero el primer factor; el segundo tiende a $f(0;\, p_0) = 0$; por tanto, bastará probar que existe finito el límite de la integral del último término, lo que se logra por [XXIX-75] por el razonamiento de ejemplo 1, que asimismo muestra que la convergencia de la integral impropia es *absoluta*, es decir:

TEOR. 4. *Si la integral de* LAPLACE [XXIX-61] *converge para* $p = p_0$, *puede representarse para* $R(p) > R(p_0)$ *por la integral absolutamente convergente*

[XXIX-76] $$(p - p_0) \int_0^\infty e^{-(p-p_0)t} f(t;\, p_0)\,dt \quad .$$

Con razonamiento análogo al que nos condujo al teor. 2, resulta de teor. 3 [donde la condición es $R(p) > R(p_0)$ y no $\geqslant R(p_0)$]:

TEOT. 5. *El campo de convergencia de la integral de* LAPLACE *es un semiplano* $R(p) > c$ *(semiplano de convergencia) incluído eventualmente su contorno* $R(p) = c$ *o parte de él, si se conviene en que* c *(abscisa de convergencia) es* $c = -\infty$ *ó* $c = +\infty$, *si el "semiplano" es respectivamente todo el plano o el conjunto vacío.*

Los ejemplos siguientes muestran distintos comportamientos en la recta $R(p) = c$, contorno del campo de convergencia:

EJEMPLOS: 2.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ 1/t^2 & \text{si } \quad t \geqslant 1 \end{cases} \quad ; \qquad f(p) = \int_1^\infty \frac{e^{-pt}}{t^2}\,dt$$

Es $c = 0$ y la integral converge (absolutamente) en todos los puntos de la recta $R(p) = 0$.

3. $$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ 1/t & \text{si } \quad t \geqslant 1 \end{cases} \quad ; \qquad f(p) = \int_1^\infty \frac{e^{-pt}}{t}\,dt$$

Es $c = 0$. La integral diverge en $p = 0$, pero converge (condicionalmente) en los demás puntos de la recta $R(p) = 0$, pues para $y \neq 0$ real es (§ 80-8, nota 2):

$$f(iy) = \int_1^\infty \frac{e^{-iyt}}{t}\,dt = \int_1^\infty \frac{\cos\, yt}{t}\,dt - i\int_1^\infty \frac{\text{sen}\, yt}{t}\,dt \quad .$$

4. $F(t) \equiv 1$; $f(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt$ converge (absolutamente) hacia $1/p$ para $R(p) > 0$, pero es divergente u oscilante para $R(p) \leqslant 0$. Pondremos:

[XXIX-77] $\qquad L\{1\} = \frac{1}{p}, \qquad c = a = 0 \quad .$

Es evidentemente $c \leqslant a$, pero contrariamente a lo que ocurre con las series de potencias (donde sólo puede haber convergencia *condicional* en el *contorno*), puede ser $c < a$, y se prueba con ejemplos que en la relación $-\infty \leqslant c \leqslant a \leqslant +\infty$ pueden presentarse todas las combinaciones posibles de signos $<$ é $=$, que son en número de $2^3 - 1 = 7$, ya que debe excluirse el caso de signos todos $=$.

d) Los ejemplos siguientes muestran cómo comenzar la construcción de una tabla de transformadas de LAPLACE. Para los ejemplos 6 a 8 debemos usar la *aditividad*, expresada por:

[XXIX-78] $L\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = c_1L\{F_1\} + c_2L\{F_2\}, \quad (c_i \text{ constantes}).$

EJEMPLOS: 5.

$$F(t) = e^{bt};\ f(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, e^{bt}\, dt = \int_0^\infty e^{-(p-b)t}\, dt \quad ,$$

y entonces

[XXIX-79] $\qquad L\{e^{bt}\} = \frac{1}{p-b}, \qquad R(p) > R(b).$

Para $b = 0$ resulta [XXIX-77].

6. De $\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ sigue por la aditividad y [XXIX-79], si $R(p) > |I(\omega)|$:

$$L\{\cos \omega t\} = \frac{1}{2}\,[L\{e^{i\omega t}\} + L\{e^{-i\omega t}\}] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right]$$

o sea:

[XXIX-80] $\qquad L\{\cos \omega t\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \ R(p) > |I(\omega)| \quad .$

7. Análogamente, de $\text{sen}\, \omega t = (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/(2i)$ sigue:

[XXIX-81] $\qquad L\{\text{sen}\, \omega t\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad R(p) > |I(\omega)|.$

8. Asimismo, de las definiciones de las funcionse hiperbólicas (§ 29-1) sigue por [XXIX-78] y [XXIX-79], si $R(p) > |R(b)|$:

[XXIX-82] $\qquad L\{\text{ch}\, bt\} = \frac{p}{p^2 - b^2} \quad ; \qquad L\{\text{sh}\, bt\} = \frac{b}{p^2 - b^2}$

9. $F(t) = t^k;\ f(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, t^k\, dt$. Si k es real se tiene, por [XXIX-39] (con $\tau = t,\ s = p,\ z = k + 1$):

[XXIX-83] $\qquad L\{t^k\} = \frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}, \quad k > -1, \quad p > 0,$

y por prolongación analítica para todo p con $R(p) > 0$, pues $L\{t^k\}$ es función analítica de p en ese semiplano, como veremos (teor. 9). También vale [XXIX-83] para k complejo con $R(k) > -1$

En particular

[XXIX-84] $\qquad L\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \ [n = 0, 1, 2, \ldots;\ R(p) > 0].$

10. Consideremos la llamada *función salto unidad en* $t = b$:

[XXIX-85] $$F(t) = \begin{cases} = 0 \text{ para } t < b, \\ = 1 \text{ para } t \geqslant b. \end{cases}$$

Se tiene:

$$f(p) = \int_b^\infty e^{-pt}\,dt = \left[\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_b^\infty = \frac{e^{-bp}}{p}\,, \quad R(p) > 0 \quad .$$

Indicando, como es usual en Cálculo operacional (Apéndice III) con $1(t)$ la función salto unidad en $t = 0$, o simplemente *función salto unidad* o *función de* HEAVISIDE [*fonction brusque unité*; *fonction échelon unité*; *unit step function*; *Sprungfunktion*, también indicada por $Y(t)$ ó $U(t)$]:

[XXIX-86] $$1(t) = \begin{cases} = 0 \text{ para } t < 0, \\ = 1 \text{ para } t \geqslant 0, \end{cases}$$

será $F(t) = 1(t - b)$ y entonces:

[XXIX-87] $$L\{1(t-b)\} = \frac{e^{-bp}}{p}\,, \qquad R(p) > 0,$$

que para $b = 0$ da [XXIX-77] en la forma $L\{1(t)\} = 1/p$.

EJERCICIO 1. Por integraciones por partes demostrar la relación:

[XXIX-88] $$L\{t^n . 1(t-b)\} = \frac{b^n e^{-bp}}{p} +$$

$$+ \frac{n}{p} L\{t^{n-1} . 1(t-b)\} = \ldots =$$

$$= e^{-bp}\left[\frac{b^n}{p} + \frac{n\, b^{n-1}}{p^2} + \frac{n(n-1)b^{n-2}}{p^3} + \ldots + \frac{n!}{p^{n+1}}\right] ,$$

que comprende [XXIX-84] ($b = 0$) y [XXIX-87] ($n = 0$).

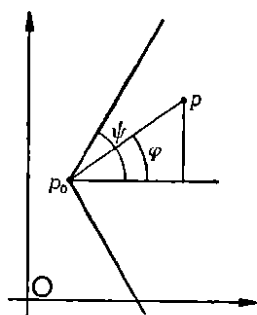


Fig. 444.

c) Convergencia uniforme. — TEOR. 6. *Si la integral de* LAPLACE [XXIX-61] *es impropia en* $t = 0$, *converge respecto de dicho extremo singular uniformemente en cada semiplano* $R(p) > h$.

Pues para cada $\varepsilon > 0$ puede lograrse que

$$\left|\int_u^v e^{-pt} F(t)\,dt\right| \leqslant e^{|h|v} \int_u^v |F(t)|\,dt$$

si $u < v < \delta(\varepsilon)$, independiente de p en $R(p) > h$.

TEOR. 7. *Si* [XXIX-61] *converge en* $p = p_0$, *converge uniformemente respecto de su extremo superior en cada región angular infinita* (*ángulo* de STOLZ, fig. 444):

[XXIX-89] $$|\operatorname{Arg}\,(p - p_0)| \leqslant \psi < \tfrac{1}{2}\pi \quad .$$

Observemos que en la región definida por [XXIX-89] es (fig. 444):

$$\frac{|p - p_0|}{R(p - p_0)} = \frac{1}{\cos\varphi} \leqslant \frac{1}{\cos\psi}$$

Poniendo $\varrho(t) = \int_t^\infty e^{-p_0\tau} F(\tau)\,d\tau$, para cada $\varepsilon > 0$ habrá un $t_0 = t_0(\varepsilon)$

tal que $|\varrho(t)| < \varepsilon$ para $t > t_0$. Por otra parte se tiene, integrando por partes:

$$\int_r^s e^{-pt}\,\mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t = \int_r^s e^{-(p-p_0)t}\,[e^{-p_0 t}\,\mathrm{F}(t)]\mathrm{d}t =$$

$$= \Big[-e^{-(p-p_0)t}\,\varrho(t)\Big]_r^s - (p-p_0)\int_r^s e^{-(p-p_0)t}\,\varrho(t)\,\mathrm{d}t \quad ,$$

y entonces, si $s > r > t_0(\varepsilon)$:

$$\left|\int_r^s e^{-pt}\,\mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant e^{-\mathrm{R}(p-p_0)s}\,|\,\varrho(s)\,| + e^{-\mathrm{R}(p-p_0)r}\,|\,\varrho(r)\,| +$$

$$+ \,|\,p-p_0\,|\int_r^s e^{-\mathrm{R}(p-p_0)t}\,|\,\varrho(t)\,|\,\mathrm{d}t < e^{-\mathrm{R}(p-p_0)s}\,.\,\varepsilon +$$

$$+ \,e^{-\mathrm{R}(p-p_0)r}\,.\,\varepsilon + |\,p-p_0\,|\,\varepsilon\,.\int_r^\infty e^{-\mathrm{R}(p-p_0)t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \varepsilon\left[e^{-\mathrm{R}(p-p_0)s} + e^{-\mathrm{R}(p-p_0)r} + \frac{|\,p-p_0\,|}{\mathrm{R}(p-p_0)}\,e^{-\mathrm{R}(p-p_0)r}\right] < \varepsilon\left[2 + \frac{1}{\cos\psi}\right].$$

TEOR. 8. *La integral de* LAPLACE [XXIX-61] *converge uniformemente en todo dominio acotado interior al semiplano de convergencia.*

Resulta de los dos teoremas anteriores, pues, respecto del extremo superior, un tal dominio puede incluirse en un rectángulo de lados paralelos a los ejes, interior al semiplano de convergencia, y por tanto en un ángulo [XXIX-89].

Estas propiedades bastan para demostrar la analiticidad de $\mathrm{f}(p)$ (ver *f*), por lo que señalamos, sin demostración, estos otros teoremas referentes a la convergencia uniforme:

α) *Si la integral* [XXIX-61] *converge absolutamente en* $p = p_0$, *converge uniformemente en el semiplano* $\mathrm{R}(p) > \mathrm{R}(p_0)$.

β) *Si* [XXIX-61] *es uniformemente convergente en la recta* $\mathrm{R}(p) = k$, *también lo es en el semiplano* $\mathrm{R}(p) \geqslant k$.

γ) *O bien* [XXIX-61] *converge uniformemente en todo semiplano, o bien en ninguno, o bien existe una "abscisa de convergencia uniforme"* u, *tal que en el semiplano* $\mathrm{R}(p) \geqslant k$ *hay convergencia uniforme si* $k > u$, *y no la hay si* $k < u$. *En los dos primeros casos pondremos respectivamente* $u = -\infty$, $u = +\infty$.

El semiplano $\mathrm{R}(p) > u$ se llama *semiplano de convergencia uniforme*, ¡pero *en él* la convergencia no es necesariamente uniforme!

f) *Regularidad.* — TEOR. 9. *La función* $\mathrm{f}(p)$ *definida por* [XXIX-61] *es analítica regular en el semiplano de convergencia* $\mathrm{R}(p) > c$. *Sus infinitas derivadas se obtienen derivando respecto del parámetro* p *bajo el signo integral*:

[XXIX-90] $$\mathrm{f}^{(n)}(p) = (-1)^n\int_0^\infty e^{-pt}t^n\,\mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t \quad .$$

Resulta del teor. 8 en virtud de la extensión del teor. 1 de £ 115-9 señalada en nota 3 de ese parágrafo.

Por la analogía con las series de potencias señalada en *b*, podría creerse que $\mathrm{f}(p)$ debe tener por lo menos una singularidad en la recta $\mathrm{R}(p) = c$, contorno del semiplano de convergencia. Que esto no ocurre necesariamente lo muestra el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 11. La integral

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, e^t \operatorname{sen} e^t \, dt = \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\, dx \quad ,$$

tiene abscisa de convergencia $c = 0$ (§ 80, Ej. 2, *b*). Para $R(p) > 0$ se tiene por integración por partes:

$$\text{[XXIX-91]} \qquad f(p) = \cos 1 - p\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{p+1}}\, dx \quad ,$$

y como esta integral converge para $R(p) > -1$, [XXIX-91] prolonga analíticamente $f(p)$ al semiplano $R(p) > -1$. Por sucesivas integraciones por partes puede probarse que $f(p)$ es una función entera.

g) *Propiedad operacional fundamental.* — TEOR. 10. *Si las dos funciones* $F(t)$ *y* $F'(t)$ *son L-transformables, existe y es finito el límite* $F(0^+) = \lim F(t)$ *para* $t \to +0$, *y para todo p interior a los semiplanos de convergencia de ambas integrales* [XXIX-61] *y*

$$\text{[XXIX-92]} \qquad L\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}\, F'(t)\, dt \quad ,$$

se tiene

$$\text{[XXIX-93]} \qquad L\{F'(t)\} = p\, L\{F(t)\} - F(0^+) \quad .$$

Sea p_0 un valor de p donde converjan [XXIX-61] y [XXIX-92]. De

$$\text{[XXIX-94]} \qquad \int_r^s e^{-p_0 t}\, F'(t)\, dt = \left[e^{-p_0 t}\, F(t)\right]_r^s + p_0 \int_r^s e^{-p_0 t}\, F(t)\, dt \quad ,$$

y la existencia de límites de ambas integrales para $r \to +0$ y $s \to +\infty$, sigue que la función continua $e^{-p_0 t}\, F(t)$ tiene límites finitos para $t \to +0$, y para $t \to +\infty$. Entonces, por una parte, es acotada:

$$\text{[XXIX-95]} \qquad |e^{-p_0 t}\, F(t)| < K \quad ,$$

y por otra existe finito $F(0^+)$ pues $\lim\limits_{t \to +0} e^{-p_0 t}\, F(t) = \lim\limits_{t \to +0} F(t)$.

Si p está en las condiciones del enunciado puede elegirse el precedente p_0 tal que $R(p) > R(p_0)$, entonces por [XXIX-95] es

$$|e^{-pt}\, F(t)| = |e^{-(p-p_0)t} \cdot e^{-p_0 t}\, F(t)| = e^{-R(p-p_0)t} \cdot |e^{-p_0 t}\, F(t)| < \\ < K \cdot e^{-R(p-p_0)t} \to 0 \; \textit{para} \; t \to +\infty$$

y por [XXIX-94], escrita con p en lugar de p_0, haciendo $r \to +0$, $s \to +\infty$, resulta [XXIX-93].

Si $F(0^+) = 0$, es $L\{F'(t)\} = p\,L\{F(t)\}$ y a la *derivación* de $F(t)$ corresponde la *multiplicación por p* de su transformada.

Si $F(t)$, $F'(t)$, ..., $F^{(r)}(t)$ son L-transformables se tiene sucesivamente para p *interior* a 2, 3, ..., $r+1$ semiplanos de convergencia:

$$\text{[XXIX-96]} \qquad L\{F''(t)\} = pL\{F'(t)\} - F'(0^+) = \\ = p^2 L\{F(t)\} - p\,F(0^+) - F'(0^+) \quad ;$$

$$\text{[XXIX-97]} \qquad L\{F'''(t)\} = pL\{F''(t)\} - F''(0^+) = \\ = p^3 L\{F(t)\} - p^2 F(0^+) - \\ - pF'(0^+) - F''(0^+) \quad ;$$

....

$$\text{[XXIX-98]} \qquad L\{F^{(r)}(t)\} = p^r L\{F(t)\} - p^{r-1} F(0^+) - \\ \ldots - pF^{(r-2)}(0^+) - F^{(r-1)}(0^+) \quad .$$

Si tanto la función $F(t)$, *continua para* $t \geqslant 0$, como su función in-

tegral $\int_0^t F(\tau)\, d\tau = \Phi(t)$, son L-transformables, por ser $\Phi'(t) = F(t)$, $\Phi(0) = 0$, será por [XXIX-93] $L\{F(t)\} = pL\{\Phi(t)\}$, o sea

[XXIX-99] $$L\left\{\int_0^t F(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{p}\, L\{F(t)\} \quad ,$$

es decir, a la operación de *integración indefinida* corresponde la *división por p* de la transformada de LAPLACE.

h) *Cambios lineales de variables.* — h_1) A partir de una función L-transformable $F(t)$ formemos la nueva función

[XXIX-100] $$F_1(t) = F(at - b)\,.\,1(at - b) \quad , \quad (a > 0,\ b > 0) \quad ,$$

(donde el segundo factor es innecesario si se supone, como suele hacerse, que $F(\tau) = 0$ para $\tau < 0$). Poniendo $\tau = at - b$, de donde $t = (\tau + b)/a$, resulta:

$$L\{F_1\} = \int_0^{\infty} e^{-pt}\, F(at - b)\,.\,1(at - b)\, dt =$$

$$= \frac{1}{a}\, e^{-bp/a} \int_{-b}^{\infty} e^{-p\tau/a}\, F(\tau)\,.\,1(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{a}\, e^{-bp/a} \int_0^{\infty} e^{-p\tau/a}\, F(\tau)\, d\tau \quad ,$$

es decir

[XXIX-101] $$f_1(p) = \frac{1}{a}\, f\left(\frac{p}{a}\right) e^{-bp/a} \quad ,$$

En especial, la transformada de LAPLACE de $F_1(t) = F(at)$, $(a > 0)$ es

[XXIX-102] $$f_1(p) = \frac{1}{a}\, f\left(\frac{p}{a}\right) \quad ,$$

y la de $F_1(t) = F(t - b)\,.\,1(t - b)$, $(b > 0)$ es:

[XXIX-103] $$f_1(p) = e^{-bp}\, f(p) \quad .$$

h_2) Hagamos ahora un cambio lineal en la variable p de $f(p)$; poniendo

[XXIX-104] $$f_1(p) = f(\alpha p + \beta) \quad , \quad \alpha > 0 \quad ,$$

cualquiera sea β (real o complejo) $f_1(p)$ queda también definida en un semiplano. Se tiene $(\alpha t = \tau)$:

$$f_1(p) = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha p + \beta)t}\, F(t)\, dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty} e^{-p\tau}\left[e^{-\beta\tau/\alpha}\, F\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)\right] d\tau \quad ,$$

es decir

[XXIX-105] $$F_1(t) = \frac{1}{\alpha}\, F\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-\beta t/\alpha} \quad .$$

En especial, $f_1(p) = f(\alpha p)$ es L-transformada de

[XXIX-106] $$F_1(t) = \frac{1}{\alpha}\, F\left(\frac{t}{\alpha}\right) \quad .$$

y $f_1(p) = f(p + \beta)$, de

[XXIX-107] $$F_1(t) = e^{-\beta t} F(t) \quad .$$

i) Las propiedades vistas en *f*, *g*, y *h*, permiten ampliar la lista de transformadas de LAPLACE de los ejemplos 2 a 10 o reencontrar algunas de ellas.

EJEMPLOS: 12. De [XXIX-77] resulta [XXIX-87] en virtud de [XXIX-103]. De la misma [XXIX-77] resulta [XXIX-79] por [XXIX-107] con $\beta = -b$. De esta [XXIX-79] resulta por [XXIX-90]:

[XXIX-108] $$L\{t^n e^{bt}\} = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \frac{1}{p-b} =$$
$$= (-1)^n \frac{(-1)^n n!}{(p-b)^{n+1}} = \frac{n!}{(p-b)^{n+1}}$$

que también resulta de [XXIX-84] en virtud de [XXIX-107] con $\beta = -b$.

13. Para $F(t) = t^n$ es $F(0) = F'(0) = ... = F^{(n-1)}(0) = 0$; $F^{(n)}(t) = n!$, $F^{(n+1)}(t) = 0$; entonces, aplicando [XXIX-98] con $r = n+1$ resulta
$$L\{F^{(n+1)}(t)\} = 0 = p^{n+1} L\{t^n\} - n! \quad ,$$
y de aquí [XXIX-84].

EJERCICIOS: 2. Hallar [XXIX-81] aplicando [XXIX-96] a $F(t) = \operatorname{sen} \omega t$.

3. De la relación (que resulta del cambio de variables $x = \sqrt{pt}$, de donde $dx = \sqrt{p}\, dt/(2\sqrt{t})$, y [87-4]):

[XXIX-109] $$L\{t^{-\frac{1}{2}}\} = \int_0^\infty e^{-pt} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{1}{2}},$$

deducir por [XXIX-90]:

[XXIX-110] $$L\{t^{n+\frac{1}{2}}\} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{p^{n+(3/2)}} \cdot \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{n+1}},$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots) \quad .$$

j) *Convolución de funciones.* — El producto de dos funciones L-transformables no es necesariamente L-transformable; por ejemplo lo es $t^{-\frac{1}{2}}$ (ejercicio 3) pero no $t^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{-\frac{1}{2}} = t^{-1}$. Pero veremos que existe entre las funciones L-transformables $F(t)$, $G(t)$, ... una operación binaria $F * G$ con propiedades análogas a las del producto, cuyo resultado se transforma por L en el producto de las transformadas: $L\{F * G\} = L\{F\} \cdot L\{G\}$.

Buscando una pauta en la analogía señalada en *b*, observemos que dos series de potencias

[XXIX-111] $$\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = f(z) \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} G_n z^n = g(z) \quad ,$$

para *z* interior a ambos círculos de convergencia, se pueden multiplicar por la regla del producto de CAUCHY dando:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{n} F_\nu \; G_{n-\nu}\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} H_n z^n = f(z) \cdot g(z) = h(z) \quad ,$$

es decir, considerando las funciones [XXIX-111] como *transformadas* de las sucesiones de coeficientes $\{F_n\}$, $\{G_n\}$, su producto corresponde a la operación de formar, a partir de las sucesiones $\{F_n\}$, $\{G_n\}$, la nueva sucesión

[XXIX-112] $$H_n = F_0G_n + F_1G_{n-1} + \dots + F_nG_0 = \sum_{\nu=0}^{n} F_\nu \, G_{n-\nu}$$

Lo análogo a [XXIX-112] será formar a partir de las funciones $F(t)$, $G(t)$, la nueva función

[XXIX-113] $$H(t) = \int_0^t F(\tau)\, G(t-\tau)\, d\tau \quad ,$$

llamada *convolución* o *producto de composición* (fr. *composition*; it. *prodotto di composizione*; i. *convolution*; al. *Faltung* = *plegamiento*) de las dos funciones (*factores*) F y G, e indicada por $F(t) * G(t)$.

La convolución tiene una gran importancia en la teoría de la transformación de LAPLACE, debido a que su transformada es el producto (ordinario) de las transformadas de los dos factores:

[XXIX-114] $$L\{F * G\} = L\{F\} \,.\, L\{G\} \quad .$$

Las condiciones de validez de [XXIX-114] están dadas por teoremas análogos a los de CAUCHY (§ 22-6, b_3), MERTENS y ABEL (§ 22-6, b_4) para producto de series. Demostraremos solamente el siguiente teorema (de HORN-BOREL), análogo al de CAUCHY:

TEOR. 11. *Si las integrales de* LAPLACE $L\{F\}$ y $L\{G\}$ *son ambas absolutamente convergentes para* $p = p_0$, *entonces es también absolutamente convergente en* p_0 *la integral* $L\{F * G\}$, *y verifica* [XXIX-114].

Se tiene, en efecto, siendo D el primer cuadrante del plano τv:

$$L\{F\}\,.\,L\{G\} = \int_0^\infty e^{-p\tau} F(\tau) d\tau \,.\, \int_0^\infty e^{-pv} G(v) dv =$$

$$= \int\int_D e^{-p(\tau-v)} F(\tau) G(v) d\tau\, dv$$

y la convergencia *absoluta* de la integral doble permite integrar "por triángulos" (fig. 445) obteniéndose:

$$\int_0^\infty e^{-pt} \left\{ \int_0^t F(\tau) G(t-\tau) d\tau \right\} dt =$$
$$= L\{F * G\} \quad .$$

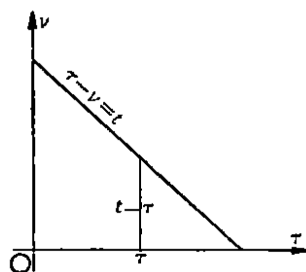


Fig. 445.

EJEMPLOS: 14. Si $F(t) = t^{a-1}$ $(a > 0)$, $G(t) = t^{b-1}$ $(b > 0)$, es $F * G = H(t) =$

$$\int_0^t \tau^{a-1}(t-\tau)^{b-1} d\tau = B(a, b) \,.\, t^{a+b-1},$$

siendo $B(a, b)$ la función *beta de* EULER definida por [XXIX-48]. Por [XXIX-114] será entonces para $R(p) > 0$:

$$B(a, b) \int_0^\infty e^{-pt}\, t^{a+b-1} dt = \int_0^\infty e^{-pt}\, t^{a-1} dt \,.\, \int_0^\infty e^{-pT}\, T^{b-1} dT$$

y por [XXIX-39] [válida para $R(s) > 0$] resulta:

$$B(a, b) \frac{\Gamma(a+b)}{p^{a+b}} = \frac{\Gamma(a)}{p^a} \,.\, \frac{\Gamma(b)}{p^b} \quad ,$$

o sea [XXIX-58]: $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$.

15. Por ser

$$1(t-b) * F(t) = \int_0^t 1(t-\tau-b)\, F(\tau)\, d\tau = \int_0^{t-b} F(\tau)\, d\tau$$

resulta de [XXIX-87] y [XXIX-114]:

[XXIX-115] $$L\left\{\int_0^{t-b} F(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{e^{-bp}}{p} \cdot L\{F\} ,$$

que generaliza [XXIX-99].

El producto de composición tiene las propiedades del producto ordinario. Las distributivas respecto de la suma

[XXIX-116] $$\begin{cases} F * (G_1 + G_2) = F * G_1 + F * G_2 \\ (F_1 + F_2) * G = F_1 * G + F_2 * G \end{cases}$$

son inmediatas. La conmutativa

[XXIX-117] $$F * G = G * F$$

resulta por el cambio de variables $t - \tau = u$ en [XXIX-113] y la asociativa:

[XXIX-118] $$(F * G) * K = F * (G * K)$$

resulta de [XXIX-114] por tener ambos miembros la misma transformada de Laplace $f(p) \cdot g(p) \cdot k(p)$ (cfr. k). Indicaremos esta convolución reiterada por $F * G * K$.

k) *Unicidad de la transformación inversa.* — Volviendo a la analogía señalada en *b* con las series de potencias, recordemos que en [XXIX-63] no sólo los coeficientes F_n determinan la función $\varphi(z)$ sino que *recíprocamente esta función determina la sucesión* $\{F_n\}$ *de coeficientes*, ya sea mediante sus derivadas por $F_n = \varphi^{(n)}(0)/n!$, ya mediante integrales por [115-23]. La L-transformada $f(p)$ sólo podrá determinar la función-objeto $F(t)$ *unívocamente, si convenimos en considerar idénticas dos funciones casi iguales o equivalentes* (L) (es decir, § 95-2, def., iguales salvo en un conjunto de medida nula), y veremos en l que $F(t)$ puede calcularse a partir de $f(p)$ mediante una integral en el campo complejo. También hay, entre otras fórmulas de inversión, expresiones de $F(t)$ mediante las derivadas de $f(p)$.

Puesto que nos limitaremos a funciones $F(t)$ *integrables* (R-C), de entre ellas las $F_1(t)$, $F_2(t)$, casi iguales, son aquellos cuya diferencia $N(t)$ tiene *función integral nula*: $\int_0^t N(\tau)\, d\tau \equiv 0$. En particular, *si* $F_1(t)$ y $F_2(t)$ *son continuas, deben ser idénticas*, pues si fuera $N(t_0) \neq 0$, digamos $N(t_0) = a > 0$, habría un $\varepsilon > 0$ tal que $N(t) > \frac{1}{2}a > 0$ para $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$, y de $\int_0^{t_0-\varepsilon} N(\tau)\, d\tau = 0$ seguiría $\int_0^{t_0+\varepsilon} N(\tau)\, d\tau > a\varepsilon > 0$.

Probaremos el siguiente teorema de unicidad:

Teor. 12. *La transformada de* Laplace $f(p)$ *de una función continua* $F(t)$ *es idénticamente nula sólo si lo es* $F(t)$. *En consecuencia, dos funciones continuas diferentes no pueden tener la misma trasformada de* Laplace.

Este teorema resulta del siguiente (M. Lerch, 1903):

Teor. 13. *Si la transformada de* Laplace $f(p)$ *de una función continua* $F(t)$ *se anula en una infinidad de puntos cuyos afijos* $p = p_0 + nr$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *forman una progresión aritmética de razón o diferencia positiva* $r > 0$, *es* $F(t) \equiv 0$ [*y entonces* $f(p) \equiv 0$].

Pues poniendo $f(p)$ en la forma [XXIX-76] resulta de la hipótesis

$$\int_0^{\infty} e^{-nrt} f(t; p_0) dt = 0, \; n = 1, 2, \ldots; \; f(t; p_0) \quad \textit{continua};$$

y con el cambio de variable $e^{-rt} = x$, $f(-\frac{\ln x}{r}; p_0) = \varphi(x)$:

$$[XXIX\text{-}119] \qquad \int_0^1 x^{n-1} \varphi(x) \, dx = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Pero $\varphi(x)$ es continua en $0 \leqslant x \leqslant 1$, definiendo $\varphi(0)$ por $\varphi(0) = \lim_{t \to \infty} f(t; p_0)$; y por ser denso el sistema $\{1, x, x^2, \ldots\}$ (§ 97-6) resulta de [XXIX-119] $\varphi(x) \equiv 0$, de donde $f(t; p_0) \equiv 0$ con lo que, por anularse también su derivada $e^{-p_0 t} F(t)$, es $F(t) \equiv 0$.

l) Fórmula de inversión de MELLIN. — Para la transformación de LAPLACE [XXIX-61] vale la fórmula de inversión de MELLIN (también llamada de MELLIN-FOURIER o de RIEMANN):

$$[XXIX\text{-}120] \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(p) e^{pt} \, dp = \begin{cases} = F(t) & si \; t > 0 \\ = 0 & si \; t < 0 \end{cases}$$

que puede obtenerse *formalmente* (ver § 99 - Ej. 3) de las fórmulas de reciprocidad para la transformación de FOURIER.

Pero [XXIX-120] no vale sin ciertas restricciones. Veamos una demostración basada en la teoría de las funciones analíticas y restringida a una clase de funciones $f(p)$ suficientemente amplia para las aplicaciones más frecuentes.

TEOR. 14. *Si* $f(p)$ *es analítica en un semiplano* $R(p) \geqslant \sigma_0$ *y en él es*

$$[XXIX\text{-}121] \qquad |f(p)| < M|p|^{-h} \quad , \quad h > 1,$$

$$[XXIX\text{-}122] \qquad f(\bar{p}) = \overline{f(p)},$$

entonces existe

$$[XXIX\text{-}123] \qquad \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \to \infty} \int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} f(p) e^{pt} \, dp = F(t)$$

para todo $\sigma \geqslant \sigma_0$, *y define una función* $F(t)$, *real para* t *real, independiente de* $\sigma (\geqslant \sigma_0)$, *cuya transformada de* LAPLACE *es* $f(p)$, *es decir, resuelve* [XXIX-61] *como ecuación integral en* $F(t)$.

Diremos que $F(t)$ es la *antitransformada de* LAPLACE de $f(p)$, escribiendo $F(t) = L^{-1}\{f(p)\}$.

DEM. La integral en [XXIX-123] puede escribirse

$$i \cdot e^{\sigma t} \int_0^{T} [f(\sigma - i\tau) e^{-i\tau t} + f(\sigma + i\tau) e^{i\tau t}] d\tau$$

y poniendo $f(\sigma + i\tau) = u(\sigma, \tau) + i \, v(\sigma \tau)$ con u y v reales, con lo que por [XXIX-122] es $f(\sigma - i\tau) = u - iv$, [XXIX-123] se escribe en la forma

$$[XXIX\text{-}124] \qquad \frac{1}{\pi} e^{\sigma t} \int_0^{\infty} [u(\sigma, \tau) \cos \tau t - v(\sigma, \tau) \operatorname{sen} \tau t] \, d\tau = F(t)$$

llamada *forma real de la fórmula de inversión.*

Por [XXIX-121], tanto u como v son $< M(\sigma^2 + \tau^2)^{-h/2}$, y entonces el in-

tegrando de [XXIX-124] es $< 2\,M(\sigma^2 + \tau^2)^{-h/2}$, y como $h > 1$, la integral en [XXIX-124] converge absolutamente y uniformemente en t.

Para probar que $F(t)$ dada por [XXIX-123] no depende de $\sigma (\geqslant \sigma_0)$ se aplica el teorema de CAUCHY (§ 115-2, c) para obtener

$$\int_C f(p)\ e^{pt}\,dp = 0$$

siendo C el contorno rectangular de vértices $\sigma \pm i\tau$, $\sigma' \pm i\tau$, y se observa que para $\tau \to \infty$ tienden a cero las integrales sobre los lados horizontales. Por ejemplo, por [XXIX-121]

$$\left|\int_{\sigma+i\tau}^{\sigma'+i\tau} f(p)e^{pt}\,dp\right| < \frac{M}{\tau^h}\int_{\sigma}^{\sigma'} e^{pt}\,dp \to 0 \quad .$$

Probemos ahora que la transformación de LAPLACE de la función dada por [XXIX-123] ó [XXIX-124] es $f(p)$. Se tiene para $R(p_0) > \sigma$:

$$L_{p_0}\{F(t)\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-p_0 t}\, e^{\sigma t}\,dt \int_0^{\infty} [u \cos \tau t - v \operatorname{sen} \tau t]\ d\tau \quad .$$

Por la convergencia uniforme respecto de t de la integral interior, puede invertirse el orden de integración y se tiene, retornando a la forma compleja:

$$L_{p_0}\{F(t)\} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\tau\to\infty}\int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} f(p)\,dp\int_0^{\infty} e^{(p-p_0)t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\tau\to\infty}\int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau}\frac{f(p)}{p-p_0}\,dp = f(p_0) \quad ,$$

como se ve aplicando el teorema de CAUCHY (§ 115-2 c), al contorno del semicírculo a derecha del diámetro $(\sigma - i\tau,\ \sigma + i\tau)$, haciendo luego $\tau \to \infty$ y teniendo en cuenta [XXIX-121].

OBS. Como se ve, en [XXIX-120] debe tomarse el valor principal de CAUCHY de la integral impropia. La fórmula de MELLIN da una inversión de la transformación de LAPLACE bilateral L_{II}, en cuyo caso el segundo miembro de [XXIX-120] es siempre $F(t)$. Pero L_{II} se reduce a $L = L_I$ si $F(t) = 0$ para $t < 0$.

m) *Antitransformadas de funciones racionales.* — Sea

[XXIX-125] $$f(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$$

fracción irreducible, es decir P y Q polinomios sin ceros comunes. Veremos que la antitransformada existe, y puede expresarse fácilmente, sólo si la fracción es propia, es decir, si el grado de P es menor que el de Q.

m_1) Si $P(p)/Q(p)$ es propia, admite (§ 46-4, b_2) una descomposición en fracciones simples como [46-6]. De la linealidad de L sigue la de L^{-1} y entonces basta conocer la antitransformada de una fracción simple: $A/(p-a)^n$. Ahora bien, de [XXIX-84] (con $n-1$ en lugar de n) y h_2 resulta

$$L\{t^{n-1}e^{at}\} = \frac{(n-1)!}{(p-a)^n}$$

y entonces

$$L^{-1}\left\{\frac{A}{(p-a)^n}\right\} = A\ L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)^n}\right\} = \frac{At^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{at}$$

EJEMPLO 16. De

$$\frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{(p+i)^2} - \frac{1}{(p-i)^2} + \frac{i}{p+i} - \frac{i}{p-i} \right]$$

sigue:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{4}\left[-te^{-it} - te^{it} + ie^{-it} - ie^{it}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ (\text{sen}\ t - t\cos t) \quad .$$

m_2) Demostraremos ahora que una transformada de LAPLACE no puede tener un polo en $p = \infty$ y en consecuencia:

Las fracciones racionales impropias, y en particular los polinomios, no son antitransformables.

Ello es consecuencia del teorema siguiente:

TEOR. 15 *Si la integral* [XXIX-61] *converge para* $p = p_0$, *entonces, uniformemente en cada ángulo de* STOLZ [XXIX-89], $f(p) \to 0$ *para* $p \to \infty$. *En especial* $f(p) \to 0$ *para* $p \to \infty$ *en cada semirrecta* $\text{Arg}\ (p - p_0) = \alpha$, $|\alpha| < \frac{1}{2}\pi$.

Pongamos

$$f(p) = \int_0^{T_1} e^{-pt}F(t)dt + \int_{T_1}^{T_2} e^{-pt}F(t)dt + \int_{T_2}^{\infty} e^{-pt}F(t)dt \quad .$$

Por teor. 6, dado $\varepsilon > 0$ puede determinarse T_1 suficientemente pequeño para que en el semiplano $R(p) > R(p_0)$ sea

$$\left|\int_0^{T_1} e^{-pt}F(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad ,$$

y por teor. 7 se puede determinar T_2 suficientemente grande para que en la región [XXIX-89] sea

$$\left|\int_{T_2}^{\infty} e^{-pt}F(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Fijados T_1 y T_2 se puede determinar σ suficientemente grande para que si $R(p) > \sigma$, sea:

$$\left|\int_{T_1}^{T_2} e^{-pt}F(t)dt\right| \leqslant e^{-\sigma T_1}\int_{T_1}^{T_2} |F(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3} \quad ,$$

y entonces, si p está en la región [XXIX-89] y es $R(p) > \sigma$, resulta $|f(p)| < \varepsilon$.

m_3) Veremos en Ap. III, 10, *f*, que no obstante lo visto en m_2, puede ampliarse el concepto de función de modo que también los polinomios sean antitransformables.

Otro ejemplo de función que no es L-antitransformable es $f(p) = e^{-ap}$ (pero le es aplicable, como veremos en Ap. III, lo dicho para los polinomios). Probemos al menos que no puede existir una $F(t)$ *continua* tal que $L\{F(t)\} = e^{-ap}$. En efecto, en tal caso sería por [XXIX-90]:

$$L\left\{\frac{t\,F(t)}{a}\right\} = \frac{1}{a}\,L\{t\,F(t)\} = \frac{1}{a}\ (-1)\ \frac{d}{dp}\,e^{-ap} = e^{-ap}$$

en contradicción con el teorema 12.

IX. **Bibliografía.** — 1. Muchos de los cursos y tratados generales de Análisis matemático traen capítulos o secciones más extensas sobre la teoría de las funciones analíticas de variable compleja. Entre ellos deben destacarse, ante todo, los grandes tratados franceses (citados en Cap. VI, nota VI, 5) de GOURSAT y VALIRON, que dedican gran parte de su contenido a un tratamiento detenido del tema. El primero dedica gran parte de su volumen II (7ª ed., 1949) a una exposición ampliada y modernizada por J. FAVARD; el tratado de VALIRON dedica unas 200 páginas de su vol. I a un enfoque general y moderno de la teoría, con énfasis en los métodos geométricos y la teoría de la representación conforme, terminando con funciones elípticas y funciones analíticas definidas por integrales, y los primeros capítulos de su vol. II a temas más especiales: funciones algebraicas y sus superficies de RIEMANN, sirviendo de base al capítulo siguiente sobre integrales abelianas, y finalmente funciones analíticas de varias variables y método de las funciones mayorantes con aplicación a la teoría de las ecuaciones diferenciales.

También tratan el tema, aunque en forma sucinta, H. VON MANGOLDT (vol. III), A. DUSCHEK (vol. III) (citados en Cap. XVIII, nota III, 1), los libros de J. REY PASTOR citados en Cap. VI, nota VI, 2, especialmente *Elementos de la teoría de funciones*; el vol. II de COURANT (citado en Cap. VI, nota VI, 2) y en fragmentos distribuídos en el texto fundamental y notas complementarias SEVERI (citado en Cap. IV, nota III, 1).

2. Breve introducción en un nivel elemental da el libro de

K. KNOPP: *Elemente der Funktionentheorie* (Sammlung Göschen, de Gruyter, Berlín, 1936), con traducción inglesa de F. BAGEMILH: *Elements of the theory of functions* (Dover, Nueva York, 1953),

que puede servir de preliminar al siguiente (ya citado en Cap. XI, nota IV, 3), que constituye una introducción más completa al tema, siguiendo lineamientos clásicos:

K. KNOPP: *Funktionentheorie*. I: *Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen* (5ª ed., 1937) ; II. *Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie* (Sammlung Göschen, de Gruyter, Berlín; 5ª ed., 1937), con traducción inglesa de F. BAGEMILH; *Theory of functions*; Part I: *Elementary theory*; Part II: *Advanced theory* (Dover, Nueva York, 1953).

Traducción castellana de J. G. ÁLVAREZ UDE de los dos tomitos precedentes en un solo volumen es:

K. KNOPP: *Teoría de funciones* (Labor, Barcelona y Bs. As., 1926).

Una introducción estimulante, a la vez simple y sustancial, da la obra:

J. F. RITT: *Theory of functions* (Kings Crown Press, Nueva York, 1947).

Trata con detenimiento la teoría clásica, tópicos de interés para las aplicaciones y funciones especiales, el libro, que supone pocos conocimientos en el lector, y trae numerosos ejemplos:

H. DÖRRIE: *Einführung in die Funktionentheorie* (Oldenbourg, Munich, 1951).

Otras obras de introducción a la teoría general son las de PHILLIPS y M. O. GONZÁLEZ (citadas. en Cap. XI, nota IV, 3), así como:

D. R. CURTISS: *Analytic functions of a complex variable* (Open Court, La Salle, 1926) ;

W. F. OSGOOD: *Functions of a complex variable* (Pekín, 1936; Stechert, Nueva York, 1938) ;

T. M. MAC ROBERT: *Functions of a complex variable* (Macmillan, Londres; 3ª ed., 1947).

Muy didáctico, con buena selección de temas, es el libro de PINCHERLE (citado en Cap. XI, nota IV, 3).

Con extensa sección sobre el material preliminar topológico y de variable real, da una introducción rigurosa y autocontenida la obra:

W. J. THRON: *Introduction to the theory of functions of a complex variable* (Wiley, Nueva York, 1953).

Excelente introducción con los temas fundamentales claramente delineados en las hipótesis más simples, da la breve obra con numerosas ilustraciones geométricas:

F. TRICOMI: *Funzioni analitiche* (Zanichelli, Bolonia, 1952; reimpr. de la 2ª ed., 1946).

Una exposición lúcida y de rico contenido sobre tópicos seleccionados de la teoría, tratados en forma de destacar los aspectos geométricos y las partes más elementales de las teorías estudiadas, y elegidos evitando superposiciones con otras conocidas monografías sobre el tema, da la breve obra, con autonomía de exposición de sus diversos temas, y numerosas referencias para estudios más detenidos:

G. VALIRON: *Fonctions analytiques* (Presses Univ. de France, París, 1954).

3. Orientadas hacia las aplicaciones, traen capítulos sobre funciones analíticas las obras de MORSE y FESHBACH (citada en Cap. XXIII, nota V, 3), H. y B. S. JEFFREYS (citada en Cap. XXVII, nota IV, 7) y F. SCHWANK (citada en Cap. XXVIII, nota XI, 4).

Dirigida a estudiantes de ingeniería, se procura sacar partido utilitario de muy sencillos prolegómenos matemáticos en:

J. REY PASTOR: *Aplicaciones físicas y técnicas de las funciones de variable compleja* (Centro Est. Ingen., Buenos Aires, 1938).

Introducción elemental con aplicaciones referentes al cálculo de integrales por la teoría de residuos, y en relación con temas de representación conforme, es:

R. V. CHURCHILL: *Introduction to complex variables and applications* (Mc Graw-Hill, Nueva York, 1948).

También orientado hacia las aplicaciones está:

R. ROTHE, F. OLLENDORFF y K. POHLHAUSEN: *Funktionentheorie und ihre Anwendung in der Technik* (Springer, Berlín, 1931); traducción inglesa de A. HERZENBERG: *Theory of functions as applied to engineering problems* (Tech. Press, Cambridge, Mass., 1933).

Breve y elemental introducción a algunos tópicos da:

S. L. GREEN: *The theory and use of the complex variable. An introduction* (Pitman, Londres, 2ª ed., 1950).

Adecuada a sus fines, conteniendo temas generales de teoría de funciones en la primera de sus cuatro partes, es la obra de MC LACHLAN citada en Cap. XXV, nota IV, 6.

Obra fuy reputada es el instructivo curso destinado a alumnos que hayan de aplicar la teoría

E. T. COPSON: *An introduction to the theory of functions of a complex variable* (Oxford, at the Clarendon Press, 1935).

4. Entre las obras sobre la teoría general, con mayor variedad de temas, está la siguiente en dos tomos, que sigue líneas clásicas en su tratamiento:

G. SANSONE: *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa* (Cedam, Padova, 1947).

Con rico contenido en texto, ejemplos y ejercicios, y adecuados capítulos sobre series de DIRICHLET y funciones enteras, y temas de variable real, está la obra de TITCHMARSH citada en Cap. XI, nota IV, 3.

Una exposición muy completa y a la vez muy accesible da la excelente obra de lineamientos clásicos, pero con secciones que pueden servir de introducción a estudios más avanzados sobre el problema de DIRICHLET (Cap. XXIII, nota II, b_2), funciones subarmónicas, superficies de RIEMANN, etc.:

L. V. AHLFORS: *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable* (McGraw-Hill, Nueva York, 1953).

Notable por su profundidad, densidad de estilo y original presentación es la excelente obra traducida del polaco por E. J. SCOTT, que cubre un material considerablemente mayor que el usual en textos de introducción, con detenida consideración de los fundamentos topológicos y valiosos ejercicios:

S. SAKS y A. ZYGMUND: *Analytic functions* (Monografje Matematyczne, XXVIII, Varsovia, 1952).

Más detallado y riguroso que otros de su tipo y con frecuente uso de las demostraciones más recientes, es el texto introductorio con aplicaciones a la hidrodinámica y teoría del potencial, y material suplementario que sirve de ejercicios y de indicación de desarrollos más avanzados:

L. BIEBERBACH: *Einführung in die Funktionentheorie* (Verlag für Wissenschaft und Fachbuch, Bielefeld; 2ª ed., 1952).

Contiene muchas novedades de exposición y mejoras respecto de la presentación tradicional de temas especiales y destaca el punto de vista geométrico, la excelente obra cuya selección de material (sobre todo en el vol. II) está en gran medida condicionada por el interés de su autor y contiene constantes referencias a su *Reelle Funktionen* (citado en Cap. IX, nota VIII, 3):

C. CARATHÉODORY: *Funktionentheorie* (2 vols.; Birkhäuser, Basilea, 1950); traducción al inglés de F. STEINHARDT: *Theory of functions of a complex variable* (Chelsea, Nueva York; vol. I y II, 1954).

Destaca el carácter esencialmente topológico de muchos de los teoremas básicos, con demostraciones adecuadas a su enfoque, la excelente breve exposición de:

M. MORSE: *Topological methods in the theory of functions of a complex variable* (Annals of Math. Studies; nº 15. Princeton Univ. Press, 1947).

5. En las obras anteriores se sigue el método fusionista de las teorías de CAUCHY, RIEMANN y WEIERSTRASS; en cambio, se adopta sistemáticamente el método de WEIERSTRASS en:

G. VIVANTI: *Elementi della teoria delle funzioni analitiche* (Hoepli, Milano; 2ª ed., 1920).

La obra más recomendable para profundizar el estudio en las tres direcciones es:

L. BIEBERBACH: *Lehrbuch der Funktionentheorie*; Band I: *Elemente der Funktionentheorie* (1931); Band II: *Moderne Funktionentheorie* (Teubner, Leipzig, 1934; reeditados por Chelsea, Nueva York, vol. I, 4ª ed., 1945, vol. II, 2ª ed., 1945);
así como:

W. F. OSGOOD: *Lehrbuch der Funktionentheorie* (2 vols., Teubner, Leipzig, 1928-32).

Excelente comparación de los tres métodos establece:

A. HURWITZ y R. COURANT: *Funktionentheorie*: *Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen* (HURWITZ); *Geometrische Funktionentheorie* (COURANT) (Springer, Berlín, 3ª ed., 1929; reimpr. Interscience Publ., Nueva York, 1944).
pues a la exposición de HURWITZ según WEIERSTRASS, sigue la de COURANT, casi tan extensa, dedicada a los métodos geométricos, con amplia exposición de la representación conforme.

También con acertado equilibrio entre los métodos geométricos y analíticos, da una exposición clara y precisa la siguiente primera parte del primer volumen de un tratado sobre teoría de funciones que, no obstante su título, abarca temas tanto o más avanzados que la mayor parte de los libros de teoría de funciones:

H. MILLOUX y C. PISOT: (*Traité de théorie des fonctions*; Tome I) *Principes, méthodes générales*. Fascicule I. (Gauthier-Villars, París, 1953).

6. A las transformaciones lineales en relación con la geometría de LOBATCHEWSKI dedica el capítulo II de su primer tomo, la obra siguiente,

que destina los dos primeros de los cinco capítulos de su segundo tomo al principio de módulo máximo y funciones armónicas en el plano:

G. JULIA: *Principes géométriques d'analyse* (I, 1930; II, 1932; Gauthier-Villars, París).

Importantes aplicaciones de la integración en el campo complejo a una gran diversidad de campos de la Matemática, trae:

E. LINDELÖF: *Le calcul des résidus* (Gauthier-Villars, París; reeditado por Chelsea, Nueva York).

7. Sobre funciones uniformes está la clásica monografía:

G. JULIA: *Leçons sur le fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé* (Gauthier-Villars, París, 1924);

y desarrollos posteriores en el tema se encuentran en las dos obras siguientes, que basadas en gran parte en investigaciones recientes, son obras especializadas de orientación moderna:

R. NEVANLINNA: *Eindeutige analytische Funktionen* (Springer, Berlín; 2ª ed., 1953);

H. WITTICH: *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen* (Springer, Berlín, 1955).

8. Sobre superficies de RIEMANN dan adecuadas introducciones los libros de AHLFORS (citado en 4), y BIEBERBACH (citado en 5). Un tratado general de orientación moderna, que trata sobre superficies de RIEMANN y funciones analíticas sobre ellas, incluyendo resultados de la última década, es:

H. BEHNKE y F. SOMMER: *Theorie der analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen* (Springer, Berlín, 1955).

También con especial consideración de los resultados más recientes está:

A. PFLUGER: *Theorie der* RIEMANN*schen Flächen* (Springer, Berlín, 1957).

En este tema es clásico el profundo libro, cuya primera edición data de 1913 y ha sido completamente rehecho para su tercera edición:

H. WEYL: *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Teubner, Stuttgart, 3ª ed., 1955).

Da una introducción a la teoría de las superficies de RIEMANN abstractas, teoría que ha experimentado un considerable desarrollo después de la aparición de la precedente obra de WEYL, y especialmente en el último cuarto de siglo, el excelente y moderno tratado:

R. NEVANLINNA: *Uniformisierung* (Springer, Berlín, 1953).

Tratamiento profundizado de este tema da la obra de orientación moderna:

S. STOÏLOW: *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques* (Gauthier-Villars, París, 1938; 2ª ed., ampliada, 1956).

Aportes originales de varios autores trae:

Contributions to the theory of RIEMANN *surfaces* (Annals of Math. Studies, nº 30; Princeton Univ. Press, 1953).

9. Un valioso tratamiento de la teoría de las singularidades da el libro de DIENES (citado en Cap. XI, nota IV, 2).

Contiene muy importantes cuestiones, tratadas con todo rigor, el opúsculo que trata sobre funciones acotadas, sumabilidad, teoremas tauberianos, singularidades, comportamiento en el contorno, teoremas de PICARD y conexos:

E. LANDAU: *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* (Springer, Berlín; 2ª ed., 1929; reimpr.: Chelsea, Nueva York, 1946).

10. Sobre prolongación analítica da demostraciones detalladas de los teoremas fundamentales, y sólo esbozadas en otros, lo que le permite alcan-

zar enorme contenido de material valioso y completamente al día en tamaño reducido, la obra con numerosas referencias:

L. BIEBERBACH: *Analytische Fortsetzung* (Ergebnisse der Math., Springer, Berlín, 1955).

11. Algo sobre funciones enteras en general exponen BIEBERBACH (citado en 5) y TITCHMARSH (citado en Cap. XI, nota IV, 3), y más hay en la clásica monografía de

O. BLUMENTHAL: *Leçons sur la théorie des fonctions entières d'ordre infini* (Gauthier-Villars, París, 1910);

pero muy poco al lado del gran cuerpo de doctrina sobre las funciones de orden finito, elaborado por obra de LAGUERRE, POINCARÉ, BOREL, HADAMARD, PICARD, VALIRON...

Excelente exposición esencial sobre las funciones enteras contienen las conferencias de

G. VALIRON: *Fonctions entières* (Unión Matemática Argentina, Bs. As., 1947).

Obras siempre actuales sobre funciones enteras son:

G. VALIRON: *Lectures on the general theory of integral functions* (Toulouse, 1923);

E. BOREL: *Leçons sur les fonctions entières* (Gauthier-Villars, París, 1928).

Una exposición de conjunto de los progresos en los últimos 30 años sobre funciones de tipo exponencial, conteniendo en los capítulos introductorios las propiedades generales de las funciones enteras de orden finito, así como propiedades especiales de las funciones enteras con ceros negativos, y funciones de orden $\leqslant 1$, da la obra:

R. P. BOAS, JR.: *Entire functions* (Academic Press, Nueva York, 1954).

Trata fundamentalmente sobre funciones analíticas (enteras o no) de orden finito en un ángulo:

M. L. CARTWRIGHT: *Integral functions* (Cambridge Tracts, nº 49; Cambridge Univ. Press, 1956).

12. A la exposición sucinta de diversos tópicos de la teoría general, sigue el estudio de diversas funciones especiales en el campo complejo en la obra de WHITTAKER y WATSON (citada en Cap. XI, nota IV, 2). Un estudio más moderno y completo de diversas funciones trascendentes en el campo complejo da la obra de ERDÉLYI, MAGNUS, OBERHETTINGER y TRICOMI (citada en Cap. XXV, nota IV, 5). También pueden consultarse COURANT-HILBERT (citado en Cap. XVI, nota IV, 4), LENSE (citado en Cap. XXV, nota IV, 2), y las obras sobre funciones esféricas (citadas en Cap. XXIII, nota V, 6) y de BESSEL y conexas (citadas en Cap. XXVII, nota IV, 7).

Sobre la función ζ de RIEMANN está la excelente obra, versión modernizada y muy ampliada de otro libro del mismo autor (Cambridge Tracts of Math. and Math. Ph., 1930):

E. C. TITCHMARSH: *The theory of* RIEMANN *Zeta-function* (Clarendon Press, Oxford, 1951).

13. Se presentan diversas definiciones equivalentes de analiticidad, con numerosas referencias históricas, en la breve exposición:

L. HEFFTER: *Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen* (Springer, Berlín, 1955).

Concisa presentación de condiciones de analiticidad trae la monografía de

P. MONTEL: *Leçons sur les fonctions univalentes et multivalentes* (Gauthier-Villars, París, 1933).

14. Presta más atención a la representación conforme que otros libros de su tipo la excelente introducción con material clásico:

H. HORNICH: *Lehrbuch der Funktionentheorie* (Springer, Viena, 1950).

Con claridad de estilo trata los aspectos teóricos y prácticos de la representación conforme la obra de orientación moderna, con abundantes y valiosos ejercicios, cuya última parte da una excelente introducción a los más recientes progresos de la teoría:

Z. NEHARI: *Conformal mapping* (McGraw-Hill, Nueva York, 1952).

La teoría es cuidadosamente expuesta, desde los conceptos fundamentales hasta los teoremas de existencia, unicidad y distorsión, en la breve y excelente introducción:

L. BIEBERBACH: *Einführung in die Konforme Abbildung* (Sammlung Göschen; de Gruyter, Berlín; 4ª ed., 1949); trad. inglesa de F. STEINHARDT: *Conformal mapping* (Chelsea, Nueva York, 1953).

Trae un nuevo capítulo (teorema general de uniformización) con respecto a la edición de 1932, la adecuada obra:

C. CARATHÉODORY: *Conformal representation* (Cambridge Univ. Press; 2ª ed., 1952).

A la representación conforme de recintos simple y multiplemente conexos se refieren respectivamente:

G. JULIA: *Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes* (Gauthier-Villars, París; reimpr., 1950);

G. JULIA: *Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes* (Gauthier-Villars, París; 1934).

De mucha utilidad para quienes deban usar representaciones conformes en las aplicaciones, es la colección, ordenada de acuerdo con las funciones que efectúan las representaciones (y no por las propiedades geométricas de éstas), con referencias a demostraciones, que no se incluyen de acuerdo con el carácter puramente descriptivo de la obra:

H. KOBER: *Dictionary of conformal representations* (Dover, Nueva York, 1952).

Contiene un adecuado capítulo sobre práctica de la representación conforme el libro de BIEBERBACH citado en 4.

Resultado de un Symposium de 1949 sobre el tema de su título es:

Construction and applications of conformal maps (Nat. Bureau of Standards; Applied Math. Series; nº 18; Washington, D. C., 1952).

Dos resúmenes sobre el comportamiento de la frontera en la representación conforme son:

C. GATTEGNO y A. OSTROWSKI: *Représentation conforme à la frontière: domaines généraux* (Mémor. Sci. Math, nº 109); *domaines particuliers* (Mémor. Sci. Math., nº 110), Gauthier-Villars, París, 1949.

Iniciación ilustrativa, ya antigua, sobre representación conforme la da el cursillo:

J. REY PASTOR: *Teoría de la representació conforme* (Confs. recog. por E. TERRADAS; Inst. Est. Catals.; Diput. Barcelona, 1915).

15. Muchos tratados generales de Análisis, como VALLÉE POUSSIN (citado en Cap. VI, nota VI, 4), VALIRON (citado en Cap. VI, nota VI, 5), COURANT (citado en Cap. VI, nota VI, 2), traen breves exposiciones sobre integrales eulerianas. Estudio más detenido hacen WHITTAKER y WATSON (citado en Cap. XI, nota IV, 2) y en versión actualizada la obra de ERDÉLYI, MAGNUS, OBERHETTINGER y TRICOMI (citada en Cap. XXV, nota IV, 5).

Una obra claramente escrita, con numerosas referencias y muy adecuada para uso práctico en unión con las tablas de JAHNKE-EMDE (citadas en Cap. VII, nota II, *d*), es:

F. LÖSCH y F. SCHOBLIK: *Die Facultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen* (Teubner, Leipzig, 1951).

16. Bibliografía sobre la transformación de LAPLACE puede verse en Cap. XXV, nota IV, 6. Un libro sobre teoría general de funciones analí-

ticas que trae una buena introducción a este tema es el de PINCHERLE citado en Cap. XI, nota IV, 3.

17. Para las funciones de varias variables complejas es todavía útil el segundo tomo del tratado de OSGOOD citado en 5.

Una exposición moderna y sintética, basada en gran parte en resultados de sus autores y con numerosas referencias es:

H. BEHNKE y P. THULLEN: *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen* (Ergebnisse der Math., Springer, Berlín, 1934; reimpr.; Chelsea, Nueva York).

De distinta orientación son las obras más modernas, la segunda de las cuales es una monografía sobre funciones automorfas de varias variables:

S. BOCHNER y W. T. MARTIN: *Several complex variables* (Princeton Univ. Press, 1948);

C. L. SIEGEL: *Analytic functions of several complex variables* (Princeton Univ. Press, 1950).

18. Muchas colecciones de ejercicios incluyen temas de funciones de variable compleja. Entre ellas debe destacarse expresamente la obra de PÓLYA y SZÉGÖ (citada en Cap. V, nota IV, 2).

Acompañante de la segunda obra de KNOPP citada en 2 es la colección (ya citada en Cap. XI, nota IV, 3):

K. KNOPP: *Aufgabensammlung zur Funktionentheorie* (Sammlung Göschen, de Gruyter, Leipzig). I Teil: *Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie* (2ª ed., 1931). II Teil: *Aufgaben zur höheren Funktionentheorie* (4ª ed., 1949). Traducción inglesa: *Problem book in the theory of functions*. Vol. I: *Problems in elementary theory*. Vol. II: *Problems in advanced theory* (Dover, Nueva York, 1953).

APÉNDICE I

HOMOGENEIDAD DIMENSIONAL

a) **Introducción.** — La teoría matemática en que se basa el llamado "Análisis dimensional" es de carácter puramente algebraico y trata de las "funciones dimensionalmente homogéneas" que definiremos oportunamente (*f*). Éstas constituyen una generalización de las funciones homogéneas elementales, con homogeneidad referida no sólo a uno sino a varios factores de proporcionalidad. El primer estudio sistemático de esta clase de funciones y su adecuada aplicación a la Física fué realizado por T. EHRENFEST-AFANASSJEWA *.

Con el llamado teorema Π (*i*), que constituye la médula del Análisis dimensional, se logra en la investigación experimental reducir el número de variables que deben tenerse en cuenta en la cuestión que se estudia; esto facilita extraordinariamente la formación de gráficas empíricas, por lo que el Análisis dimensional se ha convertido en un importante instrumento matemático de los experimentadores.

b) **Magnitud y medida.** — A cada rama de la Física se le puede hacer corresponder una imagen lógica más o menos representativa de un cierto grupo de hechos (por ejemplo, la Mecánica, la Termodinámica, el Electromagnetismo). Dicha imagen postula un cierto número de ideas primitivas, algunas de las cuales son las llamadas magnitudes. Hasta que no interviene la medición puede hablarse de fenómeno, pero no de magnitud. A diversas manifestaciones físicas que aparecen en gradación comparable de unos casos a otros se les atribuye la calidad de pertenecer a una *misma especie de magnitud.*

DEF. 1. *Medir* es hacer corresponder a cada uno de los grados o estados en que aparece una misma especie de magnitud según determinados criterios de igualdad y de orden, un número o sistema de números (escalares, vectores, tensores), de tal manera que ese número o sistema de números pueda concebirse como variable, es decir, conservando la igualdad y el orden, como correspondiente a cada uno de los estados (llamados cantidades) de la magnitud en cuestión.

DEF. 2. Llamaremos *procedimiento de medición* a la atribución de valores numéricos a magnitudes medibles mediante un sistema de prescripciones constituído tanto por determinadas operaciones físicas reproducibles como por operaciones matemáticas.

El procedimiento de medición se supone por hipótesis, *invariable* con el tiempo y demás circunstancias que se postula no intervienen en la medición. Según nuestras costumbres mentales, atribuimos la absoluta invariabilidad a las operaciones lógicas y matemáticas. Por lo tanto, se tiende a extender el dominio del cálculo matemático en la determina-

* T. EHRENFEST-AFANASSJEWA: *Dimensionsbegriff und Bau physikalischen Gleichungen.* Math. Ann. (1915) (77), 259-276; *Dimensional Analysis viewed from the Standpoint of the theory of similitudes.* Phil. Mag. (1926), 1, 257-277.

ción de medidas. Actualmente los esposos DESTOUCHES-FÉVRIER (ver *k*), tratan de establecer un sistema axiomático y aún nuevos métodos deductivos no clásicos que formalicen lógicamente las operaciones inherentes a todo procedimiento de medición, particularmente en Mecánica cuántica.

DEF. 3. La magnitud se llama *escalar* si el sistema de números que la determina se reduce a uno solo; dicha magnitud se supone siempre independiente del sistema de referencia.

A este caso nos referiremos en lo sucesivo, pues la definición de magnitudes vectoriales y tensoriales, como velocidades, aceleraciones, fuerzas, deformaciones elásticas, constante dieléctrica de los cristales, etc., deriva generalmente de la aplicación de cálculos matemáticos a los resultados de mediciones escalares (§ 63).

La correspondencia biunívoca entre cantidad escalar y medida no puede ser cualquiera: a mayor cantidad debe corresponder mayor medida. Además de poder determinar cuándo una magnitud se da en menor, igual o mayor grado que otra de la misma especie, RUNGE (citado en *k*), introduce el criterio de postular físicamente lo que se entiende por diferencia menor, igual o mayor en los grados de dos casos, respecto de la diferencia en los grados de otros dos casos. De los distintos procedimientos de medición aplicados al conjunto de manifestaciones físicas que se han estructurado en una determinada especie de magnitud, diremos originan una *medida regular* aquellos que traducen numéricamente según medidas el anterior criterio de RUNGE. Por esto establecemos:

DEF. 4. Postular físicamente que el procedimiento de medición adoptado da una *medida regular* querrá decir que supondremos por definición físicamente igual la diferencia de dos cantidades con respecto a la de otras dos, cuando y sólo cuando lo mismo ocurra para sus medidas.

Esto nos lleva a la elección de *unidad de medida* y con ella a la de sus múltiplos y submúltiplos. Si según un determinado procedimiento de medición la variable x de un intervalo real I da una medida regular, otro procedimiento cualquiera de medición de la misma magnitud que conserve el orden determinará una medida relacionada con la anterior mediante una función unívoca y monótona $f(x)$; para que este valor funcional sea también una medida regular es necesario y suficiente que para d cualquiera fija, sea constante respecto de x la diferencia

[Ap. I-1] $$f(x+d) - f(x) = k(d).$$

Este tipo de ecuación funcional, estudiado ya por CAUCHY, tiene como solución clásica dentro de las funciones medibles (L) y acotadas, la función lineal:

[Ap. I-2] $$f(x) = \lambda x + h \quad ,$$

con $\lambda = f(1) - f(0) = k(1)$ y $h = f(0)$.

En efecto, de [Ap. I-1] se obtiene

$$k(d+z) = f(x+d+z) - f(x) = f(x+d+z) - f(x+d) + \\ + f(x+d) - f(x) = k(z) + k(d),$$

y al ser $f(x)$ integrable, resulta

$$\int_0^{d+z} k(t)dt = \int_0^d k(t)dt + \int_d^{d+z} k(t)dt = \int_0^d k(t)dt + \\ + \int_0^z k(d+\tau)d\tau = \int_0^d k(t)dt + zk(d) + \int_0^z k(\tau)d\tau \quad .$$

Permutando entre sí z y d, se deduce de lo anterior $zk(d) = dk(z)$.

Así para $z = 1$ y $k(1) = \lambda$ queda $f(d) - f(0) = k(d) = \lambda d$, como queríamos demostrar.

Así para este tipo de ecuación funcional, la solución que dió CAUCHY para funciones continuas, es también la correspondiente a conjuntos funcionales más amplios.

DEF. 5. La función [Ap. I-2] define lo que llamaremos una *transformación por semejanza* de la medida x en la $f(x)$, ordinariamente llamada cambio de origen y de unidad de medida. El término h fija el origen de las medidas, el *factor de multiplicación* o *razón de semejanza* λ la cantidad que se toma como patrón unitario de comparación en el nuevo sistema de medidas.

Suponer que el procedimiento de medición admita sólo esta clase de cambios de medida implica que para x_2 y x_1 cualesquiera y x_0 fijo, el cociente

[Ap. I-3] $$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} ,$$

independiente de λ y h, sea el mismo para cualquier sistema [Ap. I-2] de unidades adoptado; recíprocamente, [Ap. I-3] tiene la forma [Ap. I-2] para x_2 variable y x_0, x_1 fijos. Así considera BRIDGMAN (citado en *k*) esta suposición que él llama *postulado de la significación absoluta de la magnitud relativa.*

En definitiva, queda demostrado:

TEOR. 1. *Postular que nuestro procedimiento de medición es regular, quiere decir que esta propiedad será invariante respecto de todos los cambios de origen y de unidad de medida dados mediante una transformación por semejanza* [Ap. I-2] *y sólo entonces.*

DEF. 6. Dado por postulado físico un procedimiento de medición regular, definiremos como *cantidad* de una magnitud escalar de *unidad* U al símbolo xU, donde x es un número real cualquiera llamado *medida* de dicha cantidad respecto de la unidad U.

Según la aplicación concreta a que se refiera la definición anterior, la unidad U recibe distintos nombres, por ejemplo, centímetro, grado, litro, etc.

Para λ número real (positivo por las razones que se verán en *d*) y fijo respecto del conjunto x, si en xU se pone

[Ap. I-4] $$U = \lambda \bar{U} \quad , \quad (\lambda > 0) \quad ,$$

resultará

$$xU = \bar{x}\bar{U}$$

para

[Ap. I-5] $$\bar{x} = \lambda x \quad , \quad (\lambda > 0) \quad ,$$

admitiendo que es válida la *ley asociativa* para el símbolo xU.

Por definición tendremos así:

DEF. 7. La *transformación homotética* (o por semejanza con conservación de los orígenes) dada por [Ap. I-5] determina una nueva medida x de la misma cantidad referida a la nueva unidad $\bar{U}$ que se supone relacionada a la antigua U mediante [Ap. I-4], ordinariamente llamada *cambio de unidad de medida.*

En la práctica es importante *no confundir la relación* [Ap. I-5] *que liga las medidas con la* [Ap. I-4] *que liga las unidades.*

Así las medidas transformadas se obtienen de las primitivas *multiplicando* éstas por un mismo factor que es la razón de semejanza si la nueva unidad de medida es igual a la antigua *dividida* por dicho factor.

Las distintas *escalas de medición* de una misma especie de magnitud *quedan determinadas por la posición del punto cero y del punto unidad en dicha escala.*

Sin embargo, postular que los *números de medidas deben cambiar inversamente a las magnitudes de las unidades* no es necesario para ser posible la medición misma.

La teoría física establece entre las magnitudes a que se refiere y con el concurso de la observación experimental, relaciones matemáticas que se expresan mediante ecuaciones llamadas *leyes físicas*, donde eventualmente intervienen coeficientes numéricos resultantes de la teoría misma o de elementos experimentales.

El desarrollo de la teoría física en cuestión podrá hacer preferible no complicar la expresión matemática de ciertas leyes físicas que adquirirán entonces categoría de *principios*, cuando éstas dejasen de cumplirse rigurosamente respecto de las medidas de magnitudes dadas por las operaciones físicas que las introducían en la teoría. Esto nos lleva también a modificar (*perfeccionar*) el procedimiento de medición de dichas magnitudes por adecuadas correcciones, las que adquieren sentido físico bajo el postulado de que nuestro sistema de medida continúe siendo *regular*.

c) **Teoría de las magnitudes absolutas continuas.** — Esta es una teoría en que se define como magnitud a todo conjunto de entes abstractos (llamados *cantidades* de la magnitud en cuestión) entre los que se ha establecido una relación de orden (que define la *igualdad* y la *comparación ordenada de menor a mayor* de dos cantidades de una misma magnitud escalar) y una ley de composición (*suma* de dos cantidades de una misma especie de magnitudes) que satisfagan axiomas cuya interpretación concreta pueda verificarse más o menos intuitivamente. Pero fuera del caso de la longitud en que los postulados geométricos que la fundamentan, en particular los de congruencia, verifican aquellos axiomas o bien aquellos donde la ley de composición entra declaradamente en la definición del concepto de magnitud que se considere, las manifestaciones físicas que suelen tomarse como determinadas especies de magnitudes no son aptas en general para que en ellas reciban un significado concreto apriorístico e intuitivo dichos axiomas: por ejemplo, temperaturas o tensiones eléctricas. Si se examinan los procedimientos de medición por los que se introducen muchas magnitudes físicas, incluso en la magnitud *tiempo*, se verá que en general no existe a priori ninguna ley de composición que determine el procedimiento, sino que al revés, éste fija convencionalmente lo que luego se entiende por *suma* de cantidades de la magnitud en cuestión.

Los axiomas de la antedicha teoría se refieren primero al criterio de igualdad entre cantidades tal que cumpla las condiciones reflexiva, simétrica y transitiva (§ 1-5). Además la suma entre cantidades, ha de cumplir las leyes uniforme (§ 2-4, *a*), conmutativa, asociativa (§ 2-4, *b*) y modular que introduce la *cantidad nula* θ (para toda cantidad A es $A + \theta = A$). También la relación de orden debe ser *estricta* o *total*, es decir (§ 2-7), cumple las propiedades transitiva, lineal, irreflexiva y asimétrica. Además deben verificarse el axioma de ARQUÍMEDES-EUDOXO (§ 6-5, *b*), la ley de monotonía de la suma (§ 2-5) y la divisibilidad de cualquiera de las cantidades de la magnitud en cuestión (dados la cantidad A y el número natural n cualesquiera, existe otra cantidad D, llamada *parte alícuota* n-ésima de A, tal que es $nD = A$).

En dicha teoría, si la cantidad nula θ es primer elemento en la relación de orden de la magnitud en cuestión (menor que cualquier otra cantidad no nula), la magnitud se llama *absoluta*; si se postula en cambio que cada cantidad A tiene una cantidad $-A$ llamada su *opuesta*, tal que $A + (-A) = \theta$, la magnitud se llama *relativa*.

Adoptando una cantidad determinada U como patrón o tipo de referencia, llamada *unidad de medida*, siendo sus partes alícuotas las *uni-*

dades alicuotas positivas, los postulados o axiomas anteriores permiten asignar a cada cantidad A un número real α llamado su *medida*, sin más que considerar que U tiene medida 1 y formar el par de sucesiones monótonas contiguas respecto de la cantidad A mediante U y sus partes alicuotas que den las aproximaciones por defecto y por exceso vistas en la teoría del número real (§ 7-4).

En realidad es en base de la representación numérica (§ 7-7) dada por la medida de una especie de magnitud que puede atribuirse a ésta las propiedades anteriores y *no* que estas propiedades sean en general *verificables directamente* para con ellas fundamentar la representación numérica que dé la medida de la magnitud en cuestión.

En la evolución del procedimiento de medición que va precisando la definición de una determinada magnitud, a partir de simples nociones cualitativas de nuestros sentidos se pasa a nociones cuantitativas dadas por la "evaluación" de un "instrumento-escopio" que posee una escala graduada en forma *arbitraria*.

En principio, este instrumento-escopio podrá no dar una medida regular (def. 4) y el "perfeccionamiento" de nuestro procedimiento de medición que iremos logrando no tan sólo por el mejoramiento técnico de los aparatos y dispositivos que entren en el procedimiento, sino también por el desarrollo de nuestra teoría que adoptará para ésta como principios determinadas formas de ciertas leyes físicas tomadas como fundamentales, consistirá en convertir dicho instrumento-escopio en un "instrumento-metro" tal que nos dé la medida regular que por definición convencional corresponda a la magnitud en cuestión. Entonces, la simple *suma de índices* dada por el instrumento-metro proporciona la ley de composición de la magnitud, si tomamos como origen de medidas las de la magnitud "nula" en la ley que se considere.

En ciertos casos (longitudes, áreas, masas, fuerzas, etc.) la ley de composición que se considera como "suma" de cantidades de una misma especie de magnitud entra declaradamente en la definición del concepto correspondiente y entonces dicha *ley de composición dada directamente*, determina en las medidas x de nuestro instrumento-escopio una función

[Ap. I-6] $$x_s = \mathrm{s}(x_1; x_2)$$

tal que la cantidad correspondiente a la medida x_s sea *suma* de las cantidades correspondientes a las medidas x_1 y x_2.

Nuestro instrumento-escopio se convertirá en instrumento-metro que dé una medida regular (def. 4), en cuanto sepamos transformar la escala x en una escala y de medida regular mediante una función

[Ap. I-7] $$y = \mathrm{y}(x)$$

que cumpla

[Ap. I-8] $$\mathrm{y}(x_s) = \mathrm{y}(x_1) + \mathrm{y}(x_2) \quad ,$$

o más brevemente $y_s = y_1 + y_2$, para $x_s = \mathrm{s}(x_1; x_2)$, supuesto que en ambos instrumentos se haya tomado como origen de escalas la medida de la cantidad "nula" en la ley de composición considerada.

Supuesto, pues, que a la cantidad nula θ le corresponda la medida $x = 0$, para que se cumplan las propiedades axiomáticas citadas anteriormente para la *suma*, supondremos además que la función $\mathrm{s}(x_1; x_2)$ es unívoca, simétrica en ambas variables

[Ap. I-9] $$\mathrm{s}(x_1; x_2) = \mathrm{s}(x_2; x_1) \quad ,$$

da una ley de composición asociativa al verificar

[Ap. I-10] $$\mathrm{s}[\mathrm{s}(x_1; x_2); x_3] = \mathrm{s}[x_1; \mathrm{s}(x_2; x_3)] \quad ,$$

satisface la ley modular

[Ap. I-11] $s(x_1; 0) = x_1$

y es estrictamente monótona, es decir

[Ap. I-12] $x_2 < \xi_2$ implica $s(x_1; x_2) < s(x_1; \xi_2)$,

y análogamente para x_1.

De estas condiciones se deducen las relaciones $s(0; x_2) = x_2$ y $s(0; 0) = 0$, y además, el siguiente teorema:

TEOR. 2. *Si la función* $s(x_1; x_2)$ *verifica las condiciones* [Ap. I-10], [Ap. I-11], [Ap. I-12], *y es continua, entonces la medida continua x respecto de la ley de composición* [Ap. I-6] *cumple*: 1º) *el axioma de* ARQUÍMEDES-EUDOXO (§ 6-5, *b*); 2º) *el axioma de divisibilidad.*

El problema de hallar la función [Ap. I-7], a menos de una transformación homotética (def. 7) mediante la función [Ap. I-6] que determina la "suma" de cantidades (*por definición convencional* entre las medidas del instrumento-escopio) es análogo al resuelto en la teoría clásica para hallar la medida de una magnitud a partir de los axiomas teóricos que se supone cumple. Dicho problema queda resuelto en virtud del teorema siguiente:

TEOR. 3. *Sea un procedimiento de medición que asigne unívocamente una medida positiva a toda cantidad no nula y cero a la θ nula, tal que las medidas varíen monótonamente con continuidad en un intervalo* $[0, b]$, *y sea* [Ap. I-6] *una ley de composición definida para* x_1 *y* x_2 *pertenecientes a* $[0, b]$. *Si dicha ley de composición* [Ap. I-6] *cumple la ley modular* [Ap. I-11], *la ley asociativa* [Ap. I-10], *la ley de monotonía estricta* [Ap. I-12] *y viene representada por una función continua, entonces existe una función* [Ap. I-7] *que transforma la escala dada x en otra y, de manera que ésta determine una medida continua estrictamente creciente en* $[0, b]$ *que es regular al cumplir* [Ap. I-8]. *Toda otra medida regular* $\bar{y}(x)$ *con las mismas propiedades está relacionada con la anterior mediante* $\bar{y}(x) = \lambda y(x)$ *con* $\lambda > 0$. *Bajo las hipótesis anteriores, resulta que la ley de composición dada debe cumplir la ley conmutativa* [Ap. I-9].

Obsérvese que no es la comodidad de utilizar la escala [Ap. I-7] lo que "convierte en magnitud" las indicaciones graduadas *x*, sino lo que debe entenderse en cada caso como "suma" de cantidades [Ap. I-6] de la magnitud en cuestión. Aquí es donde reside la *convención* básica para definir mediante la ley de composición una u otra especie de magnitud.

Supuesto que tenga sentido físico caracterizar como "nula" una determinada cantidad de la magnitud que se considere, el concepto de medida regular implica el de ley de composición (por simple suma aritmética [Ap. I-8]) y recíprocamente (teor. 3). Pero como el postulado físico establecido para introducir el concepto de medida regular (def. 4) no involucra el estado de la magnitud que haya de corresponder a medida cero, *será preferible* en general caracterizar físicamente el concepto de la magnitud en cuestión mediante el criterio determinante de una *medida regular* que por la ley de composición; en particular tal ocurre, por ejemplo, para la temperatura, el potencial, el tiempo y aun la longitud aplicada a niveles de una u otra altura.

En la mayoría de las aplicaciones, la cantidad "nula" suele ser de índole paramétrica. Por ejemplo, en la definición de velocidad, tanto el *origen* de los tiempos como el de los espacios es convencional, pero es esencial tenerlo en cuenta en el cambio de unidades; por esto se define en función de *incrementos*.

d) **Magnitudes fundamentales y derivadas.** — Generalmente el procedimiento de medición de una magnitud es *indirecto*, es decir, se observa

una acción o propiedad originada por la magnitud a medir; entonces el valor de aquella acción debe ser una función unívoca de la cantidad de la magnitud que se mide. Por regla general, el resultado de la medida se lee sobre una escala lineal (recta o circular) al hacer corresponder un *segmento* o *arco* a cada cantidad o estado (*b*) de la magnitud en cuestión.

La circunstancia de que una magnitud física se mida por una acción secundaria que ella origina da lugar a una relación entre la unidad de medida adoptada para la magnitud y la unidad o unidades que intervengan en el procedimiento de medición constituído por dicha acción; la relación mencionada se expresará por una ley física. Por otra parte, la magnitud en cuestión puede ser introducida en la teoría física que consideremos mediante una definición lógico-teórica que la presenta como *magnitud derivada* de otras *magnitudes fundamentales* de dicha teoría. Esta definición tendrá *significado físico* si se refiere a un cierto *fenómeno observable.*

EJEMPLO 1. La velocidad, tal como se la define ordinariamente, es una magnitud derivada, con significación física en el fenómeno del movimiento. La medimos dividiendo el número que mide una longitud por el número que mide el tiempo necesario para recorrerla, abreviadamente: dividiendo la longitud por el tiempo, aunque expresarse así ya era considerado insensato por J. THOMSON. Pero en este estudio no es ineludible tomar la longitud y el tiempo como magnitudes fundamentales. Si tomamos como procedimiento de medición del tiempo (aunque sólo sea idealmente al prescindir de las dificultades de su realización práctica) la propagación de la luz en el vacío, fenómeno al que atribuímos la característica de un movimiento rectilíneo de *velocidad constante c*, el tiempo a su vez podrá considerarse como magnitud derivada de la longitud y ésta podrá tomarse como única magnitud fundamental.

DEF. 8. En un determinado conjunto de fenómenos físicos queda establecido un *sistema de magnitudes fundamentales*, si en ellas son independientes entre sí los factibles cambios de unidad de medida regular (def. 7).

DEF. 9. Alguna ecuación o sistemas de ecuaciones que expresan leyes físicas, al ser resueltas respecto de determinadas magnitudes, permiten su definición lógico-teórica, convirtiéndolas en *magnitudes derivadas* de las magnitudes fundamentales establecidas.

Cada magnitud derivada es la expresión de una ley física cuya ecuación es la que sirve de *definición* a dicha magnitud: su concepto físico vendrá determinado por el fenómeno a que se refiere la ley física con que se la define en sentido lógico.

Hay que observar especialmente que el límite entre magnitudes fundamentales y derivadas no está trazado de un modo fijo e invariable por condiciones naturales, sino que es bastante arbitrario y depende de las reglas especiales que estimamos aptas para la definición de nuestros sistemas de medidas (cfr. ejemplo 1). *La estimación de las magnitudes que podamos tomar como fundamentales en el caso que se investigue*, es decir, de las magnitudes a las que podamos atribuir unidades de medida *independientes entre sí* dentro del fenómeno investigado, *es importantísima para la aplicación eficaz del análisis dimensional*; esta estimación está ligada íntimamente con la *consideración de las variables dimensionadas* (incluyendo en ellas las constantes físicas, def. 13) *que deban intervenir en el caso estudiado.*

Veamos ahora que la fórmula matemática que expresa la medida de una magnitud derivada mediante la de las fundamentales, puesta en forma explícita, ha de tener su segundo miembro *monomial* (es decir, igual a una constante que multiplica a potencias de las medidas de las magnitudes fundamentales) para que se cumpla la condición de que los cam-

bios de unidades de la magnitud derivada se efectúen mediante una transformación homotética (def. 7), es decir, para que el procedimiento de medición de la magnitud derivada, ahora puramente teórico y deducido de su definición lógica, *proporcione una medida regular con origen determinado* (teor. 1). Conviene hacer notar que la demostración matemática es válida sólo para *medidas positivas* y se basa en la hipótesis física de que los *factibles cambios de unidades de las magnitudes fundamentales son entre sí independientes* (def. 8), es decir, sus medidas pueden tomarse como variables independientes en la ley física del fenómeno que sirve de definición a la magnitud derivada en cuestión; también se basa en el propósito de que la magnitud derivada pueda *ser definida por la misma función* respecto de las nuevas unidades, lo que implica que los coeficientes que pueden entrar en dicha función deben ser invariantes respecto de los cambios de unidades (def. 7) de las magnitudes fundamentales, es decir, deben ser constantes nildimensionadas (def. 11). Tendremos así:

TEOR. 4. *Restringidas las medidas variables de las magnitudes a tomar valores positivos, sea*

[Ap. I-13] $$x = f(q_1, q_2, \dots, q_m)$$

la función continua de las medidas positivas $q_1, q_2, \dots, q_m$ *de las magnitudes fundamentales que define la medida positiva* x *de una magnitud derivada* (def. 9). *Dadas transformaciones homotéticas cualesquiera* (def. 7) *de razones positivas*

[Ap. I-14] $$\bar{q}_i = \lambda_i q_i \quad , \quad (\lambda_i > 0) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad ,$$

de las medidas de las magnitudes fundamentales y definida la nueva medida $\bar{x}$ *de la magnitud derivada por la misma ecuación* [Ap. I-13] *respecto de las nuevas medidas* $\bar{q}_i$ *de las magnitudes fundamentales*

[Ap. I-15] $$\bar{x} = f(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_m) \quad ,$$

donde f *es el mismo operador que antes, tendremos que dicho operador tiene la forma monomial*

[Ap. I-16] $$x = Cq_1^{a_1}\, q^{a_2} \cdot \dots \cdot q_m^{a_m} \quad ,$$
$$(C > 0, \textit{ constante nildimensionada})$$

cuando y sólo cuando la medida de la magnitud derivada se transforme homotéticamente con razón positiva

[Ap. I-17] $$\bar{x} = \lambda x \quad , \quad (\lambda > 0) \quad ,$$

es decir, cuando y sólo cuando [Ap. I-13] *defina la magnitud derivada mediante una medida positiva regular con origen determinado* (teor. 1).

Obsérvese que en el teorema 4 la posición del cero que ha de corresponder a la cantidad "nula" en las magnitudes fundamentales y derivadas, juega un papel principal. Para transformaciones por semejanza en general con cambio de origen y unidad de medida (def. 5), se tiene:

TEOR. 5. *La única magnitud derivada dada mediante funciones continuas que puede quedar definida por el mismo operador respecto de las magnitudes fundamentales transformadas por semejanza, de manera que la transformación inducida en la magnitud derivada sea también por semejanza, es la magnitud derivada función lineal de una sola magnitud fundamental:*

$$x = aq + b.$$

Como una magnitud derivada función lineal de una sola magnitud

fundamental puede considerarse por el teorema 1 que es sólo un cambio de medida regular de dicha magnitud fundamental, para transformaciones generales por semejanza y no tan sólo homotéticas [Ap. I-14], no existirán magnitudes derivadas no triviales que conserven la regularidad de la medida.

Así pues, toda magnitud derivada vendrá dada por una función del tipo [Ap. I-16] con origen de medidas invariante, es decir, la cantidad "nula" de las magnitudes consideradas jugará ahí un papel esencial.

Para *no caer en la confusión* advertida anteriormente (*b*), es importante observar que la relación [Ap. I-16] obtenida *entre medidas*, se convierte en la relación *entre unidades* (que están en *razón inversa* de las medidas respectivas, def. 7):

[Ap. I-18] $$CU = U_1^{a_1} U_2^{a_2} \ldots U_m^{a_m} \quad ,$$

donde se ha designado por $U_1, U_2, \ldots, U_m$ las unidades de las magnitudes fundamentales, por U la unidad de la magnitud derivada en cuestión y por $U_1^{a_1}$ $U_2^{a_2}, \ldots, U_m^{a_m}$ las unidades de las magnitudes derivadas teórica e implícitamente definidas por los respectivos números $q_1^{a_1}$, $q_2^{a_2}$, $\ldots$, $q_m^{a_m}$ tomados como sus medidas.

Así pues, una ley física puede servir para dar una definición lógica nominal explícita de una magnitud derivada referida a otras tomadas como fundamentales; entonces el concepto físico de la magnitud derivada vendrá determinado por el fenómeno a que se refiere la ley física con que se define lógicamente. Esta definición depende matemáticamente del coeficiente C y de los exponentes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de las potencias de la expresión monomial que dicha definición debe tener para que en la nueva magnitud introducida se cumpla que el cambio de unidades se efectúa también por una transformación homotética. En las definiciones de magnitudes derivadas que se utilizan en la Física suele tomarse $C = 1$, aunque esto no sea necesario; así ocurre con las unidades electrostáticas ordinarias que se distinguen de las llamadas racionales por el factor $\sqrt{4\pi}$.

Ahora estamos en condiciones de dar las definiciones siguientes:

DEF. 10. En las fórmulas [Ap. I-16] entre medidas y [Ap. I-18] entre unidades que introducen una magnitud derivada, el exponente de la potencia de cualquier magnitud fundamental se llama *exponente de dimensión* o simplemente *dimensión* de la magnitud derivada con respecto a la magnitud fundamental correspondiente y la *fórmula dimensional* de una magnitud derivada es el conjunto de exponentes de las varias magnitudes fundamentales que se presentan en la prescripción de medida para la magnitud derivada; se atribuyen símbolos a las magnitudes tomadas como fundamentales y para la magnitud derivada se escriben esos símbolos con el exponente correspondiente. Una magnitud fundamental tiene dimensión 1 respecto de sí misma y 0 respecto de las demás fundamentales. Así, tanto éstas como las derivadas, se llamarán *magnitudes dimensionadas*. El factor de multiplicación λ en [Ap. I-17] de la magnitud derivada se obtendrá aplicando la fórmula dimensional a los factores λ_i de las magnitudes fundamentales que figuran en [Ap. I-14].

DEF. 11. Una magnitud de medida [Ap. I-16] o unidad [Ap. I-18] referida al sistema de unidades fundamentales $U_1, U_2, \ldots, U_m$, se llama *nildimensionada* si tiene nulos todos sus exponentes de dimensión: $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$.

Por tanto, el cambio de unidades fundamentales no modifica el valor de la medida de una magnitud nildimensionada. Un número puro debe considerarse como una magnitud nilidimensionada. *Una magnitud puede ser nildimensionada respecto de un sistema de medidas fundamentales y no serlo respecto de otro sistema distinto.*

e) **Constantes dimensionadas.** — La medida de una magnitud debe escribirse siempre en forma concreta referida al concepto de cantidad (def. 6), es decir, especificando la unidad a que se refiere. Además, la medida de una magnitud nunca es un número exacto; debe sobrentenderse siempre sin equívoco cuál es el *error probable* de la determinación; en general, se sobrentiende que el valor escrito tiene sus cifras exactas (Cap. V, nota II. *b*).

EJEMPLO 2. Si se escribe la fórmula que da la resistencia F a la rotura por tracción de un hilo de acero de diámetro d en la forma $F = 65d^2$, ésta sólo es válida cuando F se mide en kilogramos-fuerza (kgr) y d en milímetros (mm)*. Por tanto, lo correcto es escribir:

[Ap. I-19] $$F\,\mathrm{kgr} = 65\ (d\,\mathrm{mm})^2.$$

Evidentemente, si expresamos F y d en otras unidades, la fórmula [Ap. I-19] con el *mismo* coeficiente 65 no será ya válida. Sin embargo, la fórmula [Ap. I-19] expresa algo importante que debe ser independiente de la unidad de medida, la ley física por la cual la resistencia a la rotura por tracción es proporcional al cuadrado del diámetro del hilo y esto deberá poder formularse en las unidades de medida que deseemos. Al ser 1 kgr = 9,8 N ** y 1 mm = 10^{-3} m podremos poner F kgr = $(9{,}8\,.\,F)\,\mathrm{N} = \bar{F}\,\mathrm{N}$; $d\,\mathrm{mm} = (10^{-3}\,.\,d)\,\mathrm{m} = \bar{d}\,\mathrm{m}$, y por tanto en $F = 65d^2$, si en lugar de la medida F ponemos la medida $\bar{F}$ y en lugar de la medida d ponemos la medida $\bar{d}$, estos nuevos números verificarán la ecuación $\bar{F} = (65.9{,}8/10^{-6})\,.\,\bar{d}^2$. Esto equivale a haber considerado que el coeficiente 65 tenía la dimensión kgr/mm², es decir, 65 kgr/mm² = $(65.9{,}8/10^{-6})\,\mathrm{N/m^2}$, y entonces [Ap. I-19] se convierte en

[Ap. I-20] $$\bar{F}\,\mathrm{N} = (65.9{,}8/10^{-6})\ .\ (\bar{d}\,\mathrm{m})^2.$$

DEF. 12. Un coeficiente de una ecuación de una ley física (tal el de las fórmulas [Ap. I-19] y [Ap. I-20]) que para la conservación de la validez de dicha ecuación, deba transformarse según la misma regla que expresa la dimensión física de una magnitud derivada (def. 10) en un cambio de unidades aplicado a las medidas de magnitudes dimensionadas, se llama *constante dimensionada*.

---

* Para el simbolismo de las distintas unidades físicas se siguen las recomendaciones del informo aprobado en Amsterdam (julio de 1948) de la Comisión de Símbolos, Unidades y Nomenclatura (CSUN) de la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada (IUPAP) auspiciado también por la UNESCO. Recordemos que las magnitudes físicas serán impresas en caracteres itálicos (F, d, t) y que las unidades y operadores matemáticos serán impresas en caracteres romanos (cm, s, dS, exp at, grad V, sen x, $[\mathrm{l}^2\mathrm{t}^{-1}\mathrm{m}]$ indicando litros ² toneladas ⁻¹ metros, mA indicando miliamperio). Todos estos símbolos no serán seguidos por un punto. La coma o el punto se utilizan solamente para separar la parte entera de la decimal; para facilitar la escritura de los números grandes pueden dividirse en grupos de tres cifras, pero esos períodos no deben separarse por puntos o comas. Se consideran los prefijos de unidades:

pico .... p $= 10^{-12}$,	nano .... n $= 10^{-9}$,	micro ...... μ $= 10^{-6}$,
mili .... m $= 10^{-3}$,	centi .... c $= 10^{-2}$,	deci .... d $= 10^{-1}$,
deca .... da $= 10$,	hecto .... h $= 10^{2}$,	kilo .... k $= 10^{3}$,
mega .... M $= 10^{6}$,	giga .... G $= 10^{9}$,	tera .... T $= 10^{12}$.

** N = newton, nombre que ha prevalecido sobre el de "vis" propuesto por GIORGI; en realidad, con respecto al llamado valor normal de la gravedad $g_N = 9{,}806\,65\ \mathrm{m/s^2}$, es 1 kgr = 9,806 65 N = 980 665 dyn, donde dyn = dina.

Ejemplo 3. La dimensión de la constante dimensionada de la ecuación [Ap. I-20] en el sistema MLT es $[\mathrm{N} . \mathrm{m}^{-2}] = [ML^{-1}T^{-2}]$ y para expresarla en el sistema cegesimal (CGS) basta aplicar la última fórmula dimensional así:

$$\text{[Ap. I-21]} \qquad (65.9{,}8/10^{-6})\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}} = (65.9{,}8.10^{7})\,\mathrm{g\,cm^{-1}\,s^{-2}}.$$

Puede comprobarse que si en [Ap. I-19] expresamos F en dyn y d en cm, el coeficiente debe ser numéricamente igual al segundo miembro de [Ap. I-21].

Con las constantes dimensionadas, las ecuaciones de las leyes físicas entre magnitudes dimensionadas (def. 10) conservan su validez en cualquier cambio de unidades. Tiene gran importancia el siguiente teorema de demostración trivial:

Teor. 6. (Bridgman). *Una ecuación de forma arbitraria que represente exactamente los resultados de las mediciones en un sistema físico mediante un sistema determinado de unidades fundamentales, puede ser transformado en una forma tal que quede válida para mediciones efectuadas con unidades distintas de las anteriores u otras magnitudes tomadas como fundamentales, sin más que afectar a cada magnitud cuya medida entre en la ecuación con un factor de dimensión recíproca y de valor numérico igual a la unidad en el sistema primitivo.*

A veces sucede que la forma de la ecuación permite refundir dos o varios de esos factores en uno solo, por ejemplo, para la ecuación [Ap. I-19] en vez de introducir dos constantes dimensionadas, una para F de dimensión kgr^{-1} y otra para d de dimensión mm^{-1}, nos ha bastado considerar que el coeficiente 65 quedaba multiplicado por 1 $\mathrm{kgr\,mm^{-2}}$.

Def. 13. En las fórmulas monomiales los distintos factores del teorema 6 se refunden en uno, dando lugar a las llamadas *constantes físicas*, cuyo valor y dimensión dependen de las unidades tomadas como fundamentales en la teoría física que se considere.

Si la fórmula explícita monomial se toma como definición de una nueva magnitud derivada (d), al atribuir a ésta la dimensión física de su segundo miembro, la constante se reduce a un número puro, tomado generalmente, aunque no siempre, igual a la unidad. Pero dicha magnitud derivada se puede considerar siempre como *fundamental* sin más que atribuir a la constante dimensionada, la dimensión que haga compatible ambos miembros de la ecuación referente a la ley física que ligue las magnitudes en cuestión; el valor de dicha constante y su dimensión física dependerán del sistema de unidades fundamentales elegidas según respectivos procedimientos de medición.

Ejemplo 4. El concepto de *masa inerte* introducido mediante uno de los principios de la Mecánica newtoniana, no debe confundirse con el de *masa gravitatoria* que interviene en la ley de gravitación universal. Se comprende la distinción recordando los conceptos de masas magnéticas o eléctricas introducidos por las leyes de Coulomb. Pero así como la fuerza (acción dinámica manifestada por aceleraciones de masas inertes) en el caso eléctrico es proporcional al producto de las cargas eléctricas (*causa*) y no al de las masas inertes cuya aceleración provoca (*efecto*), en el caso gravitatorio dicha fuerza es precisamente proporcional a las masas inertes (por eso, según ya comprobó Galileo, todos los cuerpos en el vacío *caen* en el mismo lugar con *igual* aceleración), lo que permite identificar la masa inerte a la masa gravitatoria. Esta identificación toma significado profundo con Einstein, radicando la profundidad no en conceptos más o menos artificiales, ni en convenciones o definiciones arbitrarias, sino en su trascendencia respecto de las leyes que rigen los fenómenos gravitatorios e inerciales. Aun aquel concepto se identifica también

al de *masa cinemática* manifestada en el choque por la energía cinética que tiene el móvil chocante.

Introducida la fuerza por la ley de NEWTON de la Dinámica:

[Ap. I-22] $$F = ma \quad ,$$

con dimensión $[MLT^{-2}]$ en el sistema MLT, en este mismo sistema, de la ley de gravitación universal del mismo NEWTON

[Ap. I-23] $$F = G\, m_1 m_2 / r^2$$

se deduce muy sencillamente la dimensión de la constante G, pues debe ser $[MLT^{-2}] = [G] . [M^2L^{-2}]$, y por tanto $[G] = [M^{-1}L^3T^{-2}]$.

Su valor es

[Ap. I-24] $$G = 0{,}6664.10^{-10} (\mathrm{N} . \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2) = 0{,}6664.10^{-10} (\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}).$$

En un sistema astronómico de medidas será oportuno introducir la fuerza como magnitud derivada mediante la ley gravitatoria de NEWTON [Ap. I-23], haciendo en ella $G = 1$, es decir

[Ap. I-25] $$F = m_1 m_2 / r^2 \quad ,$$

y entonces tendría la dimensión $[M^2L^{-2}]$. Para *adecuar* (*f*) a esta dimensión la ecuación [Ap. I-22] bastará introducir en ella una constante dimensional k,

[Ap. I-26] $$F = k . ma \quad ,$$

que dé para k la dimensión $[k] = [M^2L^{-2}]/[MLT^{-2}] = [ML^{-3}T^2]$.

Hacer coherentes [Ap. I-22] y [Ap. I-25] significa suponer la *masa como magnitud derivada* de la longitud y del tiempo, es decir, dependiente de la distancia r que influye en la acción gravitatoria y de la aceleración a que esta acción provoca dinámicamente sobre cada una de las masas en cuestión, dando:

[Ap. I-27] $$m_1 a_1 = m_2 a_2 = m_1 m_2 / r^2.$$

Así resultará $[F] = [MLT^{-2}] = [M^2L^{-2}]$, es decir, $[M] = [L^3T^{-2}]$ que convierte a k y C en números nildimensionados (def. 2), dando para $[F]$ la dimensión $[F] = [L^4T^{-4}]$, que hace homogénea [Ap. I-22] por $[L^4T^{-4}] = [L^3T^{-2}] \ . \ [LT^{-2}]$ y [Ap. I-25] por $[L^4T^{-4}] = [L^3T^{-2}]^2/[L]^2$.

En es e sistema astronómico, se definiría la unidad astronómica de masa "asm" como aquella que en [Ap. I-27] hace $m_1 = m_2 = 1$ para $r = 1$ y $a_1 = a_2 = 1$. Entonces, cualquiera de las [Ap. I-22] o [Ap. I-25] servirá para definir la unidad astronómica de fuerza "asf" como la que imprime en la "asm" la unidad de aceleración o como la atracción mutua con que actúan entre sí dos "asm" a la unidad de distancia. Si en este sistema astronómico adoptamos para unidades de longitud y tiempo el m y el s, al aplicar [Ap. I-22] y [Ap. I-23] en el sistema MKS con el valor [Ap. I-24] obtendremos

$$1 \text{ asf} = 1 \text{ asm} . \mathrm{m/s^2} = 0{,}6664.10^{-10} (\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}) \ . \ 1 \,(\text{asm})^2/\mathrm{m}^2 \quad ,$$

de donde

$$1 \text{ asm} = 1 \ (\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}) = 1{,}5.10^{10} \text{ kg} \quad ;$$
$$1 \text{ asf} = 1 \ (\mathrm{m}^4\mathrm{s}^{-4}) = 1{,}5.10^{10} \text{ N} = 1{,}53.10^9 \text{ kgr}.$$

Si hubiésemos tomado otras unidades LT en el sistema astronómico (por ejemplo, para L en lugar del metro de la milla $= 1\,609{,}315$ m o el parsec $= 3{,}083\,8.10^{16}$ m) hubiésemos obtenido otros valores sustantivos para las unidades astronómicas de masa y fuerza. Así, para $L = 1$ mi $=$ $= 1\,609$ m resultaría aproximadamente en "asm" que $1 \ (\mathrm{mi^3/s^2}) =$ $= 1\,609^3 \ (\mathrm{m^3/s^2}) = 6{,}26.10^{19}$ kg y en "asf" que $1 \ (\mathrm{mi^4/s^4}) = 1\,609^4$ $(\mathrm{m^4/s^4}) = 1{,}007\,77.10^{23}$ N.

A pesar de esta última y clara utilización, para quienes atribuyen un significado intrínseco a las dimensiones físicas, pueden parecerles paradógicas las relaciones $[M] = [L^3T^{-2}]$ y $[F] = [L^4T^{-4}]$, que traducen so-

lamente las leyes combinadas [Ap. I-22] y [Ap. I-25] mediante [Ap. I-27]; sin embargo, lo que podría parecer paradógico es dar exclusividad a la ley [Ap. I-22] sin considerar la [Ap. I-25] (o viceversa) para atribuir dimensiones físicas a la fuerza, si los hábitos mentales imbuídos por la tradición didáctica no hubiesen perturbado la clara visión de la naturaleza de las dimensiones físicas.

MAX PLANCK cita el sistema astronómico de medidas como ilustración del convencionalismo de las dimensiones físicas y hace notar que "buscar las dimensiones *reales* de una magnitud, no tiene más sentido que buscar el nombre *real* de un objeto. Muchas controversias infructuosas de la literatura física, particularmente las concernientes al sistema de medidas electromagnéticas se hubiesen evitado si se hubiese tenido en cuenta debidamente dicha observación".

El sistema astronómico *LT* es al *MLT* en Dinámica lo que el sistema de GAUSS es al sistema GIORGI en Electromagnetismo.

El ejemplo anterior muestra que no tiene sentido hablar de las "dimensiones" de una magnitud antes de establecer el sistema de medidas en el cual se deben determinar las dimensiones. No hay "dimensiones verdaderas" de una magnitud y una fórmula dimensional no tiene nada de absoluto ni esotérico; eso sí, *indica algo importante* y ello es la trabazón con que unas magnitudes tomadas como "derivadas" se ligan a otras tomadas como "fundamentales" en la teoría física que se estudie. Si la ley física que implica dicha trabazón interviene en el aspecto del fenómeno que se estudia, será esencial considerar en éste la fórmula dimensional que indique la dependencia implícita que liga las magnitudes que entran en el fenómeno. Para la aplicación del Análisis dimensional al estudio de un determinado fenómeno conviene considerar el número de variables dimensionadas (incluyendo en ellas las constantes dimensionadas) lo más pequeño posible, referidas a magnitudes fundamentales (de medición independiente) en el mayor número posible, pues aquéllas originan incógnitas de un sistema lineal de ecuaciones proporcionadas por éstas, sistema que resulta tanto más determinado cuanto más ecuaciones con menos incógnitas haya. Pero en dicho fenómeno se podrán tomar como de medida independiente, sin introducir nuevas constantes dimensionadas, sólo a las magnitudes que *no están ligadas* por definiciones o ecuaciones que implícitamente representen leyes físicas que gobiernen el fenómeno *en el aspecto que de éste se estudie.* El criterio para saber esto último *habrá de derivar de la experiencia.*

Así pues, las dimensiones físicas, tal como se las ha definido anteriormente, se introducen en base a las prescripciones mediante las cuales se consiguen los números de medida que corresponden al proceso físico en cuestión. En muchas experiencias existen ventajas eligiendo las prescripciones de medida de un modo especial, según el caso. Varios sistemas posibles de medidas pueden distinguirse en la clase y número de las magnitudes fundamentales elegidas; todo depende del caso presentado y en cada caso se ha de elegir el sistema no-contradictorio más apto.

f) **Homogeneidad dimensional.** — Sentó FOURIER el principio de que todas las relaciones o ecuaciones matemáticas que se refieren a leyes físicas deben tener sus términos con la misma dimensión física. Este principio de FOURIER no es necesariamente cierto; si se consideran relaciones que en la caída de un grave incluyan la distancia s de caída, la velocidad v y el tiempo t, será $s = \frac{1}{2}gt^2$; $v = gt$, y sumando ambas

[Ap. I-28] $$s + v = gt + \tfrac{1}{2}gt^2 \quad ,$$

donde no todos los términos tienen la misma dimensión en el sistema *MLT*. Sería deficiente definir como homogénea, la ecuación que tuviese todos sus "términos" de la misma dimensión, porque matemáticamente lo apropiado es referirse en general a funciones en donde el concepto "tér-

mino" no intervenga: por ejemplo en las aplicaciones a funciones dadas por gráficas.

Sea $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función de n variables, donde φ representa un operador que aplicado a las variables independientes x_1, x_2, ..., x_n da el valor de la variable dependiente y. Supongamos que las variables x_i, y son medidas de magnitudes dimensionadas (def. 10), incluyendo en ellas las constantes dimensionadas (def. 12) que intervengan en la función φ, referidas a un determinado sistema de magnitudes fundamentales de unidades U_1, U_2, ..., U_m y que efectuamos en éstas un cambio de unidades dado por transformaciones homotéticas [Ap. I-14]; entonces las magnitudes dimensionadas tomarán nuevos valores $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, ..., $\overline{x}_n$, $\overline{y}$.

DEF. 14. La función

[Ap. I-29] $$y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se llama *dimensionalmente homogénea* cuando y sólo cuando para cualquier transformación homotética de las unidades fundamentales

[Ap. I-30] $$U_1 = \lambda_1 \overline{U}_1 \quad , \quad U_2 = \lambda_2 \overline{U}_2 \quad , \quad \ldots, \quad U_m = \lambda_m \overline{U}_m \quad ,$$

se tiene que las nuevas medidas se relacionan por

[Ap. I-31] $$\overline{y} = \varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \quad ,$$

donde φ es el mismo operador que antes; es decir, la ecuación [Ap. I-29] es invariable respecto del grupo de transformaciones homotéticas de las unidades fundamentales a que se refieren las variables dimensionadas y, x_1, x_2, ..., x_n.

EJEMPLO 5. De acuerdo con esta definición, una función definida por una gráfica es dimensionalmente homogénea cuando y sólo cuando la gráfica no varía al cambiar de cualquier modo las unidades fundamentales de referencia. Por ejemplo, en el sistema L sea el área S de un cuadrado de lado l, representada por una gráfica parabólica de ordenada S y abscisa l; siempre que la *medida de la ordenada se transforme regularmente según la dimensión* $[L^2]$ (def. 10), la gráfica será válida respecto de cualquier transformación homotética de la unidad de longitud.

Ya sabemos (teor. 6) que podemos transformar una ecuación cualquiera en dimensionalmente homogénea por introducción de constantes dimensionadas (def. 12) que deben considerarse en la función estudiada como magnitudes dimensionadas (def. 10).

Algunos autores llaman *adecuar* una ecuación a la introducción de las constantes dimensionadas que la convierten en dimensionalmente homogénea. Respecto de dicha homogeneidad dimensional y los teoremas del Análisis dimensional que a ella se refieren hemos de considerar las constantes dimensionadas como *argumentos variables* en las transformaciones [Ap. I-30] (cfr. ejemplo 4).

DEF. 15. Llamaremos *dimensionada respecto de un sistema de unidades fundamentales* U_1, U_2, ..., U_m a una expresión que por un cambio de unidades de medida para dichas magnitudes fundamentales del tipo homotético [Ap. I-30], teniendo en cuenta la consecuente transformación de las constantes dimensionadas que figuran en ella, se reproduce multiplicada por un monomio de la forma

$$\lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \ldots \lambda_m^{a_m}$$

donde a_1, a_2, ..., a_m son las *dimensiones* de dicha expresión.

Si la expresión es la función φ, segundo miembro de [Ap. I-29] y a_1, a_2, ..., a_m son las dimensiones de su primer miembro y, resultan si-

nónimas las locuciones "función dimensionada" (def. 15) o "función dimensionalmente homogénea" (def. 14). Estas funciones forman una clase especial de las que estudia el Análisis matemático y la teoría del Análisis dimensional es precisamente la teoría matemática de carácter puramente algebraico de esta clase de funciones.

DEF. 16. Una función dimensionada (o dimensionalmente homogénea) de dimensiones nulas, es decir, que queda invariante para todo cambio [Ap. I-30] de unidades fundamentales, se llama *nildimensionada.*

Supongamos que respecto del sistema de unidades fundamentales U_1, U_2, ..., U_m la magnitud dimensionada y en [Ap. I-29] tiene la dimensión

$$[y] = [U_1^{a_1} U_2^{a_2} \dots U_m^{a_m}] \ \text{ y las } x_j \text{ las } [x_j] = [U_1^{a_{j1}} U_2^{a_{j2}} \dots U_m^{a_{jm}}]$$

$(j = 1, 2, \dots, n)$, sintetizadas en la siguiente *matriz dimensional* $(i = 1, 2, \dots, m)$:

[Ap. I-32]

	x_1	$x_2 \dots$	x_n	y
U_i	a_{1i}	$a_{2i} \dots$	a_{ni}	a_i

Si mediante las transformaciones homotéticas [Ap. I-30] pasamos a un nuevo sistema de unidades de las mismas magnitudes fundamentales anteriores, la definición 7 y el teorema 4 justifican que *si escribimos la medida de cada magnitud dimensionada en forma concreta, tal*

$$y\,(U_1^{a_1} U_2^{a_2} \dots U_m^{a_m})$$

se obtenga la nueva medida por mera sustitución de las antiguas unidades en las nuevas mediante [Ap. I-30], *es decir*:

[Ap. I-33] $$y(\lambda_1^{a_1} \bar{U}_1^{a_1} \dots \lambda_m^{a_m} \bar{U}_m^{a_m}) = y\lambda_1^{a_1} \dots \lambda_m^{a_m} (\bar{U}_1^{a_1} \dots \bar{U}_m^{a_m}).$$

Esta regla práctica es muy útil y así la hemos aplicado en el ejemplo 4.

Así, las medidas nuevas de las variables de la def. 14 en función de las antiguas serán $(j = 1, 2, \dots, n)$:

[Ap. I-34] $$\bar{y} = y\,\lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \dots \lambda_m^{a_m}, \quad \bar{x}_j = x_j\, \lambda_1^{a_{j1}} \lambda_2^{a_{j2}} \dots \lambda_m^{a_{jm}},$$

Sustituyendo en [Ap. I-31] queda

[Ap. I-35] $$\lambda_1^{a_1} \dots \lambda_m^{a_m}\, \varphi\,(x_1, x_2 \dots x_n) =$$
$$= \varphi(\lambda_1^{a_{11}} \dots \lambda_m^{a_{1m}} x_1, \dots \lambda_1^{a_{n1}} \dots \lambda_m^{a_{nm}} x_n).$$

Las definiciones 14 y 15 son equivalentes a decir:

TEOR. 7. *La función* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *es dimensionalmente homogénea (o dimensionada de dimensiones* a_1, a_2, ..., a_m) *cuando y sólo cuando la ecuación* [Ap. I-35] es una identidad en las variables x_1, x_2, ..., x_n; λ_1, λ_2, ..., λ_m.

EJEMPLO 6. La fuerza F de arrastre de un líquido incompresible, de velocidad v, densidad ρ y viscosidad dinámica η, sobre una esfera lisa de diámetro d, vendrá dada por una función de la forma $F = \varphi(v, d, \rho, \eta)$ que tiene por matriz dimensional [Ap. I-32] en el sistema LTM:

[Ap. I-36]

	η	ϱ	d	v	F
L	—1	—3	1	1	1
T	—1	0	0	—1	—2
M	1	1	0	0	1

La ecuación [Ap. I-35] aquí es

$$\lambda_l \lambda_t^{-2} \lambda_m F = \varphi(\lambda_l \lambda_t^{-1} v, \lambda_l d, \lambda_l^{-3} \lambda_m \varrho, \lambda_l^{-1} \lambda_t^{-1} \lambda_m \eta)$$

que debe verificarse idénticamente en λ_l, λ_t, λ_m, si la función es dimensionalmente homogénea. Es inmediato comprobar que ello ocurre si

[Ap. I-37] $$F = \varrho v^2 d^2 . \Phi(vd\varrho/\eta)$$

con Φ función arbitraria; obsérvese que las expresiones $F/(\varrho v^2 d^2)$ y $vd\varrho/\eta$ son nildimensionadas (def. 16); a expresiones tales las llamaremos *productos nildimensionados*.

El teorema Π y la forma de aplicarlo consiste en establecer por método sistemático ecuaciones de tipo [Ap. I-37] para la ley incógnita φ, demostrando no tan sólo su suficiencia, sino también su necesidad (*i*).

Caso particular del teorema 7 expresado por la identidad [Ap. I-35] es el siguiente:

TEOR. 8. *Una suma de varios términos es dimensionalmente homogénea cuando y sólo cuando todos los términos tienen entre sí y con la suma la misma dimensión.*

Pues si la ecuación [Ap. I-29] tiene la forma $y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, la identidad [Ap. I-35] se convertirá en

$$\lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \dots \lambda_m^{a_m} (x_1 + \dots + x_n) = \lambda_1^{a_{11}} \dots \lambda_m^{a_{1m}} x_1 + \dots + \lambda_1^{a_{n1}} \dots \lambda_m^{a_{nm}} x_n,$$

y al serlo en las x_j, deberá cumplirse (§ 16-2):

$$\lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \dots \lambda_m^{a_m} = \lambda_1^{a_{11}} \lambda_2^{a_{12}} \dots \lambda_m^{a_{1m}} = \dots = \lambda_1^{a_{n1}} \lambda_2^{a_{n2}} \dots \lambda_m^{a_{nm}}$$

idénticamente en las λ_i, y por tanto:

$$a_i = a_{1i} = a_{2i} = \dots = a_{ni} \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad ,$$

como queríamos demostrar. La condición hallada así necesaria, se comprueba inmediatamente, invirtiendo el razonamiento, que es también suficiente.

Obsérvese que la ecuación [Ap. I-28], aunque sea verdadera para cualquier sistema de unidades fundamentales LT, no es dimensionalmente homogénea. Por ejemplo, dada [Ap. I-28] en [cm, s], si pasamos a [m, h] con $s \text{ cm} = s . 10^{-2} \text{ m}$; $v \text{ cm/s} = v . 36 \text{ m/h}$; $g \text{ cm/s}^2 = g . 360^2 \text{ m/h}^2$; $t \text{ s} = t . 3600^{-1} \text{ h}$, la [Ap. I-28] se transforma en

$$\bar{s} . 10^2 + (\bar{v}/36) = (\bar{g}\,\bar{t}/36) + \tfrac{1}{2} \bar{g}\,\bar{t}^2 . 10^2 \quad ,$$

ecuación *distinta* a la [Ap. I-28], aun cuando no como resultado de la transformación de [Ap. I-28], sino por las igualdades separadas $s = \frac{1}{2} g t^2$, $v = gt$, sea también verdadera la antigua ecuación en las nuevas medidas: $\bar{s} + \bar{v} = \bar{g}\,\bar{t} + \frac{1}{2} \bar{g}\,\bar{t}^2$.

Ecuaciones del tipo [Ap. I-28], que siguen siendo verdaderas (aunque acaso *no invariantes en las transformaciones homotéticas de las medidas*) para cualquier cambio de unidades [Ap. I-30] de las magnitudes fundamentales, se llaman por algunos autores *completas* (aunque acaso no sean dimensionalmente homogéneas). Por no hacer esta distinción, autores clásicos en la cuestión como BRIDGMAN complican innecesariamente

con excepciones los teoremas del Análisis dimensional, en particular el básico teorema Π, al referirlos a ecuaciones completas en lugar de dimensionalmente homogéneas como es adecuado hacer. BIRKHOFF (citado en *k*) demuestra que toda relación binomia o trinomia completa es dimensionalmente homogénea, así como que cualquier relación completa es equivalente a un *conjunto* de relaciones nildimensionadas.

T. EHRENFEST-AFANASSJEWA ha introducido un concepto de homogeneidad generalizada mucho más amplio (§ 67, ejercicio 6).

En su aplicación al Análisis dimensional, por el teorema 4 basta considerar el caso en que

$$x_j = q_1^{\alpha_{j1}} q_2^{\alpha_{j2}} \ldots q_m^{\alpha_{jm}} \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

y por el teorema 7 el factor de homogeneidad resulta monomial.

Un estudio detenido de las funciones homogéneas generalizadas se encuentra en: R. SAN JUAN: Rev. Acad. Madrid, T. 39 (1945), págs. 433-440.

g) **Resumen de postulados básicos del Análisis dimensional.** — La aplicación del Análisis dimensional a los problemas prácticos se basa en la hipótesis de que la solución del problema se expresa mediante una ecuación dimensionalmente homogénea en términos de los "argumentos" (variables del fenómeno en cuestión y constantes dimensionadas) que entran en el problema. Esto será siempre posible (teor. 6), aunque en todo caso la hipótesis se justifica por el *postulado físico* inicial de haber supuesto *regular* (*b*) el sistema de medidas para las magnitudes fundamentales adoptadas, por el hecho de que las ecuaciones básicas de la Física que van introduciendo nuevas unidades derivadas (def. 9) son dimensionalmente homogéneas (def. 14) y por postular, aun en el caso no trivial de que haya menos constantes dimensionadas que variables físicas, que en toda investigación física se conservan también dimensionalmente homogéneas las relaciones deducibles algebraicamente de dichas ecuaciones que sirvan para expresar matemáticamente la teoría correspondiente, sin que aparezcan ecuaciones artificiales del tipo [Ap. I-28].

En resumen, aparte los postulados que justifiquen atribuir a diversas manifestaciones físicas la propiedad de ser cantidades de una misma especie de magnitud (*b*), el Análisis dimensional de un determinado conjunto de fenómenos físicos puede basarse en los siguientes postulados:

I. *Existe un sistema de magnitudes de medidas $q_1, q_2, \ldots, q_m$ no negativas cuyas respectivas unidades $U_1, U_2, \ldots, U_m$ pueden fijarse independientemente unas de otras, tales que para números positivos cualesquiera $\lambda_i > 0$ independientes entre sí, admiten transformaciones homotéticas:*

[Ap. I-38] $\quad \overline{q}_i = \lambda_i q_i, \; U_i = \lambda_i \overline{U}_i, \quad (\lambda_i > 0), \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$

(Por ejemplo, en las teorías o cuestiones mecánicas, suele tomarse $m = 3$, con la longitud L, el tiempo T y la masa M).

II. *Existen magnitudes derivadas cuyas medidas no negativas x vienen dadas por una función continua de las medidas no negativas q_i de las magnitudes fundamentales*

[Ap. I-39] $\quad x = \mathrm{f}(q_1, q_2, \ldots, q_m), \quad (x \geqq 0; \; q_i \geqq 0)$

que es independiente de las unidades elegidas. Esto querrá decir que si se efectúan en las magnitudes fundamentales transformaciones homotéticas cualesquiera [Ap. I-38] *y respecto de las nuevas medidas $\overline{q}_i$ se considera que la nueva medida x de la magnitud derivada viene dada por*

[Ap. I-40] $\bar{x} = f(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_m)$,

con el mismo operador f *que en* [Ap. I-39], *resulte que el cambio de medidas x en $\bar{x}$ de la magnitud derivada es también una transformación homotética*

[Ap. I-41] $\bar{x} = \lambda x \quad , \quad (\lambda > 0)$

con λ función de las λ_i, pero no de las q_i.

III. *Es posible decidir por un proceso teórico-experimental que una variable dimensionada y de una magnitud queda determinada por otras ciertas variables dimensionadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en el sentido de que existe una función dimensionalmente homogénea* (def. 14) *que las relacione*

[Ap. I-42] $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Por el teorema 4, el postulado II equivale a decir que existen magnitudes derivadas, cuyas medidas positivas vienen dadas por una expresión monomial

[Ap. I-43] $x = C q_1^{a_1} q_2^{a_2} \ldots q_m^{a_m}$ (C > 0 constante nildimensionada)

independiente de las unidades, en el sentido que bajo las transformaciones [Ap. I-38], la x se transforma también homotéticamente mediante

[Ap. I-44] $\bar{x} = \lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \ldots \lambda_m^{a_m} x$

Los exponentes a_i reciben el nombre de *dimensiones* (físicas) de la magnitud de medida x, referida al sistema de magnitudes fundamentales (def. 10). Éstas pueden considerarse que tienen una dimensión igual a la unidad y las demás nulas. Si todas las dimensiones son nulas, la magnitud x es nildimensionada (def. 11). Todas estas magnitudes (incluyendo las constantes dimensionadas, def. 12) se llaman *dimensionadas* o *dimensionalmente homogéneas.*

Por el teorema 7 y definición 15, el postulado III equivale a decir que una variable dimensionada y queda determinada por otras ciertas variables dimensionadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mediante una función dimensionada (no necesariamente monomial), cuyas dimensiones son las de la variable dimensionada y.

La validez del postulado I se ha discutido mucho. La introducción de constantes dimensionadas efectuada en el teorema 6 lo justifica.

Si un determinado fenómeno físico (por ejemplo, la propagación de la luz) relaciona por una ley varias magnitudes fundamentales (tales L y T), dicha ley podría servir para establecer una ecuación [Ap. I-39] que haga una de ellas derivada de las otras. Sin embargo, por el teorema 6 podemos conservar nuestro antiguo sistema de magnitudes fundamentales, es decir, de medidas independientes [Ap. I-38], y expresar la ley que relaciona las magnitudes fundamentales mediante la introducción de nuevas magnitudes derivadas (por ejemplo, la constante c de dimensión $[LT^{-1}]$ en la propagación de la luz). Es lo que también se ha hecho al introducir la constante G de gravitación universal (ejemplo 4) para hacer compatible esta ley con la medida independiente de la masa M, la longitud L y el tiempo T. Podemos prescindir de ella al precio de considerar M como magnitud derivada de L y T.

Así, pues, para establecer el sistema de magnitudes fundamentales del postulado I, mediante el uso de *adecuadas constantes dimensionadas,* podemos tomar como tales, es decir, de medida independiente, las que nosotros queramos, aunque existan fenómenos físicos que las relacionen para condicionarlas entre sí dentro de la teoría construída. Pero si estos fenómenos físicos que las condicionan entre sí, no influyen en el problema estudiado, será desventajoso en el análisis dimensional que se realice,

desdeñar esta circunstancia. Y así no hemos de olvidar que hacer derivada una magnitud que en el problema estudiado pudiese tomarse como independiente o fundamental, es equivalente a haberla tomado como fundamental y al mismo tiempo hacer intervenir "sin necesidad" en el problema la constante dimensionada que en este caso hay que incluir en la ley del fenómeno no influyente que servía para introducir dicha magnitud como derivada.

h) **Productos nildimensionados.** — Las expresiones monomias dadas por productos entre medidas variables de magnitudes dadas:

[Ap. I-45] $$y = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

intervienen fundamentalmente en el Análisis dimensional.

Si las dimensiones de las magnitudes correspondientes a las variables $(x_1, x_2, \dots, x_n; y)$ respecto de un sistema de unidades fundamentales $U_1, U_2, \dots, U_m$ están dadas por la matriz [Ap. I-32], los exponentes del producto [Ap. I-45] satisfacen al teorema:

TEOR. 9. *El producto y es dimensionado* (def. 15), *es decir, la ecuación* [Ap. I-45] *es dimensionalmente homogénea* (def. 14), *cuando y sólo cuando los exponentes* $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ *son solución del sistema de ecuaciones lineales*

[Ap. I-46] $$a_{1i} k_1 + a_{2i} k_2 + \dots + a_{ni} k_n = a_i \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

En efecto, la condición es necesaria, pues si el producto [Ap. I-45] satisface la ecuación [Ap. I-35] para cualquier cambio de unidades [Ap. I-30], aquí habrá de ser idénticamente en las λ y las x:

$$\lambda_1^{a_1} \dots \lambda_m^{a_m} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} = \lambda_1^{k_1 a_{11}} \dots \lambda_m^{k_1 a_{1m}} x_1^{k_1} \dots \lambda_1^{k_n a_{n1}} \dots \lambda_m^{k_n a_{nm}} x_n^{k_n}$$

y por tanto idénticamente en las λ:

$$\lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \dots \lambda_m^{a_m} = \lambda_1^{k_1 a_{11} + k_2 a_{21} + \dots k_n a_{n1}} + \dots + \lambda_m^{k_1 a_{1m} + k_2 a_{2m} + \dots + k_n a_{nm}}$$

de donde se deduce [Ap. I-46]. Invirtiendo el razonamiento, es inmediato ver que la condición [Ap. I-46] es suficiente.

Si concebimos las magnitudes de medidas $x_1, x_2, \dots, x_m$, y como vectores de m componentes dadas por las columnas de la matriz [Ap. I-32] el teorema 9 equivale a decir que el vector correspondiente a la magnitud de medida y pertenece a la multiplicidad vectorial determinada por los vectores correspondientes a las magnitudes de medidas $x_1, x_2, \dots, x_n$.

El teorema de ROUCHÉ-FROBENIUS sobre sistemas lineales (§ 15-5) da:

TEOR. 10. *Dadas las variables dimensionadas* [Ap. I-32], *existe un producto de la forma* [Ap. I-45], *cuando y sólo cuando la matriz de las n primeras columnas de* [Ap. I-32] *tiene la misma característica que dicha matriz* [Ap. I-32].

Especial importancia tienen los productos definidos por:

DEF. 17. Un producto de la forma [Ap. I-45] referente a las variables [Ap. I-32], se llama *nildimensionado* si $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$ (cfr. def. 11).

Entonces, según [Ap. I-46] del teorema 9, se tiene:

TEOR. 11. *La condición necesaria y suficiente para que* [Ap. I-45] *sea un producto nildimensionado es que los exponentes* k_i *satisfagan el sistema lineal de ecuaciones homogéneas*

[Ap. I-47] $$a_{1i} k_1 + a_{2i} k_2 + \dots + a_{ni} k_n = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad ,$$

cuyos coeficientes son los números a_{ji} *dados por la matriz dimensional*

[Ap. I-48]

	x_1	x_2	...	x_n
U_i	a_{1i}	a_{2i}	...	a_{ni}

Así, según el teorema 11, los productos nildimensionados que se puedan formar con las magnitudes de medidas x_1, x_2, ..., x_n vendrán determinados por los exponentes k_1, k_2, ..., k_n solución del sistema homogéneo [Ap. I-47]

Alterando convenientemente el orden de las ecuaciones e incógnitas podemos suponer que el menor principal de la matriz del sistema corresponde a las r primeras filas y r primeras columnas, con lo que a todo sistema de valores cualesquiera k_{r+1}, k_{r+2}, ..., k_n, tomados como parámetros indeterminados, corresponderán valores k_1, k_2, ..., k_r ya unívocamente determinados mediante

[Ap. I-49] $$a_{1i}\,k_1 + \ldots + a_{ri}\,k_r = -(a_{r+1,i}\,k_{r+1} + \ldots + a_{ni}\,k_n) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \quad ,$$

cuyas soluciones halladas por la regla de CRAMER (§ 15-4) podemos expresar mediante

[Ap. I-50] $$k_j = \alpha_{r+1,j}\,k_{r+1} + \alpha_{r+2,j}\,k_{r+2} + \ldots + \alpha_{n,j}\,k_n \quad , \quad (j = 1, \ldots, r) \quad .$$

donde

$$\alpha_{r+i,j} = -(\alpha_{1,j}\,a_{r+i,1} + \alpha_{2,j}\,a_{r+i,2} + \ldots + \alpha_{r,j}\,a_{r+i,r}) \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, r; \quad i = 1, 2, \ldots, n-r) \quad ,$$

siendo $\alpha_{g,j} = A_{jg}/\Delta$, con A_{jg} adjunto del elemento a_{jg} en el determinante Δ del sistema de CRAMER [Ap. I-49].

Los vectores de n componentes

[Ap. I-51] $$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = (\alpha_{r+1,1}, \ \alpha_{r+1,2}, \ \ldots, \ \alpha_{r+1,r}, \ 1, 0, \ldots, 0) \\ \mathbf{f}_2 = (\alpha_{r+2,1}, \ \alpha_{r+2,2}, \ \ldots, \ \alpha_{r+2,r}, \ 0, 1, \ldots, 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{f}_{n-r} = (\alpha_{n,1}, \ \alpha_{n,2}, \ \ldots, \ \alpha_{n,r}, \ 0, 0, \ldots, 1) \end{cases}$$

son linealmente independientes (§ 60-2), porque de

$$h_1\mathbf{f}_1 + h_2\mathbf{f}_2 + \ldots + h_{n-r}\mathbf{f}_{n-r} = \mathbf{0}$$

aplicada a sus $n-r$ últimas componentes se deduce: $h_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n-r)$.

De [Ap. I-50], [Ap. I-51] y el teorema de ROUCHÉ-FROBENIUS (§ 15-5) deducimos que todas las soluciones del sistema [Ap. I-47] vienen dadas por la combinación lineal:

[Ap. I-52] $$\mathbf{k} = k_{r+1}\mathbf{f}_1 + k_{r+2}\mathbf{f}_2 + \ldots + k_n\mathbf{f}_{n-r} \quad ,$$

donde k_{r+1}, k_{r+2}, ..., k_n son números arbitrarios, y $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_{n-r}$ forman lo que se llama una *base* (Cap. XVII, nota I, *b*) ó un *sistema fundamental de soluciones*, siempre linealmente independientes. Queda así demostrado:

TEOR. 12. *En el espacio vectorial* E_n, *las soluciones* $\mathbf{k}$ *del sistema* [Ap. I-47] *de* m *ecuaciones homogéneas con* n *incógnitas y matriz de característica* r, *forman un subespacio lineal* E_{n-r}, *una de cuyas bases puede ser la* [Ap. I-51] *como sistema fundamental de soluciones, cada una de las cuales se obtiene haciendo en* [Ap. I-50] *igual a la unidad una incógnita paramétrica y nulas las demás.*

Si $r = 1$, el subespacio se llama *hiperplano* vectorial; si $r = n-2$, el subespacio se llama *plano* vectorial; ambos conceptos coinciden para E_3.

El concepto de ortogonalidad permite dar una forma muy elegante a los resultados anteriores. Dados los m vectores de n componentes por

[Ap. I-53] $\mathbf{a}'_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

el sistema homogéneo [Ap. I-47] puede escribirse

[Ap. I-54] $\mathbf{a}'_1 . \mathbf{k} = 0, \; \mathbf{a}'_2 . \mathbf{k} = 0, \; \ldots, \; \mathbf{a}'_m . \mathbf{k} = 0,$

es decir:

TEOR. 13. *El subespacio* $\mathbf{E}_{n-r}$ *de las soluciones* $\mathbf{k}$ *de* [Ap. I-47] (teor. 12), *es el subespacio lineal suplementario* (Cap. XVII, nota I, b_3) *formado por los vectores de* $\mathbf{E}_n$ *que son ortogonales a todos los del subespacio* $\mathbf{E}_r$, *de dimensión* r, *subtendido por los vectores* [Ap. I-53] (*subespacio ortogonal a* $\mathbf{E}_r$ *en* $\mathbf{E}_n$).

Si consideramos el *sistema homogéneo traspuesto* de [Ap. I-47]:

[Ap. I-55] $a_{j1} k'_1 + a_{j2} k'_2 + \ldots + a_{jm} k'_m = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad ,$

de matriz dada por las componentes de n vectores de $\mathbf{E}_m$:

[Ap. I-56] $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jm}) \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad ,$

(con la misma característica r que la matriz [Ap. I-48] del sistema [Ap. I-47], traspuesta de la anterior), entonces el sistema [Ap. I-55] tendrá $m - r$ soluciones $\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \ldots, \mathbf{k}'_{m-r}$ linealmente independientes y que en $\mathbf{E}_m$ determinan el subespacio ortogonal al determinado por los n vectores [Ap. I-56]. Para que [Ap. I-46] tenga solución es necesario y suficiente que el vector $\mathbf{a}$ de componentes $a_1, a_2, \ldots a_m$ pertenezca al subespacio determinado por los vectores [Ap. I-56] (Teorema de ROUCHÉ-FROBENIUS, § 15-5); por esto y lo anterior queda así demostrado:

TEOR. 14. *La condición necesaria y suficiente para que el sistema* [Ap. I-46], *escrito en forma vectorial de* $\mathbf{E}_n$:

[Ap. I-57] $\mathbf{a}'_1 . \mathbf{k} = a_1, \; \mathbf{a}'_2 . \mathbf{k} = a_2, \; \ldots, \; \mathbf{a}'_m . \mathbf{k} = a_m$

sea resoluble es que el vector $\mathbf{a}$ *de componentes* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *de* $\mathbf{E}_m$ *sea ortogonal al subespacio lineal de dimensión* $m - r$, *solución del sistema homogéneo traspuesto* [Ap. I-55], *es decir, que se cumpla:*

[Ap. I-58] $\mathbf{a} . \mathbf{k}'_1 = 0, \; \mathbf{a} . \mathbf{k}'_2 = 0, \; \ldots, \; \mathbf{a} . \mathbf{k}'_{m-r} = 0,$

donde $\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \ldots, \mathbf{k}'_{m-r}$ *forman un sistema fundamental de soluciones de* [Ap. I-55]. *La solución del sistema no homogéneo queda determinada a menos de una solución del sistema homogéneo correspondiente dada por el teorema* 12. Pues la diferencia de dos soluciones del sistema [Ap. I-46] es solución del sistema [Ap. I-47]. Es decir, si existe y es $\mathbf{k}_0$ una solución particular del sistema [Ap. I-46], todas sus demás soluciones vendrán dadas por $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + k_{r+1} \mathbf{f}_1 + \ldots + k_n \mathbf{f}_{n-r}$, donde $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$ forman un sistema fundamental de soluciones [Ap. I-51] del sistema homogéneo [Ap. I-47].

El problema del *cambio de base*, es decir, de hallar las componentes de los vectores de un mismo subespacio lineal referido a distintas bases, se reduce también a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En efecto, referido un subespacio lineal a una base antigua de m vectores unidades linealmente independientes, sea en ella un vector $\mathbf{a}$ de componentes antiguas $(a_1\, a_2, \ldots\, a_m)$ y una nueva base de n vectores unidades, dados en función de la antigua mediante [Ap. I-56]. Entonces, el sistema de ecuaciones lineales [Ap. I-46], equivalente a la igualdad vectorial

[Ap. I-59] $\mathbf{a} = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + k_n \mathbf{a}_n \quad ,$

sirve para buscar las nuevas componentes $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ de ese vector $\mathbf{a}$ respecto de la nueva base [Ap. I-56]. La discusión de [Ap. I-46] nos dirá si la nueva base de referencia es *superabundante*, *estricta* o *insu-*

ficiente para la expresión de todos los vectores del subespacio. Por haber supuesto los vectores $\mathbf{a}_i$ pertenecientes a dicho subespacio, la dimensión m de ésta no quedará superada por la característica r de la matriz [Ap. I-56]. Así queda demostrado:

TEOR. 15. *Supuesto referido un subespacio lineal a una base antigua de m vectores unidades linealmente independientes, y dada como nueva base formada por los n vectores* [Ap. I-56] *del subespacio, las nuevas componentes* $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ *de todo vector* $\mathbf{a}$ *de componentes antiguas* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *se obtendrán por resolución del sistema lineal* [Ap. I-46]. *Si la característica r de la matriz del sistema* [Ap. I-46] *es igual a la dimensión m del subespacio, la resolución de* [Ap. I-46] *es siempre posible para cualquier vector* $\mathbf{a}$ *del subespacio; entonces la base* [Ap. I-56] *es estricta o superabundante según que el número n de vectores* $\mathbf{a}_i$ *sea igual o mayor que la dimensión m del subespacio. Si la característica r de* [Ap. I-56] *es menor que la dimensión m del subespacio, habrá algún vector* $\mathbf{a}$ *de éste linealmente independiente de los* $\mathbf{a}_1$, *la solución de* [Ap. I-46] *será entonces imposible y la base será insuficiente; en particular, siempre que el número n de vectores base es menor que la dimensión m del subespacio.*

Pero es importante observar que aun cuando sea $n \geqq m$, si la matriz [Ap. I-56] tiene característica $r < m$, la nueva base [Ap. I-56] será también *insuficiente*.

El teorema 12 nos da el conjunto de productos nildimensionados que pueden formarse con las magnitudes de dimensiones [Ap. I-48]. El teorema 14 permite saber si existen, hallándolos, productos dimensionados [Ap. I-45].

El teorema 15 resuelve el problema del cambio de magnitudes fundamentales en número y calidad.

La estructura lineal de los sistemas [Ap. I-46] y [Ap. I-47] permite tratar a las magnitudes de medidas $x_1, x_2, \ldots x_n$ como vectores de m componentes dados por la matriz [Ap. I-48]. Pero es importante hacer notar que para este tratamiento vectorial de carácter puramente formal *no necesitamos imponer a las magnitudes de medidas x_i ninguna hipótesis física* fuera de la de haber admitido una *medida regular* (*b*), hipótesis básica para la introducción de las funciones dimensionalmente homogéneas (*f*), es decir, de las invariantes a las transformaciones homotéticas [Ap. I-30] en las unidades de medida, funciones que son las estudiadas por el Análisis dimensional.

EJEMPLOS: 7. Si queremos representar el sistema MLT mediante la longitud $= [L]$, la energía $E = [ML^2T^{-2}]$ y la aceleración $a = [LT^{-2}]$ o bien la longitud $= [L]$, la masa $= [M]$, la velocidad $v = [LT^{-1}]$ y la aceleración $a = [LT^{-2}]$ o bien la longitud $= [L]$, la velocidad $v = [LT^{-1}]$ y la aceleración $a = [LT^{-2}]$, tendremos las respectivas matrices dimensionales:

	L	E	a	L	M	v	a	L	v	a
M	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
L	1	2	1	1	0	1	1	1	1	1
T	0	—2	—2	0	0	—1	—2	0	—1	—2

de características 3, 3, 2 que dan para el primer caso base estricta, en el segundo base superabundante y en el tercero base insuficiente (donde no tendrán representación las magnitudes que dependan de la masa).

8. Si queremos representar una energía E de 10 erg $= 10$ g cm^2 s^{-2}, pasando del sistema CGS al que tenga por unidades fundamentales

1 kgr = 980 665 g cm s^{-2}, 1 cel = 100 cm s^{-2}, 1 h = 3 600 s, habrá que aplicar el teorema 15 y la transformación [Ap. I-30]. Si llamamos:

$$\text{[Ap. I-60]} \qquad \begin{cases} 1 \text{ g cm s}^{-2} = F = (1/980\,665) \text{ kgr} \;, \\ 1 \text{ cm s}^{-2} = a = (1/100) \text{ cel} \;, \\ \text{s} = t = (1/3\,600) \text{ h} \;, \end{cases}$$

tendremos la matriz dimensional

	F	a	t	E
M	1	0	0	1
L	1	1	0	2
T	—2	—2	1	—2

a la que corresponde el sistema $k_1 = 1$, $k_1 + k_2 = 2$, $-2k_1 - 2k_2 + k_3 = -2$ con solución $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 2$, dando

$$10 \text{ erg} = 10 \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-2} = 10 \;(Fat^2) = 10 \frac{1 \text{ kgr}}{980\,665} \cdot \frac{1 \text{ cel}}{100} \cdot \frac{1 \text{ h}^2}{3600^2} =$$

$$= \frac{1}{980\,665 \,.\, 36^2 \,.\, 10^6} \text{ kgr cel h}^2.$$

Otro procedimiento intuitivo es pasar de las expresiones dimensionales exponenciales [Ap. I-18] y [Ap. I-45] y a las lineales [Ap. I-46] tomando logaritmos formalmente. Así, de [Ap. I-60] se obtendría

$$\ln \text{g} + \ln \text{cm} - 2 \ln \text{s} = \ln F \;, \quad \ln \text{cm} - 2 \ln \text{s} = \ln a \;, \quad \ln \text{s} = \ln t \;,$$

de donde se despejan ln g, ln cm y ln s para expresar $\text{g} = Fa^{-1}$, $\text{cm} = at^2$, $\text{s} = t$, y finalmente

$$10 \text{ erg} = 10 \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-2} = 10 \;(Fa^{-1} a^2 t^4 t^{-2}) = 10 \;(Fat^2) =$$

$$= 10 \left(\frac{1 \text{ kgr}}{980\,665} \cdot \frac{1 \text{ cel}}{100} \cdot \frac{1 \text{ h}^2}{3600^2} \right) = \frac{\text{kgr cel h}^2}{980\,665 \,.\, 36^2 \,.\, 10^5} \,.$$

Estudiemos ahora la multiplicidad de productos nildimensionados que puedan formarse con dichas magnitudes de medidas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sean los siguientes productos nildimensionados:

$$\text{[Ap. I-61]} \qquad \Pi_i = x_1^{k_{i1}} \, x_2^{k_{i2}} \ldots x_n^{k_{in}} \;, \quad (i = 1, 2, \ldots, p) \;,$$

con exponentes dados por la matriz $(i = 1, 2, \ldots, p)$:

[Ap. I-62]

	x_1	x_2	...	x_n
Π_i	k_{i1}	k_{i2}	...	k_{in}

Def. 18. Estos productos [Ap. I-62] nildimensionados se llaman *independientes* si ninguno de ellos es igual al producto de potencias de los demás; es decir, si no existen números constantes $h_1, h_2, \ldots, h_p$ distintos de los simultáneamente nulos $h_1 = h_2 = \ldots = h_p = 0$, tales que se cumpla

$$\text{[Ap. I-63]} \qquad \Pi_1^{h_1} \, \Pi_2^{h_2} \ldots \Pi_p^{h_p} = 1,$$

idénticamente en las medidas variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Entonces se cumple:

TEOR. 16. *Los productos nildimensionados* $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_p$ *son independientes cuando y sólo cuando las filas de la matriz* [Ap. I-62] *de sus exponentes son linealmente independientes.*

En efecto, la condición es necesaria, pues si los productos son independientes y supusiéramos una dependencia lineal entre las filas de la matriz [Ap. I-62], existirían valores no todos nulos $h_1, h_2, \ldots, h_p$ tales que

[Ap. I-64] $$h_1 k_{1i} + h_2 k_{2i} + \ldots + h_p k_{pi} = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

y entonces sería

$$\Pi_1^{h_1} \; \Pi_2^{h_2} \ldots \Pi_p^{h_p} = x_1^0 \, x_2^0 \ldots x_n^0 = 1,$$

idénticamente en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, contra la independencia de los productos considerados. La condición es también suficiente, pues si las flias de la matriz [Ap. I-62] son linealmente independientes y supusiéramos dependientes los productos nildimensionados dados, existirían valores no todos nulos $h_1, h_2, \ldots, h_p$ tales que se cumpliría [Ap. I-63], es decir:

$$x_1^{h_1 k_{11} + h_2 k_{21} + \ldots + h_p k_{p1}} + \ldots + x_n^{h_1 k_{1n} + h_2 k_{2n} + \ldots + h_p k_{pn}} = 1$$

idénticamente en las $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lo que implicaría la anulación de los exponentes expresada por el cumplimiento de [Ap. I-64] y entonces las filas de la matriz [Ap. I-62] no serían linealmente independientes contra la hipótesis de suficiencia considerada.

La interpretación vectorial del teorema 16 es la siguiente: Los productos nildimensionados Π_i concebidos como vectores de n componentes dados por los exponentes $k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{in}$ forman, según los teoremas 11, 12 y 13, el espacio vectorial ortogonal al espacio vectorial determinado por la matriz [Ap. I-53], es decir la [Ap. I-48] tomada por filas, y la def. 18 que hemos dado de dependencia de los productos nildimensionados Π_i coincide por el teorema 16 con la que corresponde al ser concebidos como vectores de las n componentes antedichas.

Por el teorema 12, el subespacio vectorial en el espacio de n componentes que forman los productos nildimensionados, tiene dimensión $n - r$, si r es la característica de la matriz (a_{ji}) dada en [Ap. I-48], y cualquiera de esos productos nildimensionados se podrá representar como dependiente de $n - r$ de ellos que sean independientes entre sí y se tome como base de la multiplicidad formada por todos los productos nildimensionados. Dicha base podrá ser un sistema fundamental de soluciones dado rutinariamente por las igualdades [Ap. I-51]. Esto nos sugiere la siguiente definición:

DEF. 19. Un conjunto de productos nildimensionados de las variables dimensionadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se llama *completo* si cada producto en el conjunto es independiente de los demás y cualquier otro producto nildimensionado de dichas variables se puede expresar como producto de potencias de los productos nildimensionados del conjunto dado.

El teorema 12 demuestra:

TEOR. 17. *Cualquier sistema fundamental de soluciones del sistema lineal de ecuaciones homogéneas* [Ap. I-47] *proporciona los exponentes de un conjunto completo de productos nildimensionados de las variables dimensionadas* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Recíprocamente, los exponentes de un conjunto completo de productos nildimensionados de las variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *forman un sistema fundamental de soluciones del sistema lineal de ecuaciones homogéneas* [Ap. I-47]

El teorema 13 demuestra:

TEOR. 18. *El número de productos de un conjunto completo de productos nildimensionados de las variables dimensionadas* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *es* $n - r$ *si* r *es la característica de la matriz dimensional* (a_{ij}) *de dichas variables.*

EJEMPLO 9. En el ejemplo 6, la matriz dimensional en el sistema *LTM era* [Ap. I-36].

Los productos nildimensionados a formar vendrán dados por los exponentes k_i tales que sea idénticamente en las variables dimensionadas

$$\eta^{k_1}\, \varrho^{k_2}\, d^{k_3}\, v^{k_4}\, F^{k_5} = 1$$

es decir,

$$[ML^{-1}T^{-1}]^{k_1}\, [ML^{-3}]^{k_2}\, [L]^{k_3}\, [LT^{-1}]^{k_4}\, [MLT^{-2}]^{k_5} = [1]$$

Para ello han de ser nulos los exponentes en M, L, T (teor. 11):

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_5 = 0 \\ -k_1 - 3k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 0 \\ -k_1 - k_4 - 2k_5 = 0, \end{cases}$$

que es el sistema [Ap. I-47].

Pueden tomarse como incógnitas principales k_1, k_2, k_3 por ser el determinante de sus coeficientes $= -1 \neq 0$. Así, resulta el sistema completo de soluciones

[Ap. I-65] $$k_1 = -k_4 - 2k_5 \quad , \quad k_2 = k_4 + k_5 \quad , \quad k_3 = k_4$$

que es el dado en [Ap. I-50]. Mediante el método [Ap. I-51] que consiste simplemente en obtener cada solución fundamental haciendo igual a la unidad una incógnita paramétrica y nulas las demás, en el caso ($k_4 = 1$, $k_5 = 0$), ($k_4 = 0$, $k_5 = 1$), con los valores de (k_1, k_2, k_3) que respectivamente resulten por [Ap. I-65] puede tomarse como conjunto completo de productos nildimensionados los de exponentes de la matriz [Ap. I-62] que será aquí:

	η	ϱ	d	v	F
Π_1	—1	1	1	1	0
Π_2	—2	1	0	0	1,

es decir, $\Pi_1 = vd\varrho/\eta$, $\Pi_2 = F\varrho/\eta^2$. Si en el segundo producto no queremos que figure η, bastará considerar el conjunto también completo de productos nildimensionados dado por

[Ap. I-66] $$\Pi_1 = vd\varrho/\eta \quad , \quad \Pi_1^{-2}\,\Pi_2 = F/(\varrho v^2 d^2) \quad ,$$

(pues el determinante de los exponentes de los Π_i es $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 1 \neq 0$) , que es el aplicado por "feliz casualidad" en [Ap. I-37].

Se llama *número de* REYNOLDS **R** a uno cuyas variables dimensionadas sean $\Pi_1 = vd\varrho/\eta$ y *coeficiente de presión* **P** a uno cuyas variables dimensionadas sean $\Pi_1^{-2}\,\Pi_2 = F/(\varrho v^2 d^2)$, cuyo nombre proviene de tener F/d^2 la dimensión de una presión. Como en el ejemplo 6, el área proyectada de la esfera es $\frac{1}{4}\pi d^2$, se llama *coeficiente de arrastre* $\mathbf{C}_a$ al

$$\mathbf{C}_a = 2\frac{1}{\varrho v^2} \cdot \frac{F}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{8F}{\pi \varrho\, v^2 d^2} \quad ,$$

con lo que la ecuación allí obtenida [Ap. I-37] se convierte en la

[Ap. I-67] $$\mathbf{C}_a = \frac{8}{\pi} \cdot \Phi(\mathbf{R}).$$

La ecuación [Ap. I-67] puede dibujarse en gráfica experimental como la de la figura 446, realizada en escalas logarítmicas para evitar que la curva se verticalice a la izquierda. Esta *sola* gráfica da una información completa de la fuerza de arrastre sobre esferas lisas de *cualquier*

tamaño en líquidos incomprensibles de densidad, viscosidad y velocidad *cualesquiera*. Para hallar experimentalmente $F = \varphi(v, d, \varrho, \eta)$ sin el Análisis dimensional, se hubiesen requerido cerca de 25 cartas gráficas que mostrasen separadamente los efectos de las variables v, d, ϱ, η.

Además, la gráfica (fig. 446) es aproximadamente válida para un flúido compresible como el aire, si su velocidad es menor que la mitad de la del sonido en el flúido; y también puede obtenerse mediante un modelo. Si, por ejemplo, el prototipo es una esfera lisa de 3 m de diá-

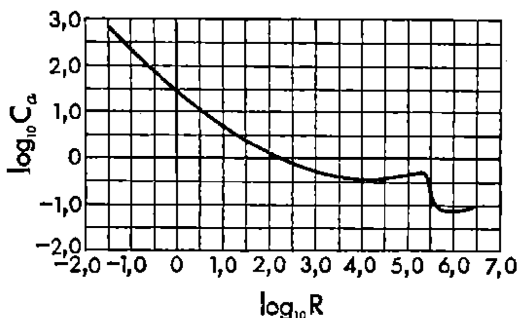


Fig. 446. — Coeficiente de arrastre para esferas lisas (Ref.: F. EISNER, *Das Widerstandproblem*, Proc. 3rd. Intern. Congress Applied Mechanics, Estocolmo, 1931).

metro sumergida en aire a 20° C, con velocidad de 20 m/s, el coste de la experimentación de la fuerza de arrastre en esas condiciones sería prohibitivo. Sin embargo, el coeficiente de arrastre C_a puede ser obtenido con un modelo constituído por una esfera de 1/2 m de diámetro sumergida en *agua* a 20° C con velocidad de 8 m/s, pues el número de REYNOLDS resulta de igual valor $3{,}97.10^6$ en ambos casos. (A 20° C se ha supuesto para el aire $\varrho_p = 1{,}205$ kg/m^3, $\eta_p = 0{,}018\,2.10^{-3}$ kg m^{-1} s^{-1}, y para el agua $\varrho_m = 998{,}203$ kg/m^3, $\eta_m = 1{,}008\,7.10^{-3}$ kg m^{-1} s^{-1}. Con lo que deberá ser

$$\frac{v_p\, d_p}{v_m\, d_m} = \frac{\varrho_m\, \eta_p}{\varrho_p\, \eta_m} = \frac{998{,}203.0{,}0182.10^{-3}}{1{,}205.1{,}008\,7.10^{-3}} = 14{,}9).$$

Así, aunque se desconozca la forma de la función Φ, si **R** vale lo mismo para el modelo y el prototipo, lo mismo ocurrirá con $\Phi(\mathbf{R})$. Aun cuando el coeficiente de arrastre C_a resulte el mismo en el modelo y en el prototipo, las respectivas fuerzas de arrastre F_m y F estarán relacionadas mediante

$$\frac{F_m}{F} = \frac{\varrho_m\, v^2{}_m\, d^2{}_m}{\varrho v^2 d^2} = \frac{998{,}203}{1{,}205} \left(\frac{8}{20}\right)^2 \cdot \left(\frac{0{,}5}{3}\right)^2 = 3{,}68.$$

i) El teorema Π. — Evidentemente, cualquier ecuación entre productos nildimensionados es dimensionalmente homogénea, es decir, la forma de la ecuación es invariante respecto de un cambio de unidades fundamentales [Ap. I-30]. Así, una condición *suficiente* para que una ecuación sea dimensionalmente homogénea, es que sea reducible a una ecuación entre productos nildimensionados. Esto ya fué observado en las publicaciones de A. VASCHY (1892-1895) y por ello los productos nildimensionados son llamados por algunos *variables de* VASCHY; más significativo es denominarlas *variables nildimensionadas*. Pero E. BUCKINGHAM en 1914 sentó el principio fundamental de que aquella condición es también *necesaria*.

Esto constituye el teorema Π, llamado también *teorema de* VASCHY-BUCKINGHAM.

TEOR. 19. *Una ecuación dimensionalmente homogénea puede siempre reducirse a una relación entre un sistema completo de productos nildimensionados, supuestas restringidas las variables originales a tomar sólo valores positivos.*

El teorema no es evidente por sí mismo, puesto que una condición sea suficiente, en manera alguna implica que sea necesaria.

El mismo BUCKINGHAM no dió del teorema Π una demostración rigurosa, sino que sólo consiguió hacerlo plausible. Sin embargo, mostró bien que toda la teoría del Análisis dimensional queda resumida en él. Éste es el teorema que hemos aplicado en el ejemplo 6 para hallar la fuerza de arrastre sobre una esfera lisa. En [Ap. I-66] hemos encontrado para este ejemplo que un sistema completo de productos nildimensionados lo forman el número de REYNOLDS (R) y el coeficiente de presión P. Por tanto, la relación buscada puede ponerse en la forma Ψ (R, P) $= 0$, ó lo que es equivalente $\mathrm{P} = \Phi(\mathrm{R})$; esta relación incógnita, no proporcionada por el Análisis dimensional, pensada en forma implícita o explícita, puede hallarse experimentalmente y entonces suele representarse por una gráfica como se ha hecho en la figura 446.

Antes de demostrar el teorema Π, probemos el siguiente teorema, que vuelve a justificar la expresión monomial de las magnitudes derivadas:

TEOR. 20. *Si* $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es una ecuación dimensionalmente homogénea* (def. 14), *existe siempre un producto de potencias de las* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *que tiene la misma dimensión que la variable* y *supuesta no idénticamente nula.*

En efecto, supongamos que la función $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *no idénticamente nula* en las variables dimensionadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es a su vez dimensionada (def. 15) y veamos entonces que suponer que no exista un producto de potencias de las x_i que tenga la misma dimensión que y conduce a una contradicción. Por el teorema 10 dicho producto no existirá cuando y sólo cuando la característica de la matriz [Ap. I-32] sea mayor que la característica r de la matriz [Ap. I-48]. Entonces, la característica de la matriz [Ap. I-32] sería $r + 1 \leqq m$ y un menor principal de dicha matriz contendría siempre la columna correspondiente a las dimensiones de y. Por reordenación de variables x_i y unidades fundamentales U_j podemos suponer que dicho menor principal fuese:

$$\text{[Ap. I-68]} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots\ a_{r1} & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1r} & a_{2r} & \ldots\ a_{rr} & a_r \\ a_{1,r+1} & a_{2,r+1} & \ldots\ a_{r,r+1} & a_{r+1} \end{vmatrix} \neq 0 \quad ,$$

el que desarrollado por su última columna daría

$$\text{[Ap. I-69]} \qquad \mathrm{A}_1 a_1 + \mathrm{A}_2 a_2 + \ldots \mathrm{A}_r a_r + \mathrm{A}_{r+1} a_{r+1} \neq 0 \quad ,$$

siendo respectivamente $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_r, \mathrm{A}_{r+1}$ los adjuntos de los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}$. Si sustituímos la última columna del determinante [Ap. I-68] por los elementos $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ir}, a_{i,r+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, r$, el determinante que resulte será nulo por tener dos columnas iguales, y para $i = r + 1, \ldots, n$, el determinante que resulte de orden $r + 1$ es un menor de la matriz [Ap. I-48], también nulo, por haber supuesto que era r la característica de esta matriz. Si desarrollamos estos determinantes por la última columna, quedará:

$$\text{[Ap. I-70]} \qquad \mathrm{A}_1 a_{i1} + \mathrm{A}_2 a_{i2} + \ldots + \mathrm{A}_r a_{ir} + \mathrm{A}_{r+1} a_{i,r+1} = 0 \quad , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Que $y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sea dimensionada, es equivalente a que se cumpla [Ap. I-35] idénticamente en las $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (teorema 7). Si en dicha identidad

[Ap. I-71]
$$\lambda_1^{a_1} \ldots \lambda_m^{a_m} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$$
$$\equiv \varphi(\lambda_1^{a_{11}} \ldots \lambda_m^{a_{m1}} x_1, \ldots, \lambda_1^{a_{n1}} \ldots \lambda_m^{a_{nm}} x_n)$$

para un número positivo b *cualquiera* escogemos

$$\lambda_1 = b^{A_1}, \lambda_2 = b^{A_2}, \ldots \lambda_r = b^{A_r}, \lambda_{r+1} = b^{A_{r+1}}, \lambda_{r+2} = \ldots = \lambda_m = 1$$

por [Ap. I-70] será en el segundo miembro de [Ap. I-71]

$$\lambda_1^{a_{i1}} \lambda_2^{a_{i2}} \ldots \lambda_m^{a_{im}} = b^{A_1 a_{i1} + A_2 a_{i2} + \ldots + A_{r+1} a_{i,r+1}} = b^0 = 1, \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

es decir, dicho segundo miembro se convertirá en $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, mientras que en el primer miembro quedaría

$$\lambda_1^{a_1} \lambda_2^{a_2} \ldots \lambda_m^{a_m} = b^{A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_{r+1} a_{r+1}}$$

con exponente de b no nulo por [Ap. I-69]. Entonces habría de ser

$$b^{A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_{r+1} a_{r+1}} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

lo que es absurdo para b positivo *cualquiera*, y $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no idénticamente nulo. Por tanto, el teorema 20 queda demostrado.

Además, si el sistema [Ap. I-46] tiene alguna solución que dé un producto de la forma [Ap. I-45], y es r la característica común de las matrices [Ap. I-32] y [Ap. I-48], habrá entonces $n - r$ incógnitas $k_1, k_2, \ldots, k_n$ paramétricas arbitrarias, mediante las cuales podrán expresarse las otras r tomadas como principales y que corresponderán a un menor principal (teorema de ROUCHÉ-FROBENIUS, § 15-5).

Pasemos ahora a demostrar el teorema 19. Supuesta fijada una solución cualquiera del sistema [Ap. I-46], tendremos que la función

[Ap. I-72]
$$\Phi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}}$$

será dimensionalmente homogénea, de dimensiones nulas, es decir, será nildimensionada (def. 16).

Si suponemos que en la matriz del sistema [Ap. I-46], el menor formado por las r primeras filas y r primeras columnas es principal, cada una de las $n - r$ restantes columnas será combinación lineal de las r primeras, es decir

[Ap. I-73]
$$a_{r+s, j} = k_{s1} a_{1j} + k_{s2} a_{2j} + \ldots + k_{sr} a_{rj}, \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

para $s = 1, 2, \ldots, n - r$.

Por tanto, los $n - r$ productos

[Ap. I-74]
$$\Pi_s = \frac{x_{r+s}}{x_1^{k_{s1}} x_2^{k_{s2}} \ldots x_r^{k_{sr}}}, \quad (s = 1, 2, \ldots, n - r)$$

serán nildimensionados (def. 17), y como respecto de ellos las $n - r$ últimas columnas de la matriz [Ap. I-62] forman una matriz cuadrada unidad (todos los elementos son nulos, menos los de la diagonal principal que valen 1), por el mismo razonamiento que hemos aplicado a [Ap. I-51] queda probado (teor. 16) que dichos $n - r$ productos nildimensionados

son independientes. Forman, pues, respecto de las variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ un conjunto completo de productos nildimensionados (teor. 18).

En la función nildimensionada $\Phi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ podemos sustituir las $n - r$ últimas variables por las [Ap. I-74] y será

[Ap. I-75] $$\Phi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_r, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r}).$$

Entonces, si atribuímos a las x_i un sistema cualquiera de valores en que *todas las* $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *sean positivas distintas de cero*, resultará que tomando logaritmos en [Ap. I-34] podemos escribir:

$$\begin{cases} \lg \bar{x}_1 = \lg x_1 + a_{11} \lg \lambda_1 + \ldots + a_{1r} \lg \lambda_r + \ldots + a_{1m} \lg \lambda_m \quad , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lg \bar{x}_r = \lg x_r + a_{r1} \lg \lambda_1 + \ldots + a_{rr} \lg \lambda_r + \ldots + a_{rm} \lg \lambda_m \quad , \end{cases}$$

y por ser el menor principal $|a_{ij}| \neq 0$, $(i, j = 1, 2, \ldots, r)$, podrán siempre hallarse valores de $\lg \lambda_1, \ldots, \lg \lambda_r$ que hagan $\lg \bar{x}_1, \ldots, \lg \bar{x}_r$ arbitrarias. Por tanto, mediante cambios de unidades del tipo [Ap. I-30], podemos escoger adecuadamente $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, para que $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r$ (y los demás $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m$) tomen valores *positivos cualesquiera*, mientras que en [Ap. I-75] por ser Φ_0 y $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r}$ nildimensionadas, ellos quedarán invariados para las λ_i variables. Esto prueba que la Φ no depende de $x_1, x_2, \ldots, x_r$, es decir

$$\Phi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r}).$$

Sustituyendo en [Ap. I-72] queda

[Ap. I-76] $$\frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}} = \Phi(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r})$$

lo que demuestra el teorema Π (teor. 19), pues al establecer [Ap. I-72] según el teorema 20, hemos supuesto que

$$y/(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n})$$

es un producto nildimensionado Π, pudiendo escribirse [Ap. I-76] en la forma

[Ap. I-77] $$\Pi = \Phi(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r}).$$

Obsérvese que en la demostración del teorema Π hemos admitido sólo para las variables valores positivos. Por ello, *en los problemas de Análisis dimensional, las variables independientes se suponen siempre restringidas a tomar sólo valores positivos.*

De la demostración anterior surgen los siguientes corolarios:

TEOR. 21. *En la expresión del teorema Π dada por la fórmula* [Ap. I-76], *donde r es la característica de la matriz* [Ap. I-48] *si es $r = n$, la función Φ se reduce a una constante y la función φ es necesariamente un monomio; además habrá de ser $n \leqq m$.*

TEOR. 22. *En la expresión del teorema Π dada por la fórmula* [Ap. I-76], *para el caso $r < n$, pueden tomarse arbitrarios (por ejemplo, nulos) $n - r$ exponentes entre los $k_1, k_2, \ldots, k_n$ que no correspondan a un menor principal de la matriz* [Ap. I-48], *quedando las r correspondientes a éste ya determinados por los anteriores; además, el sistema completo de $n - r$ productos nildimensionados $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r}$ puede sustituirse* (teor. 17) *por cualquier otro sistema completo de $n - r$ productos nildimensionados.*

A su vez las variables nildimensionadas $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r}$ que figuran en la ecuación [Ap. I-77], *forman un sistema completo de pro-*

ductos nildimensionados respecto de las $n + 1$ *variables dimensionadas* $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$, *con matriz dimensional* [Ap. I-32] *de característica* r, *debiendo dicha matriz tener menor principal que no contenga la columna de dimensiones de* y *para que esta variable pueda estar en el producto* Π *y sólo en él* (cfr. teor. 10).

Las indeterminaciones mencionadas y el desconocimiento de la función Φ que no halla el Análisis dimensional, constituyen limitaciones en el alcance de la aplicación del teorema Π como instrumento de investigación de leyes físicas.

j) Elección y ordenamiento de incógnitas en la aplicación del teorema Π. — Por los teoremas 10 y 20, la función dimensionada y buscada por el teorema Π existirá cuando y sólo cuando las matrices [Ap. I-32] y [Ap. I-48] tengan la misma característica r. Además, por el teorema 21, la función y quedaría ya determinada como un monomio, a menos de un factor constante, si dicha característica r fuese igual a n. También el teorema 22 nos dice que la función desconocida Φ dependerá de menos variables y por tanto la solución habrá quedado menos indeterminada cuanto menor sea $n - r$. Por eso hemos de procurar que el número de variables dimensionadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de que ha de depender y sea lo *menor* posible, mientras que hemos de tomar el número m de magnitudes fundamentales lo *mayor* posible para intentar así aumentar r, lo que ocurrirá siempre que dichas magnitudes tomadas como fundamentales influyan independientemente en la ley física estudiada. Si para la existencia de y nos viésemos obligados a incluir una constante dimensionada (def. 12), índice de que hay una ley que liga las magnitudes fundamentales que interviene en el fenómeno estudiado, al aumentar m nada hubiésemos ganado, pues también aumentaría n. Todo esto será aclarado en los ejemplos 10 y 11.

Por otra parte, en las condiciones del teorema 22, hay una infinidad de conjuntos completos de productos nildimensionados y cada uno de ellos es admisible en la aplicación del teorema Π. Sin embargo, BUCKINGHAM mostró, mediante adecuados ejemplos, que en la práctica algunos conjuntos completos de productos nildimensionados son más útiles que otros para formular la ecuación $\Pi = \Phi(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r})$ de manera eficaz en su aplicación. Asimismo, hemos de tener en cuenta la parte final del enunciado del teorema 22 para poder despejar y.

Por otra parte, entre las variables originales dadas, hay algunas que pueden ser variadas por técnicas experimentales, mientras las restantes se mantienen constantes, tal el caso de la velocidad v de un flúido a lo largo de un caño, regulada por una válvula. En cambio, otras variables dimensionadas dadas (*variables* sólo por el *cambio* de unidades en que se expresan) no pueden modificarse, tal la aceleración g de la gravedad.

BUCKINGHAM observó que se obtiene un control experimental máximo sobre las variables nildimensionadas, si cada una de las variables originales que pueden ser reguladas aparecen en sólo un producto nildimensionado. Así, en el ejemplo anterior, si la velocidad v aparece sólo en un producto nildimensionado, entonces la variación de éste puede ser regulada por la de v. Si para formar productos nildimensionados Π, Π_1, Π_2, ... Π_{n-r} a partir de la matriz [Ap. I-32] seguimos el método rutinario [Ap. I-51] del teorema 12, aplicado en el ejemplo 9, las condiciones anteriores se cumplirán mediante la regla siguiente:

En la matriz dimensional [Ap. I-32] *de característica* r, *póngase en la última columna la variable dependiente* y; *en la penúltima columna la variable* x_n *que puede regularse mejor experimentalmente, y así sucesivamente, hasta dejar en la primera columna la variable* x_1 *que sea susceptible de menos variación. Ello siempre que las* r *primeras columnas correspondan a un menor principal, pues en el caso excepcional de que esto no ocurriese, debe alterarse lo menos posible, pero adecuadamente, la ordenación de columnas para que puedan tomarse como principales los*

r primeros exponentes k_i que entran en los productos nildimensionados buscados.

Obsérvese que al formar por la regla anterior el producto Π despejado de la fórmula [Ap. I-77], atribuímos 1 al exponente de y y 0 a los exponentes adoptados como paramétricos (cfr. teor. 22).

Siguiendo dicha regla se ha formado la matriz dimensional [Ap. I-36] de variables dimensionadas consideradas en el ejemplo 6.

En resumen, la elección de las variables dimensionadas x_i de que se crea depende y es la cuestión delicada a resolver mediante la intuición basada en la experiencia físico-técnica que haya podido acumularse en el problema planteado, elección relacionada con las magnitudes que se tomen como fundamentales (de medida independiente) por la supresión o introducción de adecuadas constantes dimensionadas.

Una vez efectuada dicha elección, se forma la matriz dimensional [Ap. I-32], y respecto de ella se establece el sistema de ecuaciones lineales homogéneas análogo al [Ap. I-47] respecto de [Ap. I-48]. Mediante la aplicación del teorema 12 se obtiene un sistema fundamental de soluciones que dará lugar a un conjunto completo de productos nildimensionados (teorema 17) respecto de los cuales puede establecerse la fórmula [Ap. I-77], es decir [Ap. I-76], según los teoremas 21 y 22 (ejemplos 10 y 11).

Para investigar el comportamiento de un prototipo (máquina o proceso físico) mediante un modelo, se obtienen por el teorema Π sendas ecuaciones [Ap. I-76] para el prototipo y para el modelo; entonces, si "ciertas condiciones de semejanza física" se satisfacen, podemos *suponer* que en ambas *coinciden* las funciones incógnitas Φ dependientes de los mismos productos nildimensionados Π, es decir, será

prototipo *modelo*

$$y = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-r}) \,, \; y' = x'^{k_1}_1 \dots x'^{k_n}_n \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-r})$$

de donde se obtiene

$$y = y'(x_1/x'_1)^{k_1} \dots (x_n/x'_n)^{k_n} \quad ,$$

que al no contener ninguna función desconocida, permite hallar la y del prototipo mediante la y' observada en el modelo (cfr. ejemplos 9 y 11).

EJEMPLO 10. *Flujo calórico de un cuerpo sumergido en una corriente líquida.* — Éste es el llamado problema de BOUSSINESQ, tratado por LORD RAYLEIGH, RIABOUCHINSKY y recientemente por J. PALACIOS *.

Un cuerpo sólido de determinada forma geométrica, de longitud l variable, se encuentra en una corriente líquida de velocidad v y mantenido a una diferencia de temperaturas θ respecto de las partículas alejadas más frías del líquido. Se busca el flujo calórico q desde el cuerpo hacia el líquido, siendo λ la conductividad térmica del líquido ($\lambda = (QT^{-1}/S)/\text{grad}\,\theta$) y e su calor específico por unidad de volumen ($e = QL^{-3}/\Delta\theta$). Si suponemos (por razones teórico-experimentales ajenas al estricto análisis dimensional del problema) que *sólo* influyen en el fenómeno las magnitudes mencionadas referidas a la longitud (L), tiempo (T), calor (Q) y temperatura (θ) tomadas como fundamentales, podremos establecer el siguiente esquema de matriz dimensional [Ap. I-32], sistema de ecuaciones [Ap. I-47], matriz de productos nildimensionados [Ap. I-62] y sistema completo de productos nildimensionados Π_1, Π_2, por ser $n = 6$, $m = 4$, $n - r = 2$:

---

* J. PALACIOS, *La dimensión de la temperatura.* Asoc. esp. progr. Cienc., XXI Congr. Málaga (1951), 3-25.

[Ap. I-78]

	λ	e	θ	l	v	q	
L	—1	—3	0	1	1	0	$-k_\lambda - 3k_e + k_l + k_v = 0$
T	—1	0	0	0	—1	—1	$-k_\lambda - k_v - k_q = 0$
Q	1	1	0	0	0	1	$k_\lambda + k_e + k_q = 0$
Θ	—1	—1	1	0	0	0	$-k_\lambda - k_e + k_\theta = 0$
Π_1	—1	0	—1	—1	0	1	$\Pi_1 = q/(\lambda\theta l)$
Π_2	—1	1	0	1	1	0	$\Pi_2 = elv/\lambda$

Obtenemos así la solución de LORD RAYLEIGH

[Ap. I-79] $$q = \lambda\theta l \cdot \Phi(elv/\lambda) \quad ,$$

con Φ función desconocida.

Pero RIABOUCHINSKY observa que suponiendo influya también en este caso considerar que el calor y la temperatura están relacionados mediante la energía, obtendríamos una solución menos determinada mediante el esquema

[Ap. I-80]

	λ	e	θ	l	v	q	
L	—1	—3	2	1	1	2	$-k_\lambda - 3k_e + 2k_\theta + k_l + k_v + 2k_q = 0$
T	—1	0	—2	0	—1	—3	$-k_\lambda - 2k_\theta - k_v - 3k_q = 0$
M	0	0	1	0	0	1	$k_\theta + k_q = 0$
Π_1	—1	1/3	—1	0	0	1	$\Pi_1 = qe^{1/3}/(\lambda\theta)$
Π_2	—1	2/3	0	0	1	0	$\Pi_2 = e^{2/3}v/\lambda$
Π_3	0	1/3	0	1	0	0	$\Pi_3 = e^{1/3}l$

Un sistema completo de productos nildimensionados independientes equivalente al hallado es

[Ap. I-81] $$\Pi_1\Pi_3^{-1} = q/(\lambda\theta l), \quad \Pi_2\Pi_3 = elv/\lambda, \quad \Pi_3^3 = el^3,$$

pues el determinante de los exponentes de las Π es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Así, se llega a la solución de RIABOUCHINSKY:

[Ap. I-82] $$q = \lambda\theta l \cdot \Phi_1(elv/\lambda, el^3),$$

donde si se supone que la función desconocida Φ_1 no depende efectivamente de la variable dimensionada el^3 se recae en la solución de RAYLEIGH [Ap. I-79]

Para llegar a [Ap. I-82] podríamos conservar como fundamentales L, T, Q, pero considerando en [Ap. I-78] que era $[\theta] = [Q]$.

Sin embargo, PALACIOS contradice a RIABOUCHINSKY alegando que en este fenómeno la temperatura no interviene como energía cinética, sino

como magnitud de dimensión $[\theta] = [L^2T^{-2}]$, con lo que en lugar de [Ap. I-80] debemos considerar:

[Ap. I-83]

	λ	e	θ	l	v	q	
L	−1	−3	2	1	1	2	$-k_\lambda - 3k_e + 2k_\theta + k_l + k_v + 2k_q = 0$
M	−1	0	−2	0	−1	−3	$-k_\lambda \quad - 2k_\theta \quad - k_v - 3k_q = 0$
T	1	1	0	0	0	1	$k_\lambda + k_e \quad + k_q = 0$
Π_1	−2	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\Pi_1 = qe/(\lambda^2\theta^{\frac{1}{2}})$,
Π_2	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\Pi_2 = v/\theta^{\frac{1}{2}}$
Π_3	−1	1	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\Pi_3 = e\theta^{\frac{1}{2}}l/\lambda$

A los mismos productos nildimensionados [Ap. I-83] se llega si en lugar del sistema de magnitudes fundamentales *LTM* se toma el sistema equivalente *LTQ* con $[Q] = [L^2T^{-2}M]$, es decir, $[M] = [L^{-2}T^2Q]$.

Un sistema completo de productos nildimensionados independientes equivalente al hallado es

[Ap. I-84] $\Pi_1\,\Pi_3^{-1} = q/(\lambda\theta l)$, $\Pi_2^2 = v^2/\theta$, $\Pi_2\,\Pi_3 = elv/\lambda$,

pues el determinante de los exponentes de las Π es $= 2 \neq 0$. Así, se llega a la solución de PALACIOS

[Ap. I-85] $$q = \lambda\theta l \,.\, \Phi_2(v^2/\theta, elv/\lambda),$$

donde si se supone que la función desconocida Φ_2 no depende efectivamente de la variable nildimensionada v^2/θ, se recae en la solución de RAYLEIGH [Ap. I-79].

Para la aplicación del teorema Π es equivalente dar a θ la dimensión $[\theta] = [L^2T^{-2}]$ deducida de la ecuación de los gases perfectos

$$pV = (m/\mathrm{M})R\theta,$$

(donde p es presión, V volumen, m masa del gas, **M** su peso molecular nildimensionado, R la constante de los gases perfectos) con R nildimensionado, que considerar a θ fundamental (de medida independiente) y hacer intervenir en el fenómeno estudiado la constante R con dimensión

$$[R] = [L^2T^{-2}\theta^{-1}].$$

Así, en lugar de [Ap. I-83], basta ampliar [Ap. I-78] con el argumento dimensionado R, obteniéndose:

[Ap. I-86]

	λ	e	θ	l	v	R	q	
L	−1	−3	0	1	1	2	0	$-k_\lambda - 3k_e \quad + k_l + k_v + 2k_R \quad = 0$
T	−1	0	0	0	−1	−2	−1	$-k_\lambda \quad - k_v - 2k_R - k_q = 0$
Q	1	1	0	0	0	0	1	$k_\lambda + k_e \quad k_q = 0$
θ	−1	−1	1	0	0	−1	0	$-k_\lambda - k_e + k_\theta \quad - k_R \quad = 0$
Π_1	−1	0	−1	−1	0	0	1	$\Pi_1 = q/(\lambda\theta l)$
Π_2	−2	2	1	2	0	1	0	$\Pi_2 = e^2\theta l^2R/\lambda^2$
Π_3	1	1	0	1	1	0	0	$\Pi_3 = elv/\lambda$

Puede adoptarse como sistema completo de productos nildimensionados independientes el

[Ap. I-87] $\Pi_1 = q/(\lambda\theta l)$, $\Pi_2^{-1}\Pi_3^2 = v^2/(\theta R)$, $\Pi_3 = elv/\lambda$,

que coincide con el [Ap. I-84] para $[\theta] = [L^2T^{-2}]$ por resultar entonces R nildimensionado y poder considerar ésta implícitamente incluída en la función incógnita Φ_2 de la ecuación [Ap. I-85] que liga los tres productos.

Podría parecer que, obtenido el resultado

[Ap. I-88] $q = \lambda\theta l \cdot \Phi_2(v^2/(\theta R),\ elv/\lambda)$,

se puede pasar directamente a la solución [Ap. I-79] de RAYLEIGH, suponiendo que Φ_2 no dependa de las variables nildimensionadas donde figure R.

Aunque éste explique [Ap. I-79] como caso particular de [Ap. I-88] cuando se supone que R no influye en el fenómeno estudiado, en general no se puede, por regla sistemática, suprimir en la función incógnita los productos nildimensionados donde figure R como aconseja PALACIOS, porque se pueden encontrar ternas de productos nildimensionados independientes a partir de [Ap. I-86] donde R figure no ya en un producto, sino en dos o en los tres.

Por ejemplo, son sistemas completos de productos nildimensionados independientes equivalentes al [Ap. I-86], bien el

[Ap. I-89] $\begin{cases} \Pi_1\,\Pi_2^{-1}\,\Pi_3^2 = qv^2/(\lambda\theta^2 lR), \quad \Pi_2^{-1}\Pi_3^2 = v^2/(\theta R), \\ \Pi_3 = elv/\lambda, \end{cases}$

bien el

[Ap. I-90] $\begin{cases} \Pi_1\,\Pi_2^{-1}\,\Pi_3^2 = qv^2/(\lambda\theta^2 lR), \quad \Pi_2^{-1}\Pi_3^2 = v^2/(\theta R), \\ \Pi_2^{-1}\Pi_3^3 = elv^3/(\lambda\theta R), \end{cases}$

pues los respectivos determinantes de los exponentes de los Π son:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

En el caso [Ap. I-89], si suprimimos los productos nildimensionados donde figure R, tendríamos como solución del problema de BOUSSINESQ la errónea $elv/\lambda = C^{te}$; y en el caso [Ap. I-90], no tendríamos solución.

Las soluciones [Ap. I-82] de RIABOUCHINSKY y [Ap. I-88] de PALACIOS corresponden a hacer menos determinada la [Ap. I-79] de LORD RAYLEIGH en dos sentidos distintos. Pueden englobarse todas ellas mediante una mayor indeterminación, si en [Ap. I-80] suponemos, además de la intervención de R, que ésta, al tomar $[\theta] = [Q] = [L^2T^{-2}M]$, tendrá la dimensión $[R] = [M^{-1}]$:

[Ap. I-91]

	λ	e	θ	l	v	R	q	
L	−1	−3	2	1	1	0	2	$-k_\lambda - 3k_e + 2k_\theta + k_l + k_v + 2k_q = 0$
T	−1	0	−2	0	−1	0	−3	$-k_\lambda - 2k_\theta - k_v - 3k_q = 0$
M	0	0	1	0	0	−1	1	$k_\theta - k_R + k_q = 0$
Π_1	−1	1/3	−1	0	0	0	1	$\Pi_1 = qe^{1/3}/(\lambda\theta)$
Π_2	−2	4/3	1	0	0	1	0	$\Pi_2 = e^{4/3}\theta R/\lambda^2$
Π_3	−1	2/3	0	0	1	0	0	$\Pi_3 = e^{2/3}v/\lambda$
Π_4	0	1/3	0	1	0	0	0	$\Pi_4 = c^{1/3}l$

Un sistema completo de productos nildimensionados independientes equivalente al hallado es

$$[\text{Ap. I-92}] \quad \begin{cases} \Pi_1 \Pi_4^{-1} = q/(\lambda\theta l), & \Pi_2^{-1}\Pi_3^2 = v^2/(\theta R), \\ \Pi_3 \Pi_4 = elv/\lambda, & \Pi_4^3 = el^3, \end{cases}$$

pues el determinante de los exponentes de los Π es $= -3 \neq 0$. Así resulta

$$[\text{Ap. I-93}] \quad q = \lambda\theta l \,.\, \Phi_3(v^2/(\theta R),\ elv/\lambda,\ el^3),$$

donde si la función incógnita Φ_3 no depende de la variable nildimensionada $v^2/(\theta R)$ se obtiene la solución [Ap. I-82] de RIABOUCHINSKY, si Φ_3 no depende de el^3 se obtiene la solución [Ap. I-88] de PALACIOS, y si no depende ni de una ni de otra de esas dos variables nidilmensionadas, se obtiene la solución [Ap. I-79] de LORD RAYLEIGH.

En lenguaje geométrico vectorial podemos decir que la solución [Ap. I-79] de LORD RAYLEIGH corresponde a un cierto "plano vectorial" en el espacio de los "vectores productos nildimensionados", el que está contenido en el espacio vectorial de tres dimensiones correspondiente a la solución [Ap. I-82] de RIABOUCHINSKY, y también el "plano" de RAYLEIGH está contenido en *otro* espacio vectorial de tres dimensiones correspondiente a la solución [Ap. I-88] de PALACIOS, espacio distinto al de RIABOUCHINSKY, aunque ambos estén contenidos en el espacio vectorial de cuatro dimensiones correspondientes a la solución más general [Ap. I-93].

Obsérvese que haber supuesto en [Ap. I-91] que fuese la dimensión $[\theta] = [L^2T^{-2}M]$, *no contradice dimensionalmente* la solución de PALACIOS en la forma [Ap. I-86], sino que sólo la particulariza dejando más indeterminado el problema. En efecto, tomar en [Ap. I-86] a θ como magnitud fundamental de cambio de unidad de medida *independiente*, quiere decir que al aplicar a las demás magnitudes fundamentales LTM (o al sistema equivalente LTQ) transformaciones homotéticas independientes [Ap. I-30], se puede transformar también la medida de θ en forma *arbitraria* y por tanto, como caso *particular*, se la puede transformar según la ley $[L^aM^bT^c]$ con a, b, c arbitrarios, con tal que R de dimensión $[R] = [L^2T^{-2}\theta^{-1}]$ se transforme según la ley $[L^{2-a}M^{-b}T^{-2-c}]$, y en forma análoga las demás variables dimensionadas de [Ap. I-86] que dependan de θ. A cada sistema (a, b, c) corresponderá un hiperespacio vectorial que contiene el mismo espacio vectorial primitivo correspondiente a [Ap. I-88] con θ de cambio de medida independiente. Si en lugar de $a = 2$, $b = 1$, $c = -2$, como se ha hecho en [Ap. I-91], se toma otra terna *arbitraria*, obtendremos otro espacio vectorial de cuatro dimensiones que contiene también el espacio tridimensional correspondiente a [Ap. I-86]. Desde el exclusivo punto de vista del análisis dimensional del problema actual, particularizar en una u otra forma la dimensión de la temperatura θ en [Ap. I-86], no lleva a contradición lógica, sino a obtener menos información en la solución del problema.

Aun queda en este problema de BOUSSINESQ por justificar *físicamente* el haber despreciado la densidad, la viscosidad, la comprensibilidad y otras características del líquido o del cuerpo sumergido en él, que harían la solución dimensional del problema más indeterminada.

Si por el contrario, aun suponiendo que nos referimos siempre al *mismo* cuerpo, creyésemos no habría que tomar en cuenta su longitud l, y suprimiésemos de la matriz [Ap. I-78] esta variable dimensionada, dando

[Ap. I-94]

	λ	e	θ	v	q	
L	—1	—3	0	1	0	$-k_\lambda - 3k_e + k_v = 0$
T	—1	0	0	—1	—1	$-k_\lambda - k_v - k_q = 0$
Q	1	1	0	0	1	$k_\lambda + k_e + k_q = 0$
θ	—1	—1	1	0	0	$-k_\lambda - k_e + k_\theta = 0$
Π	—2	1	—1	1	1	$\Pi = qev/(\lambda^2\theta)$,

obtendríamos la solución más determinada

[Ap. I-95] $qev/(\lambda^2\theta) = C^{te}$ arbitraria.

Obsérvese que si en [Ap. I-78] se sustituye Π_1 por $\Pi_1\ \Pi_2 = qev/(\lambda^2\theta)$, la solución [Ap. I-79] de LORD RAYLEIGH ("plano vectorial") puede ponerse en la forma

[Ap. I-96] $qev/(\lambda^2\theta) = \Phi_4(elv/\lambda)$,

de la que es caso particular [Ap. I-95] ("recta vectorial") para $\Phi_4 = C^{te}$ arbitraria en [Ap. I-96]

Sin embargo, [Ap. I-95] es *distinta* de [Ap. I-96], aun suponiendo en ésta que l es constante por referirse a un *mismo* cuerpo, proporcionando cada una de ellas conclusiones físicas *diferentes*.

En definitiva, si en un problema dimensional se incluyen variables dimensionadas que no influyen realmente en la cuestión, no se cae en error, sino que la solución dimensional queda innecesariamente menos determinada. El peligro de error está en omitir argumentos (medidas variables y constantes dimensionadas) que tengan significación en el fenómeno estudiado, pero si somos exageradamente prudentes (por ejemplo, aplicamos el teorema 6), entonces el teorema Π da información nula, pues queda una función indeterminada con el *mismo número* de variables iniciales.

EJEMPLO 11. *Presión producida por un gas perfecto.* — La teoría cinética de los gases postula que la presión ejercida por un gas sobre las paredes del recipiente es debida al choque de las moléculas sobre ellas y por tanto la presión p dependerá de la masa μ de cada molécula, de la media cuadrática ν de su velocidad y del número n de moléculas por unidad de volumen. El esquema dimensional de aplicación del teorema Π será aquí:

[Ap. I-97]

	μ	n	ν	p	
L	0	—3	1	—1	$-3k_n + k_\nu - k_p = 0$
T	0	0	—1	—2	$-k_\nu - 2k_p = 0$
M	1	0	0	1	$k_\mu + k_p = 0$
Π	—1	—1	—2	1	$\Pi = p/(\mu n\nu^2)$

Igualando Π a una constante ignota $1/(2a)$ resulta

[Ap. I-98] $p = (n/a) \cdot \frac{1}{2}\mu\nu^2.$

La teoría exacta enseña que a es constante *cuando no varía el gas*, pues vale $a = 3/2$ para los monoatómicos, $a = 5/2$ para los diatómicos y

$a = 3$ para los poliatómicos. Es decir, *la constante incógnita que proporciona el teorema* Π *ni es la misma para todos los gases, ni varía con cada gas, sino sólo con familias de ellos.*

Si m es la masa del gas que ocupa el volumen V, su densidad ϱ será

[Ap. I-99] $$\varrho = m/V = n\mu.$$

Por otra parte es

[Ap. I-100] $$\mathrm{M} = N\mu,$$

donde M es el peso molecular nildimensionado del gas (razón de la masa μ de la molécula del gas a la masa μ_0 de la 32-ava parte de la molécula O_2 de oxígeno) y N es el número de AVOGADRO de dimensión $[N] = [M^{-1}]$, que representa el número constante $N = 6{,}06 \, . \, 10^{23}$ de moléculas que hay en un mol de cualquier gas perfecto, siendo el mol (molécula-gramo) la masa que tiene tantos gramos de substancia como expresa su peso molecular M. En el sistema MKS se usará el k-mol $= 10^3$ mol (kilomol = kilogramo-molécula).

Aplicando [Ap. I-99] y [Ap. I-100] a [Ap. I-98] queda

[Ap. I-101] $$pV = (m/\mathrm{M})\,(N/a) \, . \, \tfrac{1}{2}\mu v^2 = (m/\mathrm{M}) \, . \, R\theta,$$

supuesta la temperatura absoluta θ proporcional a la energía cinética media molecular; entonces resulta que R es una constante universal de los gases perfectos que en los respectivos sistemas MKS y CGS vale:

$$R = 8313{,}6 \text{ J/(k-mol °K)} = 8{,}3136 \, . \, 10^7 \text{ erg/(mol °K)},$$

donde un joule es $J = 10^7$ erg y °K representa el grado KELVIN.

Si en [Ap. I-101] se expresa p en atmósfera normal ($1 \text{ at}_N = 1{,}013\,25 \, . \, 10^6 \text{ dyn/cm}^2$), V en litros (l), m/M en mol y θ en °K, resulta ($8{,}3136 \, . \, 273/101{,}325 = 22{,}4$): $R = 22{,}4/273$ l at_N/(mol °K), de donde un mol de cualquier gas perfecto ocupa a 273°K = 0°C y una at_N de presión el volumen de 22,4 l.

Recíprocamente, si se ha introducido el concepto de temperatura absoluta θ como factor integrante que define la entropía como diferencial exacta para traducir matemáticamente la propiedad transitiva y el equilibrio térmico de las diversas partes homogéneas de un sistema adiabáticamente aislado del exterior a partir del segundo principio termodinámico en la forma de CARATHEODORY ("en cualquier entorno de todo estado de un sistema aislado adiabáticamente, existen siempre estados próximos no alcanzables desde él") y el equilibrio térmico se logra en los gases perfectos mediante $p_1V_1 = p_2V_2$ tomada como temperatura empírica en parámetro de estado, se llega así a establecer naturalmente la ecuación de los gases perfectos

[Ap. I-102] $$pV = (m/\mathrm{M})R\theta.$$

Entonces, si se tiene en cuenta [Ap. I-99], [Ap. I-100] y [Ap. I-102] en [Ap. I-98], resulta

[Ap. I-103] $$\tfrac{1}{2}\mu v^2 = ap/n = a(m/\mathrm{M})\,(R/V)\theta \, . \, (\mathrm{M}/N)\,(V/m) = a(R/N)\theta = ak\theta,$$

donde figura la constante universal de BOLTZMANN

[Ap. I-104] $$k = R/N = 1{,}372 \, . \, 10^{-23} \text{ J/(°K)},$$

de dimensión $[k] = [L^2T^{-2}M\theta^{-1}]$.

Así pues, por [Ap. I-103] la energía cinética media de una molécula es proporcional a la temperatura absoluta. Si entonces tomamos la constante de BOLTZMANN como nildimensionada, querrá decir que asimilamos la t e m p e r a t u r a absoluta a una energía cinética de dimensión $[\theta] = [L^2T^{-2}M]$.

Si directamente hubiéramos supuesto que la temperatura θ representa

una energía cinética, podíamos tomarla sustituyendo a ν en el análisis dimensional del problema y en lugar de [Ap. I-97], hubiéramos considerado:

[Ap. I-105]

	μ	n	θ	p	
L	0	—3	2	—1	$-3k_n + 2k_\theta - k_p = 0$
T	0	0	—2	—2	$-2k_\theta - 2k_p = 0$
M	1	0	1	1	$k_\mu + k_\theta + k_p = 0$
Π	0	—1	—1	1	$\Pi = p/(n\theta)$

Igualando Π a una constante incógnita C, resulta

[Ap. I-106] $$p = Cn\theta.$$

Si en [Ap. I-106] se tiene en cuenta [Ap. I-102], [Ap. I-99] y [Ap. I-100] resulta ser $C = R/N = k$, es decir, ahora *la constante incógnita que proporciona el teorema* Π, *no varía con el gas, sino que es la misma para todos ellos.*

Si en lugar de la temperatura cinética, quisiéramos hacer intervenir en el problema como magnitud fundamental la temperatura absoluta que conduce a la ecuación [Ap. I-102] de los gases perfectos, deberíamos hacer intervenir la constante R de los gases perfectos, y entonces nuestro esquema dimensional, en lugar del [Ap. I-105], sería el siguiente:

[Ap. I-107]

	μ	n	R	θ	p	
L	0	—3	2	0	—1	$-3k_n + 2k_R - k_p = 0$
T	0	0	—2	0	—2	$-2k_R - 2k_p = 0$
M	1	0	0	0	1	$k_\mu + k_p = 0$
θ	0	0	—1	1	0	$-k_R + k_\theta = 0$
Π	—1	—1	—1	—1	1	$\Pi = p/(\mu n R\theta)$

Igualando Π a una constante incógnita b, resulta

[Ap. I-108] $$p = b\mu nR\theta = b(m/V)R\theta,$$

si se tiene en cuenta [Ap. I-99]. Por tanto, según [Ap. I-102] es $b = 1/M$, donde M es el peso molecular del gas que *en particular se considere.* Ahora *la constante incógnita que proporciona el teorema* Π *varía para cada gas.*

De ahí que en la teoría de los modelos que se aplica en la Mecánica de flúidos cabe siempre la sospecha que al cambiar éstos en los ensayos pueda ocurrir algo análogo.

Así pues, a pesar de su valor heurístico, hemos de desconfiar siempre de las conclusiones puramente teóricas que se deban exclusivamente al análisis dimensional de un problema.

k) **Bibliografía.** — Hemos basado este Apéndice I sobre homogeneidad dimensional en la memoria:

P. PI CALLEJA: *Las ecuaciones funcionales de la teoría de magnitudes* (2º Symposium de Matemáticas, Villavicencio, Mendoza; Ed. Coni, Bs. As., 1954).

Sobre fundamentos de la medida de magnitudes está la clásica y lúcida exposición de

C. RUNGE: *Maas und Messen* (Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, V, 1, págs. 3-24, Leipzig, 1903), con traducción francesa muy ampliada de E. GUILLAUME: *La mesure* (Encyclopédie des Sc. mathématiques; V, 1, págs. 1-64; Gauthier-Villars, París, 1916).

Sobre el mismo tema trata:

G. GIORGI: *Sistemi e unità di misura*, (Enciclopedia delle Matematiche elementari, III-1, págs. 1-37, Milán, 1947).

Un extenso repertorio alfabético de las unidades empleadas en las más diversas ramas de la actividad humana, desde las más antiguas hasta las actuales, aunque en éstas no se siguen desafortunadamente las recomendaciones que sobre simbolismo fueron aprobadas en Amsterdam (julio de 1948) por la Comisión de Símbolos, Unidades y Nomenclatura, es:

M. RODRÍGUEZ ARAGÓN: *Unidades. Diccionario técnico de pesas, medidas y monedas*, (Instituto Geográfico y Catastral, Madrid, 1949).

Entre los numerosos trabajos de los esposos DESTOUCHES-FÉVRIER sobre formalización lógica de las operaciones inherentes a todo procedimiento de medición, citamos el libro que contiene abundante bibliografía:

P. DESTOUCHES-FÉVRIER: *La structure des théories physiques*, (Presses Universitaires de France, París, 1951).

El significado de las escalas de medición (enumerativas, ordinales, con igualdad de diferencias, lineales con cero) se discute en:

NORMAN CAMPBELL: *Measurement and calculation*, (Londres, 1928).

Una obra fundamental que ha marcado escuela en la aplicación del análisis dimensional es:

P. W. BRIDGMAN: *Dimensional analysis*, (Univ. Yale, 1937); con traducción castellana: *Análisis dimensional* (Univ. Tucumán, 1939).

En este orden de ideas es muy notable el capítulo dedicado a la teoría de la semejanza, conteniendo una luminosa crítica de los fundamentos del análisis dimensional y un nuevo método llamado "análisis inspeccional" consistente en el estudio de los invariantes relativos a las transformaciones de un grupo respecto de las ecuaciones que gobiernan un fenómeno determinado, del libro de

G. BIRKHOFF: *Hydrodynamics. A study in logic, fact and similitude*, (Univ. Princeton, 1950; reimpr., Dover, Nueva York, 1955).

Una clara exposición para la aplicación del tema a la ingeniería es:

H. L. LANGHAAR: *Dimensional analysis and theory of models*, (Wiley, Nueva York, 1951).

Sin entrar en discusiones sobre los fundamentos, están las breves exposiciones de

A. W. PORTER: *The method of dimensions* (Methuen,Londres; 3ª ed., 1946).

A. MARTINOT-LAGARDE: *Analyse dimensionnelle. Applications à la mécanique des fluides* (Lille, 1946).

Una original teoría basada sobre las componentes contravariantes u ortogonales del tensor que geométricamente representa un ente físico para así determinar sus dimensiones, contiene la obra de J. A. SCHOUTEN (citada en Cap. XVII, nota V, 5).

Una discusión crítica y filosófica contiene:

J. WALLOT: *Grössengleichungen, Einheiten und Dimensionen*, (J. A. Barth, Leipzig, 1953).

La teoría clásica de las magnitudes absolutas continuas está contenida en:

H. GRASSMANN: *Lehrbuch der Arithmetik*, (Berlín, 1861);

O. STOLZ: *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, (Lepzig, 1885); divulgada en la obra de ENRIQUES (citada en Cap. I, nota IV, 13), vol. I, 1: *Numeri e grandezze*, y con fundamentación axiomática ingeniosamente simplificada en el tratado de BOURBAKI (citado en Cap. I, nota IV, 9), 1ª parte, lib. III, Cap. V, § 2: *Mesure des grandeurs*.

Precedida de una exposición de teorías algebraicas modernas a aplicar a la fundamentación del concepto de magnitud, con interesantes resultados matemáticos originales, un detallado estudio de las ecuaciones funcionales clásicas de la teoría y de las funciones homogéneas generalizadas, es la extensa memoria:

R. SAN JUAN: *Teoría de las magnitudes físicas y sus fundamentos algebraicos*, (Rev. Acad. Madrid, *39* (1945) p. 11-40, 137-184, 423-461; *40* (1946) p. 161-194, 299-336, 495-552; también edit. por: Bermejo, Madrid, 1946).

Después de la clásica memoria sobre la ecuación funcional de CAUCHY debida a

G. HAMEL: *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung* $f(x+d)=f(x)+f(d)$, (Math. Annalen, *60* (1905) p. 459-462),

el estudio más profundo de la misma es el de

A. OSTROWSKI: *Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen*, (Jahresber. Deutsch. Math. Verein., *38* (1929) p. 54-62).

Con principios filosóficos muy discutibles, pero con un claro tratamiento de los productos nildimensionados o variables de VASCHY, está la obra de

R. ESNAULT-PELTERIE: *L'analyse dimensionnelle*; complementada en *Analyse dimensionnelle et Metrologie* (Rouge, Lausana, 1948-1950, con traducciones inglesas del mismo editor).

Una exposición que desarrolla con mucha claridad la teoría vectorial de las magnitudes físicas es:

W. S. HILL: *Teoría general de las magnitudes físicas*, (Univ. Litoral, Publ. nº 21; Rosario, 1941).

Los textos de Mecánica o Física-matemática suelen dedicar unas páginas al análisis dimensional. Clara exposición (sin demostraciones pero con ejemplos) de la mejor manera de aplicar el teorema Π y de su interpretación en la teoría de los modelos, contiene el volumen primero de la obra de

R. E. DOHERTY y E. G. KELLER: *Mathematics of modern engineering*, (2 vols., Wiley, Nueva York, 1936, 1942).

Dedican también especial atención al tema:

M. PLANCK: *Introduction to theoretical physics*. I. *General mechanics*, art. 28, (Macmillan, Londres, 1932);

J. PALACIOS: *Mecánica física*, (Madrid, 1943);

de quien recientemente se ha publicado la notable obra, ya traducida a otros idiomas:

J. PALACIOS: *Análisis dimensional* (Espasa-Calpe, Madrid, 1956).

APÉNDICE II

ECUACIONES INTEGRALES

1. Definiciones y clasificación. — Como problema correlativo del sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas de coeficientes k_{rs}, hemos obtenido (Cap. XXVII, nota III, a) la ecuación integral lineal de coeficiente o *núcleo* $\mathrm{k}(r,s)$ llamada *de primera especie*:

[Ap. II-1] $$\int \mathrm{k}(r,s)\mathrm{x}(s)\,ds = \mathrm{h}(r) \quad ,$$

sobre la cual no hay todavía una teoría general, pero sí estudios muy importantes sobre tipos especiales (transformaciones de LAPLACE, FOURIER, HILBERT, problemas de momentos, etc.).

Está, en cambio, muy eleborada por FREDHOLM, VOLTERRA y HILBERT la teoría de las ecuaciones integrales lineales *de segunda especie*, correlativas de los sistemas lineales de ecuaciones con un parámetro, también vistos anteriormente en álgebra tensorial (§ 63-5), su aplicación a geometría analítica (§ 63-8), en mecánica matricial, en ecuaciones diferenciales del tipo de STURM-LIOUVILLE (Cap. XXVII, nota III, d; Cap. XXVIII, nota VI), etc. Estas ecuaciones integrales son del tipo:

[Ap. II-2] $$\mathrm{x}(r) - \lambda\int \mathrm{k}(r,s)\mathrm{x}(s)\,ds \begin{cases} = \mathrm{h}(r) & \text{no homogénea si } \mathrm{h}(r) \neq 0 \\ = 0 & \text{homogénea.} \end{cases}$$

Si el intervalo de integración es fijo $a \leqslant s \leqslant b$, la ecuación se llama de "tipo FREDHOLM"; el *núcleo* $\mathrm{k}(r,s)$ puede ser cualquier función integrable en un rectángulo $a \leqslant s \leqslant b$, $c \leqslant r \leqslant d$, que podemos suponer, por sencillo cambio en las variables r, s, reducido al cuadrado $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant r \leqslant 1$. A veces (por ejemplo en el teorema de FREDHOLM), exigiremos que $\mathrm{k}(r,s)$ sea *continua*; en otras ocasiones bastarán condiciones menos restrictivas.

La ecuación se llama del "tipo VOLTERRA" cuando el intervalo de integración es $(0,r)$, siendo la integral función de r, por la doble razón de figurar como extremo y como parámetro del integrando. Es claro que el extremo superior puede ser una función $\varrho = \varrho(r)$, pero, adoptada ϱ como variable, se reduce al tipo antes definido de intervalo $(0,\varrho)$. El núcleo debe estar definido en el triángulo $r \geqslant s$, tal que pueda ser aproximado en él por polinomios.

Estudiaremos primeramente las ecuaciones de FREDHOLM, que comprenden a las de VOLTERRA como caso particular, cuando el núcleo se anula en el triángulo $s > r$; luego trataremos las ecuaciones de *núcleo simétrico* $\mathrm{k}(r,s) = \mathrm{k}(s,r)$, más ricas en propiedades. Como a pesar de su asimetría, las de VOLTERRA son de más fácil resolución, por eso las tratamos antes; a ellas conducen los problemas de tipo CAUCHY en las ecuaciones diferenciales. De las ecuaciones integrales llamadas *singulares* (núcleo no acotado), algo diremos al final (Ap. II-5, f).

2. Ecuaciones integrales lineales de segunda especie. — a) *Ecuaciones integrales de núcleo disociado.* — Éstas tienen especial interés, como puente de enlace con los sistemas de ecuaciones algebraicas, y por servir de aproximación al caso general.

1º Si el núcleo tiene *separadas* sus variables, es decir

[Ap. II-3] $$k(r,s) = \alpha(r)\beta(s) \quad ,$$

la ecuación integral [Ap. II-2] se reduce a ésta:

[Ap. II-4] $$x(r) - \lambda X\alpha(r) = h(r) \quad , \text{ [llamando } \int\beta(s)x(s)\,ds = X].$$

Multiplicando por $\beta(r)$ e integrando en (0; 1), la ecuación integral se transforma en:

[Ap. II-5] $$X - \lambda k_{11}X = h_1 \quad , (k_{11} = \int\alpha(r)\beta(r)\,dr;\ h_1 = \int h(r)\beta(r)\,dr);$$

despejando el valor de X, si es $\lambda k_{11} \neq 1$, la ecuación [Ap. II-4] determina $x(r)$ como única solución posible; y ésta lo es en efecto, como se ve, sustituyendo en [Ap. II-4] el valor de X despejado de [Ap. II-5], obteniéndose una $x(r)$ que verifica [Ap. II-2] para el núcleo [Ap. II-3].

Supongamos ahora la ecuación homogénea, es decir, $h(r) = 0$; entonces, la ecuación [Ap. II-5] es $X(1 - \lambda k_{11}) = 0$; luego, la condición necesaria y suficiente para que haya solución no nula, es $\lambda = 1/k_{11}$ (autovalor), y la autofunción correspondiente es $\alpha(r)$ por cualquier constante.

Pero, si α y β son ortogonales, es decir, $k_{11} = 0$, resulta $X = 0$, y no hay solución, ni autovalores.

2º Pasemos al tipo más general de núcleo *disociado* (también llamado *degenerado*), definiendo como tal al de la forma:

[Ap. II-6] $$k(r,s) = \alpha_1(r)\beta_1(s) + \ldots + \alpha_n(r)\beta_n(s) \quad .$$

La ecuación integral [Ap. II-2] se puede entonces escribir así:

[Ap. II-7] $$x(r) - \lambda\Sigma_j X_j\,\alpha_j(r) = h(r) \quad , \quad (X_j = \int\beta_j(s)x(s)\,ds) \quad ,$$

y multiplicando, como antes, por $\beta_i(r)$ e integrando en (0; 1):

[Ap. II-8] $$X_i - \lambda\Sigma_j k_{ij} X_j = h_i \quad , \quad \begin{cases} k_{ij} = \int\alpha_j(r)\beta_i(r)\,dr & , \\ h_i = \int h(r)\beta_i(r)\,dr & . \end{cases}$$

He aquí para $j = 1, 2 \ldots, n$ un sistema de ecuaciones lineales con las n incógnitas $X_1, X_2, \ldots, X_n$, que deben satisfacerse por las n componentes [Ap. II-7] de toda solución $x(s)$ respecto de las β_j. Recíprocamente, si este sistema [Ap. II-8] tiene solución para un λ que no anule el determinante del sistema (§ 15-4), la función:

[Ap. II-9] $$x(r) = h(r) + \lambda\Sigma_i X_i\alpha_i(r)$$

satisface a la ecuación integral, como se comprueba inmediatamente, sustituyendo en ella.

En el caso homogéneo, donde $h(r) = 0$, el sistema homogéneo [Ap. II-8] tiene solución solamente si λ es *autovalor*, es decir, si anula al determinante del sistema (§ 15-6, *b*), y cabe que no haya tales autovalores si la matriz $\{k_{ij}\}$ no es simétrica.

EJEMPLOS: 1. $k(r,s) = \operatorname{sen}(r+s) = \operatorname{sen} r\cos s + \cos r\operatorname{sen} s$.
En el intervalo $(0, 2\pi)$ las constantes antes definidas son:

$$k_{11} = \int\operatorname{sen} r \,.\, \cos r\,dr = 0 \quad , \quad k_{12} = \int\cos r \,.\, \cos r\,dr = \pi \quad ,$$
$$k_{21} = \int\operatorname{sen} r \,.\, \operatorname{sen} r\,dr = \pi \quad , \quad k_{22} = \int\cos r \,.\, \operatorname{sen} r\,dr = 0 \quad .$$

y el sistema [Ap. II-8] para el caso homogéneo, es:

$$\begin{cases} X_1 - \lambda\pi X_2 = 0 \,, \\ -\lambda\pi X_1 + X_2 = 0 \,, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & -\lambda\pi \\ -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \lambda = \pm 1/\pi \quad .$$

Las correspondientes soluciones son $X_2 = \pm X_1$, y las soluciones de la ecuación integral homogénea

$$x(r) = \lambda\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(r+s)\,x(s)\,ds$$

son (salvo un factor constante):

$$x(r) = \operatorname{sen} r \pm \cos r \quad .$$

La misma ecuación en $(0, \frac{1}{2}\pi)$ tiene como autovalores $\lambda = 4/(2 \pm \pi)$ y como autofunciones sen $r \pm \cos r$.

2. Integremos en $(0;1)$ la ecuación:

$$x(r) - \lambda\int(2rs - s^2)x(s)ds = 1/r \quad .$$

Poniendo $\alpha_1(r) = 2r$, $\beta_1(s) = s$, $\alpha_2(r) = 1$, $\beta_2(s) = -s^2$, la ecuación da el sistema:

$$\begin{cases} (6 - 4\lambda)X_1 - 3\lambda X_2 = 6 \quad , \\ 3\lambda X_1 + (6 + 2\lambda)X_2 = -3 \quad , \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{36 + 3\lambda}{36 - 12\lambda + \lambda^2} \quad , \\ X_2 = \dfrac{-18 - 6\lambda}{36 - 12\lambda + \lambda^2} \quad , \end{cases}$$

y la solución de la ecuación, para cada λ que no sea autovalor, es:

$$x(r) = (1/r) + 2r\lambda X_1 + \lambda X_2 \quad .$$

Como el trinomio denominador es cuadrado perfecto, el único autovalor es la raíz doble $\lambda = 6$; el sistema homogéneo se reduce a $X_1 + X_2 = 0$, y las soluciones de la ecuación homogénea son $x(r) = c(2r - 1)$. La no homogénea para $\lambda = 6$ es imposible, pues entonces los primeros miembros son opuestos y no los segundos.

3. Integremos en $(0;1)$ la ecuación

$$x(r) - \lambda\int k(r,s)x(s)ds = h(r) \quad , \quad k(r,s) = 60r^2 + 12rs + 6s^2 \quad .$$

Aplicando el método, se obtiene el sistema lineal:

$$\begin{aligned} (1 - 20\lambda)X_1 \quad &- 6\lambda X_2 - \quad 6\lambda X_3 = \int h(s)ds \quad , \\ -15\lambda X_1 + (1 - 4\lambda)X_2 &- \quad 3\lambda X_3 = \int s \,.\, h(s)ds \quad , \\ -12\lambda X_1 \quad &- 3\lambda X_2 + (1 - 2\lambda)X_3 = \int s^2 \,.\, h(s)ds \quad . \end{aligned}$$

Para $\lambda = -1$ la solución es:

$$x(r) = h(r) + (20r^2 - 6r - 5)\int h(s)ds -$$
$$-(6r - 3)\int s \,.\, h(s)ds - (40r^2 - 18r - 5)\int s^2 \,.\, h(s)ds \quad .$$

Los autovalores son los ceros de $2\lambda^3 - 43\lambda^2 - 26\lambda + 1 = 0$ (tres raíces reales).

4. Suponiendo ortogonales cada α_i con cada β_j de distinto índice, los autovalores son los recíprocos de los productos escalares $\alpha_i \,.\, \beta_i$ y las autofunciones son las $\alpha_i(r)$.

5. No tiene autovalores reales en $(0, 2\pi)$ el núcleo:

$$k(r,s) = \cos r \,.\, \text{sen}\, s + \cos 2r \,.\, \text{sen}\, 2s + \ldots + \cos nr \,.\, \text{sen}\, ns \quad .$$

b) *Teorema de la alternativa de* FREDHOLM. — b_1) La analogía entre un sistema de ecuaciones algebraicas lineales y una ecuación integral lineal no es completa, por no haberse logrado el paso al límite continuo de los determinantes de orden n para definir el determinante de un núcleo $k(r,s)$. Enunciando los resultados conocidos sobre ecuaciones lineales (§ 15-5), sin usar determinantes, como hemos hecho vectorialmente en Apéndice I, teoremas 12, 13 y 14, tenemos la puerta abierta para pasar a las ecuaciones integrales lineales de segunda especie.

Análogamente a lo realizado en Cap. XXVII, nota III, *b*, recordemos la esencia de la teoría expuesta en las citas anteriores, pero en forma adecuada para su trasplante a las ecuaciones integrales. Vimos allí que sólo caben dos casos en un sistema *cuadrado* $(m = n)$:

$$\Sigma k_{rs}x_s = h_r \quad , \quad \Sigma k_{rs}x_s = 0 \quad ,$$

o bien, con parámetro

$$x_r - \lambda\Sigma_s k_{rs}x_s = h_r \quad , \quad x_r - \lambda\Sigma_s k_{rs}x_s = 0 \quad .$$

1º En el caso *regular* (caracterizado en § 15-4 por ser el determinante del sistema $\Delta \neq 0$), el sistema homogéneo no tiene solución distinta de (0, 0, ..., 0), y se llama *imposible* o *incompatible* (§ 15-6); pero el no homogéneo es *determinado* (regla de CRAMER, § 15-4), cualesquiera que sean los segundos miembros. Recíprocamente, si éste es *determinado*, aquél es *imposible*. Prescindiendo de los determinantes tenemos, pues, una relación muy sencilla entre el sistema no homogéneo y su correspondiente homogéneo, como ya se ha visto en Cap. XXVII, nota III, *b*.

2º Para expresar sin determinantes la relación (menos simple) en el caso $\Delta = 0$, observaremos que mientras la existencia de soluciones del sistema homogéneo significa dependencia lineal de las *columnas* de la matriz, la análoga dependencia coexistente (§ 14-3. *a*) entre *filas* viene expresada por la existencia de soluciones del sistema "traspuesto" (§ 61-4, *a*) cuya matriz $\{k_{sr}\}$ se deduce de la $\{k_{rs}\}$, sustituyendo cada elemento por su simétrico respecto de la diagonal principal. Si el sistema homogéneo dado tiene q soluciones $X_1, X_2, \ldots, X_q$, es decir, si hay q incógnitas no principales que pueden tomar valores arbitrarios (característica $n - q$, § 15-5, *b* y Ap. I, teor. 12), también hay q filas no principales, combinaciones lineales de las $n - q$ principales (§ 14-3, *a*), luego el *sistema traspuesto* tiene q soluciones $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$.

Condición necesaria y suficiente para que el sistema no homogéneo admita soluciones, es que los términos h_i estén ligados por las mismas relaciones lineales que las filas de $\{k_{rs}\}$ (pues eso expresa la anulación de los determinantes orlados, § 15-5, *a* y § 14-2, *b*); es decir, para cada solución $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, debe ser $h_1y_1 + \ldots + h_ny_n = 0$, o brevemente, respecto de $H(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ debe ser $HY = 0$, y, en general, es necesario y suficiente que sea $HY_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$, (cfr. Ap. I, teor. 14).

La esencia del teorema de ROUCHÉ-FROBENIUS queda, pues, resumida así:

En los sistemas algebraicos lineales sólo caben *dos casos*, que se excluyen y se completan:

1º: *Caso regular.* — Si el sistema homogéneo es *imposible*, el no homogéneo con segundos miembros arbitrarios es *determinado*.

2º: *Caso singular.* — Si el sistema homogéneo tiene q soluciones $X_1, X_2, \ldots, X_q$, también el sistema traspuesto tiene q soluciones $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$; condición necesaria y suficiente de compatibilidad del sistema no homogéneo es que el vector H del segundo miembro sea ortogonal a cada Y_i; cumplida esta condición es q veces indeterminado, pues su solución queda determinada a menos de una solución del sistema homogéneo correspondiente (Ap. I, teor. 14).

b_2) Enunciado el resultado esencial de la teoría de ecuaciones algebraicas lineales sin usar determinantes, el nudo de la teoría de FREDHOLM es su *teorema alternativo*, perfectamente correlativo del teorema de ROUCHÉ-FROBENIUS.

Las ecuaciones de segunda especie, con y sin segundo miembro:

[Ap. II-10] $\mathrm{x}(r) - \lambda \int \mathrm{k}(r,s)\mathrm{x}(s)\,ds = \mathrm{h}(r)$, $\mathrm{x}(r) - \lambda \int \mathrm{k}(r,s)\mathrm{x}(s)\,ds = 0$,

pueden presentar estos dos únicos casos, que se completan y se excluyen:

1º: *Caso regular.* — Fijado el número λ, si la *ecuación homogénea* es *imposible* (sin solución no idénticamente nula) la *ecuación general es determinada* (es decir, *para cada función continua prefijada* $\mathrm{h}(r)$ *existe solución única* $\mathrm{x}(s)$.

2º: *Caso singular.* — *Si la ecuación homogénea tiene q soluciones linealmente independientes* $\mathrm{x}_1(s), \ldots, \mathrm{x}_q(s)$, *también la ecuación homogénea traspuesta de núcleo* $\mathrm{k}(s,r)$ *tiene q soluciones* $\mathrm{y}_1(s), \mathrm{y}_2(s), \ldots \mathrm{y}_q(s)$; *y las condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación general tenga solución son:*

[Ap. II-11] $\mathrm{h} \cdot \mathrm{y}_i = \int \mathrm{h}(s)\mathrm{y}_i(s)\,ds = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, q)$.

La solución de la ecuación no homogénea [primera de las Ap. II-10] *está sólo determinada a menos de una combinación lineal aditiva* $c_1x_1 + \ldots + c_qx_q$, *solución general de la homogénea* (segunda de las [Ap. II-10]); *toda solución de la ecuación no homogénea es linealmente independiente de las* x_i *que formen un sistema fundamental de la ecuación homogénea, quedando unívocamente determinada la solución* $x(s)$ *de la ecuación no homogénea, por las condiciones:*

$$[\text{Ap. II-12}] \quad x \,.\, x_i = \int x(s)x_i(s)\,ds = 0 \quad , \quad (i = 1, \ldots, q) \quad ,$$

por lo que sólo hay una solución $x(s)$ *ortogonal simultáneamente a todas las* x_i *antedichas.*

En efecto, si el núcleo es del tipo $k(r, s) = \sum \alpha_i(r)\beta_i(s)$ (núcleo *disociado*), ya hemos visto (a) cómo la ecuación integral no homogénea se reduce al sistema lineal [Ap. II-8], y la ecuación integral homogénea se reduce al sistema lineal homogéneo $X_i - \lambda\sum_j k_{ij} X_j = 0$, correspondiente del [Ap. II-8]. Siendo, pues, cuestiones equivalentes tener o no solución la ecuación integral y el sistema, y lo mismo en el caso homogéneo ($h(r) = 0$, $h_i = 0$), el teorema de ROUCHÉ-FROBENIUS (§ 15-5 y Ap. I, teor. 14) coincide con el de FREDHOLM. Que la condición [Ap. II-11] es correlativa de la $HY_i = 0$, ($i = 1, \ldots, q$) establecida en b_1, salta a la vista. Del mismo modo la solución de la ecuación no homogénea queda determinada a menos de una solución de la ecuación homogénea, porque aquí también la diferencia de dos soluciones cualesquiera de la ecuación no homogénea es solución de la ecuación homogénea, cuyos coeficientes c_i pueden determinarse unívocamente mediante las condiciones [Ap. II-12].

Queda, finalmente, el tránsito a un núcleo general $k(r, s)$, función *continua* en el *rectángulo básico*. Como se puede aproximar uniformemente por polinomios (§ 98-5, teor. 3), y para cada núcleo polinómico (y por tanto disociado), ha quedado demostrado el teorema, falta el paso al límite, cuestión delicada que exige diversos recursos de Análisis funcional, cuya exposición sistemática, inadecuada en este breve apéndice, está ampliamente desarrollada en el libro de COURANT-HILBERT (citado en Cap. XVI, nota IV, 4).

c) Resolución por aproximaciones sucesivas. — c_1) *Sistemas algebraicos lineales.* — Para la resolución efectiva de los sistemas lineales de muchas ecuaciones, como se presentan en el cálculo de estructuras altamente hiperestáticas, en las redes eléctricas, etc., se recomienda el método de aproximaciones sucesivas (Cap. XVII, nota IV, g). Recordémoslo en forma adecuada para su trasplante a las ecuaciones integrales. Dicho método es especialmente eficaz cuando el sistema es del tipo:

$$[\text{Ap. II-13}] \quad x_r - \lambda\sum_s k_{rs}x_s = h_r \quad , \quad \text{o sea:} \quad x_r = h_r + \lambda\sum_s k_{rs}x_s \quad ,$$

es decir, si los términos de la diagonal principal tienen coeficientes $1 - \lambda k_{rr}$ y tanto mejor cuanto menor sea λ, siendo entonces pequeños los elementos no principales $-\lambda k_{rs}$.

Una primera aproximación se obtiene prescindiendo de todos ellos, quedando reducido el sistema al $x^1_r = h_r$; sustituídos estos valores en los segundos miembros, resulta una segunda aproximación $x^2_r = h_r + \lambda\sum_s k_{rs}h_s$, y después una tercera, cuarta, etc.

EJEMPLO 6. Resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} 1{,}02x + 0{,}01y - 0{,}15z = 5 \\ -0{,}03x + 0{,}97y + 0{,}12z = -1 \\ 0{,}01x - 0{,}08y + 1{,}03z = 0{,}1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5 - 0{,}02x - 0{,}01y + 0{,}15z, \\ y = -1 + 0{,}03x + 0{,}03y - 0{,}12z, \\ z = 0{,}1 - 0{,}01x + 0{,}08y - 0{,}03z, \end{cases}$$

1ª aproximación:

$$x^1 = 5 \quad , \quad y^1 = -1 \quad , \quad z^1 = 0{,}1 \quad ,$$

que sustituída en los segundos miembros da:

2ª aproximación:

$$\begin{cases} x^2 = 5 - 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}015 = 4{,}925 \quad , \\ y^2 = -1 + 0{,}15 - 0{,}03 - 0{,}012 = -0{,}892 \quad , \\ z^2 = 0{,}1 - 0{,}05 - 0{,}08 - 0{,}003 = -0{,}033 \quad , \end{cases}$$

3ª aproximación:

$$\begin{cases} x^3 = 5 - 0{,}09850 + 0{,}00892 - 0{,}00495 = 4{,}90547 \quad , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Aunque en la práctica es así como se procede, conviene examinar el método como proceso de convergencia que expresa las incógnitas por desarrollos en serie, transformando sucesivamente las ecuaciones en esta forma:

[Ap. II-14] $$x_r = h_r + \lambda\Sigma_s k_{rs} x_s \quad ,$$

[Ap. II-15] $$x_r = h_r + \lambda\Sigma_s k_{rs}(h_s + \lambda\Sigma_t k_{st} x_t) \quad ,$$

y como en la suma de estas sumas aparece como coeficiente de x_1 el producto escalar

$$k_{r1}k_{11} + k_{r2}k_{21} + \dots + k_{rn}k_{n1} = k^2{}_{r1} \text{ , (fila } r \text{ por columna 1)}$$

y, en general, como coeficiente de x_s el producto $k^2{}_{rs}$ de la fila r por la columna s, resulta:

[Ap. II-16] $$x_r = h_r + \lambda\Sigma_s k_{rs} h_s + \lambda^2\Sigma_s k^2{}_{rs} x_s \quad .$$

Cambiando en ésta r por s, y s por t, se puede sustituir en [Ap. II-14] como x_s para obtener una nueva aproximación y así se sigue sucesivamente, sustituyendo siempre en [Ap. II-14].

La matriz $\{k^2{}_{rs}\}$ es el producto de $\{k_{rs}\}$ por sí misma (§ 61-3, *a*); multiplicando $\{k_{rs}\}$ (filas) por $\{k^2{}_{rs}\}$ (columnas) resulta la matriz $\{k^3{}_{rs}\}$, etc. La correlación con las ecuaciones integrales es tan perfecta, que basta desarrollar el método para éstas y repetir aquí las conclusiones.

c₂) Resolución de la ecuación integral por aproximaciones: serie de NEUMANN. — El mismo método de aproximaciones sucesivas es aplicable *mutatis mutandis* a la ecuación integral:

[Ap. II-17]
$$\mathbf{x}(r) - \lambda\int \mathbf{k}(r,s)\mathbf{x}(s)\,ds = \mathbf{h}(r)\,;\ \mathbf{x}(r) = \mathbf{h}(r) + \lambda\int \mathbf{k}(r,s)\mathbf{x}(s)\,ds \quad ,$$

y sustituyendo $\mathbf{x}(s) = \mathbf{h}(s) + \lambda\int \mathbf{k}(s,t)\mathbf{x}(t)\,dt$, resulta:

[Ap. II-18]
$$\mathbf{x}(r) = \mathbf{h}(r) + \lambda\int \mathbf{k}(r,s)\,ds + \lambda^2\int \mathbf{k}(r,s)\,.\,[\int \mathbf{k}(s,t)\mathbf{x}(t)\,dt]\,ds \quad .$$

He aquí una integral doble que por permutación (cfr. § 82-5), se reduce a una simple en t si calculamos primero la integral en s:

[Ap. II-19] $$\mathbf{k}^2(r,t) = \int \mathbf{k}(r,s)\mathbf{k}(s,t)\,ds \quad , \quad (\textit{núcleo iterado}) \quad .$$

y resulta:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{h}(s) + \lambda\int \mathbf{k}(s,t)\mathbf{h}(t)\,dt + \lambda^2\int \mathbf{k}^2(s,t)\mathbf{x}(t)\,dt \quad ,$$

por ser indiferente la denominación de la variable de integración. Al sustituir esta expresión $\mathbf{x}(s)$ en [Ap. II-17] aparece, además de:

$$\lambda^2\int \mathbf{k}^2(r,t)\mathbf{h}(t)\,dt \quad ,$$

el nuevo término:

$$\lambda^3\int \mathbf{k}(r,s)[\int \mathbf{k}^2(s,t)\mathbf{x}(t)\,dt]\,ds = \lambda^3\int[\int \mathbf{k}(r,s)\mathbf{k}^2(s,t)\,ds]\mathbf{x}(t)\,dt \quad ,$$

o sea

$$\lambda^3\int \mathbf{k}^3(r,t)\mathbf{x}(t)\,dt$$

llamando

[Ap. II-20] $$\mathbf{k}^3(r,t) = \int \mathbf{k}(r,s)\mathbf{k}^2(s,t)\,ds \quad ,$$

y si designamos por el operador K^1 la multiplicación por el núcleo $k(r,s)$ e integración, siendo K^2, K^3, ..., los *operadores iterados*, correspondientes a los *núcleos iterados* [Ap. II-19], [Ap. II-20], ..., resulta la expresión simbólica

[Ap. II-21] $$x = h + \lambda K^1h + \lambda^2K^2h + \ldots + \lambda^nK^nh + \lambda^{n+1}K^{n+1}x \quad ,$$

y al prescindir del último término, que es desconocido, se tiene la n-ésima aproximación; pero no sabiendo nada de $x(r)$, ni siquiera si existe, no podemos (como en el desarrollo tayloriano; cfr. § 44-2, nota 1) pasar al desarrollo en serie, pues nada podemos decir del término complementario. No obstante, a modo de conjetura, escribamos la serie:

[Ap. II-22] $$x = h + \lambda K^1h + \lambda^2K^2h + \ldots + \lambda^nK^nh + \ldots$$

y veamos si converge y en tal caso si satisface a [Ap. II-17]. *Suponiendo que se cumplen las acotaciones*:

[Ap. II-23] $$|k(r,s)| < M \quad ; \quad |h(r)| < m \quad ;$$

al multiplicar h por $k(r,s)$ e integrar, resulta $|K^1h| < mM$, $|K^2h| < mM^2$, ..., luego *la serie converge uniformemente para* $\lambda < 1/M$; y es obvio que la función $x(r)$ así definida satisface a la ecuación $x - \lambda K^1x = h$, pues siendo legítima la integración término a término (§ 85-1, teor. 1), es $K^1x = K^1h + \lambda K^2h + \ldots$; y multiplicando por λ y restando de [Ap. II-22] resulta $h(r)$; así pues, para λ suficientemente pequeño [Ap. II-22] representa la solución buscada de la ecuación integral dada [Ap. II-17].

Esto puede expresarse de otro modo, llamando *núcleo resolvente* o *recíproco* a la función de r, s, y λ definida por la serie (también llamada de NEUMANN):

[Ap. II-24] $$K(r,s,\lambda) = k(r,s) + \lambda k^2(r,s) + \lambda^2k^3(r,s) + \ldots \quad ,$$

pues la solución [Ap. II-22] se expresará así:

[Ap. II-25] $$x(r) = h(r) + \lambda\int K(r,s,\lambda)h(s)\,ds \quad ,$$

ecuación análoga a la propuesta, con permutación de x, h y cambio del núcleo k por el —K, que se llama *recíproca* de la [Ap. II-17].

Esta reciprocidad, subsistente de la análoga del álgebra elemental, aparece también en las ecuaciones integrales de primera especie, cobrando gran importancia en las aplicaciones de tipos especiales de ellas (LAPLACE, FOURIER, HILBERT, etc.).

Obsérvese la gran generalidad del método, que sólo ha exigido del núcleo *integrabilidad* y *acotación* [Ap. II-23], mientras que la demostración del teorema de FREDHOLM se basa en la *continuidad* del núcleo.

c_2) *Fórmula de* SCHMIDT *para acotación del radio de convergencia de la serie de* NEUMANN. — La serie de NEUMANN [Ap. II-24] es el algoritmo más sencillo para la resolución de la ecuación integral de segunda especie; pero la acotación $|k(r,s)| < M$, en que nos hemos basado para dar la cota $|\lambda| < 1/M$ de su radio de convergencia, da un exiguo intervalo de validez, en cuanto haya algún valor grande de $k(r,s)$, aun en el caso de que en su generalidad sean pequeños; pero si se conoce mejor el núcleo y se calcula su valor medio cuadrático $||k||_2 = \mu$, según [XXV-1], (Cap. XXV, nota I; § 56-3), es decir:

[Ap. II-26] $$\int\int[k(r,s)]^2dr\,ds = \mu^2 \quad ,$$

se demuestra fácilmente con la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ (§ 96-2 y Cap. XXV, nota I) que es:

$$|k^2| \leqslant \mu^2 \quad , \quad |k^3| \leqslant \mu^3 \quad , \quad \ldots \quad .$$

Por tanto la serie [Ap. II-24] y por ende, la [Ap. II-22], converge para $|\lambda| < 1/\mu$.

Este perfeccionamiento de E. SCHMIDT (1907) amplía el intervalo

$|\lambda| < 1/M$, por ser siempre $\mu < M$, salvo en el caso trivial de ser constante $k(r, s)$.

d) Fórmula de FREDHOLM. — Daremos suscintamente dos métodos de FREDHOLM (1903) y HILBERT (1904), para llegar a las fórmulas de FREDHOLM, que resuelven teóricamente la ecuación integral lineal de segunda especie, con indicaciones prácticas que permitirán aplicarlos al cálculo numérico.

d_1) MÉTODO 1º (HILBERT). — *Aproximación del núcleo por núcleos disociados.* — Puede expresarse con determinantes la solución de la ecuación de núcleo disociado [Ap. II-6], como se explicó en *a*), por reducirse la ecuación integral [Ap. II-7] a resolver el sistema lineal [Ap. II-8].

Haciendo $n = 3$, para abreviar la escritura, el desarrollo en λ del determinante de este sistema es:

[Ap. II-27]

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & -\lambda k_{13} \\ -\lambda k_{21} & 1 - \lambda k_{22} & -\lambda k_{23} \\ -\lambda k_{31} & -\lambda k_{32} & 1 - \lambda k_{33} \end{vmatrix} = 1 - \lambda \Delta_1 + \lambda^2 \Delta_2 - \lambda^3 \Delta_3 \quad ,$$

llamando $\Delta_1 = k_{11} + k_{22} + k_{33}$ a la suma de los menores principales de orden 1 en $\det\{k_{ij}\}$; Δ_2 a la suma de los tres menores principales de orden 2, y llamando Δ_3 al determinante de tercer orden $\det\{k_{ij}\}$.

Este $\Delta(\lambda)$ es el denominador de la fórmula de CRAMER, y los numeradores (§ 15-4, *b*) multiplicados por los $\alpha_j(r)$ y sumados, dan un polinomio $-\Delta[\alpha(r), h, \lambda]$, con coeficientes funciones de r, formando así:

[Ap. II-28]

$$\Delta[\alpha(r), h, \lambda] = \Delta_1[\alpha(r), h] - \lambda \Delta_2[\alpha(r), h] + \lambda^2 \Delta_3[\alpha(r), h] \quad ,$$

llamando $\Delta_i[\alpha(r), h]$ a la suma de los menores principales orlados con las α_i, h_i en la siguiente forma: Orlando los menores que componen Δ_1 se obtiene:

$$\Delta_1[\alpha(r), h] = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 \\ h_1 & k_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 \\ h_2 & k_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \alpha_3 \\ h_3 & k_{33} \end{vmatrix} \quad ;$$

orlando los menores que componen Δ_2 se obtiene:

$$\Delta_2[\alpha(r), h] = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ h_1 & k_{11} & k_{12} \\ h_2 & k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ h_1 & k_{11} & k_{13} \\ h_3 & k_{31} & k_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ h_2 & k_{22} & k_{23} \\ h_3 & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} \quad ;$$

análogamente se obtiene $\Delta_3[\alpha(r), h]$ orlando Δ_3 con α_1, α_2 α_3; h_1, h_2, h_3.

Por tanto, poniendo el denominador, se tiene

$$\Sigma_j X_j \alpha_j(r) = -\Delta[\alpha(r), h, \lambda]/\Delta(\lambda) \quad ,$$

y la solución $x(r)$ de la ecuación [Ap. II-7] es:

[Ap. II-29]
$$x(r) = h(r) - \lambda \frac{\Delta[\alpha(r), h, \lambda]}{\Delta(\lambda)}$$

Si el núcleo tiene n sumandos, el denominador es un polinomio en λ de grado n y el numerador es de grado $n - 1$. Si con un polinomio

$$\alpha_1(r)\beta_1(s) + \ldots + \alpha_n(r)\beta_n(s)$$

se logra buena aproximación al núcleo dado $k(r, s)$, se puede acotar el error cometido con la fórmula [Ap. II-29] respecto de la verdadera solución de la ecuación de núcleo dado $k(r, s)$.

Si se tiene en cuenta que $h_i = \int h(s)\beta_i(s)ds$, entonces es:

[Ap. II-30]
$$\Delta_m[\alpha(r), h] = \int \Delta_m[\alpha(r), \beta(s)]ds \quad , \quad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

y [Ap. II-29] toma la forma (cfr. con [Ap. II-25])

[Ap. II-31] $$x(r) = h(r) + \lambda \int K(r, s, \lambda) h(s) ds \quad ,$$

con el *núcleo resolvente*

[Ap. II-32] $$K(r, s, \lambda) = -\Delta[\alpha(r), \beta(s), \lambda]/\Delta(\lambda) \quad .$$

En el desarrollo [Ap. II-27] los coeficientes Δ_1, Δ_2 ... son sumas de los menores principales de la matriz $\{k_{ij}\}$ de orden 1, 2, ..., y para facilitar el paso de las sumas de estos menores a integrales, no formaremos solamente los menores en el orden en que están en $\Delta(h)$, sino todas las *variaciones* (binarias, ternarias, etc., § 11-1) de los índices, 1, 2, ..., n, y como cada *combinación* (§ 11-3) de orden p de las antes formadas aparece repetida $p!$ veces, las nuevas sumas deben dividirse por $1!, 2!, \ldots, n!$. De este modo, cada índice recorre todos los valores 1, 2, ..., n y se facilita el paso a las integrales. Sean así, en lugar de [Ap. II-27] y [Ap. II-28]:

[Ap. II-33] $$D(\lambda) = \Delta(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1!} D_1 + \frac{\lambda^2}{2!} D_2 - \ldots + + \frac{(-1)^n \lambda^n}{n!} D_n \quad ;$$

[Ap. II-34] $$D(r, s, \lambda) = -\Delta[\alpha(r), \beta(s), \lambda] = D_0(r, s) - - \frac{\lambda}{1!} D_1(r, s) + \frac{\lambda^2}{2!} D_2(r, s) - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}}{(n-1)!} D_{n-1}(r, s) \quad ,$$

donde, teniendo en cuenta que $k_{ij} = \int \alpha_j(t)\beta_i(t)\,dt$, y por las propiedades de los determinantes (§ 13-3 y 4), es:

[Ap. II-35] $$D_p = = \int \cdots \int \begin{vmatrix} k(t_1, t_1) & k(t_1, t_2) & \ldots & k(t_1, t_p) \\ k(t_2, t_1) & k(t_2, t_2) & \ldots & k(t_2, t_p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k(t_p, t_1) & k(t_p, t_2) & \ldots & k(t_p, t_p) \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 \ldots dt_p \quad ;$$

[Ap. II-36] $$D_p(r, s) = = \int \cdots \int \begin{vmatrix} k(r, s) & k(r, t_1) & \ldots & k(r, t_p) \\ k(t_1, s) & k(t_1, t_1) & \ldots & k(t_1 t_p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k(t_p, s) & k(t_p, t_1) & \ldots & k(t_p, t_p) \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 \ldots dt_p \quad ;$$

para $p = 1, 2, \ldots, n$, con $D_0(r, s) = k(r, s)$.

Así, para $n = 3$, es

$$D_1 = \int k(t, t)\,dt = \int \alpha_1(t)\beta_1(t)\,dt + \int \alpha_2(t)\beta_2(t)\,dt + \int \alpha_3(t)\beta_3(t)\,dt = = k_{11} + k_{22} + k_{33} = \Delta \quad ;$$

$$D_2 = \int\int \begin{vmatrix} k(t_1, t_1) & k(t_1, t_2) \\ k(t_2, t_1) & k(t_2, t_2) \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 = \int\int \begin{vmatrix} \alpha_1(t_1)\beta_1(t_1) & \alpha_1(t_1)\beta_1(t_2) \\ \alpha_1(t_2)\beta_1(t_1) & \alpha_1(t_2)\beta_1(t_2) \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 +$$
$$+ \int\int \begin{vmatrix} \alpha_1(t_1)\beta_1(t_1) & \alpha_2(t_1)\beta_2(t_2) \\ \alpha_1(t_2)\beta_1(t_1) & \alpha_2(t_2)\beta_2(t_2) \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 +$$
$$+ \int\int \begin{vmatrix} \alpha_1(t_1)\beta_1(t_1) & \alpha_3(t_1)\beta_3(t_2) \\ \alpha_1(t_2)\beta_2(t_1) & \alpha_3(t_2)\beta_3(t_2) \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 + \ldots \quad ,$$

donde el primer sumando vale 0, el segundo vale

$$\int\int \beta_1(t_1)\beta_2(t_2) \begin{vmatrix} \alpha_1(t_1)\alpha_2(t_1) \\ \alpha_1(t_2)\alpha_2(t_2) \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 = \int\int \begin{vmatrix} \alpha_1(t_1)\beta_1(t_1) & \alpha_2(t_1)\beta_2(t_1) \\ \alpha_1(t_2)\beta_2(t_2) & \alpha_2(t_2)\beta_2(t_2) \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 =$$
$$= \begin{vmatrix} \int \alpha_1(t_1)\beta_1(t_1)\,dt_1 & \int \alpha_2(t_1)\beta_1(t_1)\,dt_1 \\ \int \alpha_1(t_2)\beta_2(t_2)\,dt_2 & \int \alpha_2(t_2)\beta_2(t_2)\,dt_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{vmatrix} \quad ,$$

y análogamente el tercero vale $\begin{vmatrix} k_{11} & k_{31} \\ k_{13} & k_{33} \end{vmatrix}$, etc., dando $D_2 = 2!\Delta_2$; ...

Del mismo modo:

$$D_0(r,s) = k(r,s) = \alpha_1(r)\beta_1(s) + \alpha_2(r)\beta_2(s) + \alpha_3(r)\beta_3(s) = -\Delta_1[\alpha(r),\beta(s)] \quad ;$$

$$D_1(r,s) = \int \begin{vmatrix} k(r,s) & k(r,t_1) \\ k(r_1,s) & k(t_1,t_1) \end{vmatrix} dt_1 = -1!\Delta_2[\alpha(r),\beta(s)] \quad ;$$

$$D_2(r,s) = \int\int \begin{vmatrix} k(r,s) & k(r,t_1) & k(r,t_2) \\ k(t_1,s) & k(t_1,t_1) & k(t_1,t_2) \\ k(t_2,s) & k(t_2,t_1) & k(t_2,t_2) \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 = -2!\Delta_3[\alpha(r),\beta(s)] \quad ; \quad \text{etc.}$$

Las representaciones [Ap. II-33], [Ap. II-34] pueden prolongarse formalmente como series, pues para un núcleo disociado de número n finito de términos, las D_p para $p > n$ y las $D_p(r,s)$ para $p > n-1$, se anulan todas. Así, el núcleo resolvente vendrá dado por el cociente de las series en λ:

[Ap. II-37] $$K(r,s,\lambda) = D(r,s,\lambda)/D(\lambda) \quad .$$

Si ahora consideramos un núcleo continuo cualquiera $k(r,s)$ y lo aproximamos uniformemente por polinomios (§ 98-5, teor. 3), es decir, por núcleos disociados, las respectivas expresiones [Ap. II-35] y [Ap. II-36] convergerán hacia los determinantes correspondientes al núcleo dado $k(r,s)$, mientras que las representaciones [Ap. II-33] y [Ap. II-34] convertidas en series, convergen para todo valor de λ, pues si para todo r, s se conserva $|k(r,s)| < M$, la acotación de HADAMARD (§ 70, ejercicio 25) da para [Ap. II-35] y [Ap. II-36] las acotaciones:

$$|D_p| \leqslant \sqrt{p^p}\,M^p \quad ; \quad |D_p(r,s)| \leqslant \sqrt{(p+1)^{p+1}}\,M^{p+1}$$

es decir, las series correspondientes a las [Ap. II-33] y [Ap. II-34] tienen por mayorantes (§ 22-2, b) las series:

$$1 + \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{p^p}\,M^p\lambda^p/p! \quad ; \quad \sum_{p=0}^{\infty} \sqrt{(p+1)^{p+1}}\,M^{p+1}\lambda^p/p! \quad ;$$

convergentes para todo valor de λ (§ 43-1, b_2), al ser (§ 53-4):

$$\lim(\sqrt{p^p}\,M^p/p!)^{1/p} = \lim\left(\frac{p^{\frac{1}{2}p}\,M^p\,e^p}{p^p\sqrt{2\pi p}}\right)^{1/p} = 0 \quad \text{para } p \to \infty \quad .$$

Así resulta la *fórmula de* FREDHOLM [Ap. II-31] con el *núcleo resolvente* [Ap. II-37], válida para todo valor de λ que no anule el denominador $D(\lambda)$.

Como el cálculo de las integrales múltiples [Ap. II-35] y [Ap. II-36] sería prácticamente imposible, son útiles las fórmulas recurrentes de deducción inmediata:

[Ap. II-38] $$\begin{cases} D_{p+1} = \int D_p(t,t)\,dt \quad ; \\ D_p(r,s) = k(r,s)D_p - p\int k(r,t)\,D_{p-1}(t,s)\,dt \quad , \end{cases}$$

que permite obtenerlas progresivamente, y en caso de convergencia rápida (λ muy pequeño) permiten llegar a una solución aproximada.

d_3) MÉTODO 2º (FREDHOLM). *Aproximación del núcleo por funciones escalonadas.* — Repetidas veces hemos considerado la ecuación integral como límite de un sistema de ecuaciones. Descompuesto cada intervalo $(0;\,1)$ en n partes iguales, y llamando $k_{ij} = k(r_i, s_j)$ al valor de $k(r,s)$ en el centro de la malla (i,j), así como $h_i = h(r_i)$ al valor en el punto

medio del intervalo número i, tenemos la ecuación integral no homogénea [Ap. II-2] y el sistema lineal correspondiente:

[Ap. II-39] $$X_i - \frac{\lambda}{n} \Sigma_j k_{ij} X_j = h_i \quad .$$

Si llamamos $d(\lambda)$ al determinante de este sistema, y d_{pj} a los adjuntos (§ 13-4, a) de los elementos de este determinante, desdejando X_i en [Ap. II-39] y sustituyendo las X_j por los valores que da la regla de CRAMER (§ 15-4) aplicada a [Ap. II-39], se obtiene:

$$X_i = h_i + \frac{\lambda}{n} \Sigma_j k_{ij} (\Sigma_p h_p \frac{d_{pj}}{d(\lambda)}) \quad ,$$

y llamando

[Ap. II-40] $$K_{ip} = \Sigma_j k_{ij} \frac{d_{pj}}{d(\lambda)} \quad ,$$

resulta:

[Ap. II-41] $$X_i = h_i + \frac{\lambda}{n} \Sigma_p K_{ip} h_p \quad .$$

Comparando ésta con $X_i = \Sigma_p d_{pi} h_p / d(\lambda)$, o también, de [Ap. II-40] por conocidas propiedades de los determinantes (§ 13-3, c), se obtiene:

[Ap. II-42] $$d_{pi} - \frac{\lambda}{n} d(\lambda) K_{ip} = \begin{cases} = 0 \text{ si } p \neq i \quad , \\ = d(\lambda) \text{ si } p = i \quad . \end{cases}$$

Obsérvese que respecto de [Ap. II-27], es:

[Ap. II-43] $$d(\lambda) = 1 - \lambda d_1 + \lambda^2 d_2 - \dots \pm \lambda^n d_n = \Delta(\lambda/n) \quad ,$$

es decir, como en el método 1º, los coeficientes d_1, d_2, ..., son sumas de menores principales Δ_1, Δ_2, ..., de la matriz $\{k_{ij}\}$, pero divididos por n, n^2, ... También, como antes, para facilitar el paso de las sumas a las integrales no formaremos solamente los menores en el orden en que están en $d(\lambda)$, sino todas las variaciones (binarias, ternarias, etc.) de los índices 1, 2, ..., n, y como cada combinación de orden p de las antes formadas aparece repetida $p!$ veces, las nuevas sumas deben dividirse por $1!$, $2!$, $3!$, ..., $n!$. De este modo cada índice recorre los valores 1, 2, ..., n y se facilita el paso al límite.

Si en los puntos de cada malla llevamos la ordenada K_{ij} se tiene una función en escalera, que para $n \to \infty$ converge hacia una función continua $K(r, s)$ y, análogamente, la función escalonada de los valores X_1, X_2, ..., X_n converge hacia una función continua $x(r)$. Admitida esta convergencia, es legítimo pasar el límite en [Ap. II-41] y resulta [Ap. II-31] como solución de la ecuación propuesta. También ahora debe justificarse mediante la acotación de HADAMARD, en la misma forma que antes, el tránsito del cociente de polinomios en λ:

[Ap. II-44] $$K_{ip} = \frac{d_0^{ip} - \lambda d_1^{ip} - \dots \pm \lambda^{n-1} d^{ip}_{n-1}}{1 - \lambda d_1 + \lambda^2 d_2 - \dots \pm \lambda^n d_n} \quad ,$$

al cociente de las series, que forman ahora el *núcleo resolvente*:

[Ap. II-45] $$K(r, s, \lambda) = \frac{D(r, s, \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{k(r, s) - \lambda d_1(r, s) + \lambda^2 d_2(r, s) - \dots}{1 - \lambda d_1 + \lambda^2 d_2 - \dots}$$

donde los coeficientes comparados con los [Ap. II-35] y [Ap. II-36] son:

[Ap. II-46] $$d_p = D_p / p! \quad ; \quad d_p(r, s) = D_p(r, s)/p! \quad ,$$

pero en cuyas expresiones, las integrales se obtienen ahora como límites de sumas de determinantes con elementos k_{ij} que ya son los valores de $k(r, s)$ en los centros de las mallas (i, j).

Las fórmulas de recurrencia [Ap. II-38] son ahora:

[Ap. II-47]
$$\begin{cases} d_{p+1} = \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\int d_p(t,t)\,dt \quad ; \\ d_p(r,s) = k(r,s)d_p - \displaystyle\int k(r,t)\,d_{p-1}(t,s)\,dt \quad , \end{cases}$$

Es obvio que la solución [Ap. II-31] es más potente que la serie de NEUMANN, cuyo círculo de convergencia tiene como radio el mínimo valor absoluto en todo el cuadrado (r, s) de los ceros del denominador [Ap. II-45], polos de $K(r, s, \lambda)$, como función analítica de λ (§ 115-10).

Es claro que ese círculo (de cuyo radio dimos la cota $1/M$ y la más afinada $1/\mu$ de SCHMIDT) se puede prolongar (§ 115-12) como hizo POINCARÉ (1903) hasta cubrir cualquier punto λ, que no sea polo; y aunque el método es teórico, puede ser útil en algunos casos sencillos en que basta un sólo círculo de prolongación; por ejemplo, si los polos tienen parte real negativa y el radio $> \frac{1}{2}$, se llegará así al punto $\lambda = 1$.

El método de FREDHOLM en el caso homogéneo $h(r) \equiv 0$ se limita a dar como solución *única* $x(r) \equiv 0$, si λ no anula al denominador $D(\lambda)$. Por tanto, los únicos valores que *pueden* dar solución son las raíces de la ecuación $D(\lambda) = 0$; pero, ¿serán autovalores que den efectivamente solución? El estudio por esta vía, más complicado que el de HILBERT-SCHMIDT a exponer en Ap. II-3 para núcleo simétrico, puede hacerse en el vol. III de GOURSAT (citado en Cap. VI, nota VI-5) que usa las denominaciones: *Valores y funciones características, singulares* o *fundamentales*.

e) Ecuaciones de VOLTERRA. *e_1) Caso de ecuación integral de 2ª especie.* — El tipo más importante de ecuación con núcleo *no simétrico* es el de VOLTERRA [estudiada primeramente por LIOUVILLE en su *Journal de Mathématiques* (1836)]. El sistema de ecuaciones algebraicas lineales se resuelve muy simplemente sin determinantes en el caso triangular, en que la matriz de coeficientes tiene nulos todos los términos a un lado de la diagonal principal (Cap. XVII, nota IV, *c*); en la ecuación integral de VOLTERRA:

[Ap. II-48]
$$x(r) - \lambda\int_0^r k(r,s)\,x(s)\,ds = h(r) \quad ,$$

que es problema correlativo, no hay simplificación análoga, pero se logra mayor alcance en el método general de aproximaciones sucesivas (c_2), del que es caso particular, si se define en todo el cuadrado básico el núcleo no simétrico $k(r, s)$ de manera que sea $k(r, s) = 0$ para $s > r$. Claro está que aun siendo continuo el núcleo dado en el triángulo $s \leqslant r$, si no es nulo en la diagonal $s = r$, el núcleo ampliado es discontinuo en ella; pero no habiendo exigido continuidad para el núcleo en el método c_2, no se modifican las conclusiones allí establecidas.

Aún más, veamos como se amplía el campo de convergencia de la serie [Ap. II-22], gracias a la más estrecha acotación que ahora se logra. En efecto, al permutar la integral reiterada de [Ap. II-18], ahora es:

$$\int_0^r k(r,s)\left[\int_0^s k(s,t)\,x(t)\,dt\right]ds = \int_0^r x(t)\,dt\int_t^r k(r,s)\,k(s,t)\,ds \quad ,$$

que con la acotación [Ap. II-23], da el núcleo iterado:

$$k^2(r,t) = \int_t^r k(r,s)\,k(s,t)\,ds \quad ,$$

$$|\,k^2(r,t)\,| \leqslant M^2\int_t^r ds = \frac{r-t}{1!}\,M^2 \quad .$$

Análogamente:

$$k^3(r,t) = \int_t^r k(r,s)k^2(s,t)\,ds \quad ,$$

$$|k^3(r,t)| \leqslant M^3 \int_t^r (s-t)\,ds = \frac{(r-t)^2}{2!} M^3 \quad ,$$

y en general:

[Ap. II-49]
$$\begin{cases} k^n(r,t) = \int_t^x k(r,s)k^{n-1}(s,t)\,ds \quad , \\ |k^n(r,t)| \leqslant \frac{(r-t)^{n-1}}{(n-1)!} M^n \quad . \end{cases}$$

La serie mayorante, en este caso, no es geométrica (c_2), sino exponencial, convergente para todo λ (§ 45-1); luego resulta:

La serie de NEUMANN [Ap. II-24] *de toda ecuación de* VOLTERRA *de segunda especie converge absoluta y uniformemente para todo valor de λ y da su única solución.*

En particular, por ser única la solución dada por la serie de NEUMANN (c_2), si la ecuación [Ap. II-48] es *homogénea* ($h(r) \equiv 0$) su solución es la función idénticamente nula; luego, el problema homogéneo es imposible para todo λ. Por tanto:

Si la ecuación [Ap. II-48] *es homogénea, no hay autovalores ni autofunciones.*

e_2) *Aplicación al problema de* CAUCHY *de la ecuación diferencial lineal.* — Toda ecuación diferencial lineal ordinaria de cualquier orden:

[Ap. II-50]
$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + + p_n(x)y = f(x) \quad ,$$

con condiciones iniciales de CAUCHY [107-3], se reduce a una ecuación integral, sin más que adoptar $u(x) = y^{(n)}$ como función incógnita y expresar como momentos sus integrales sucesivas (§ 86-2, ejemplo 4) en la forma:

$$y^{(n)}(x) = u(x) \quad ,$$

$$y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(0) = \int_0^x u(t)\,dt \quad ,$$

$$y^{(n-2)}(x) - y^{(n-2)}(0) - \frac{x}{1!} y^{(n-1)}(0) = \frac{1}{1!}\int_0^x u(t)\,(x-t)\,dt \quad ,$$

$$y^{(n-3)}(x) - y^{(n-3)}(0) - \frac{x}{1!} y^{(n-2)}(0) - \frac{x^2}{2!} y^{(n-1)}(0) = \\ = \frac{1}{2!}\int_0^x u(t)\,(x-t)^2 dt \quad ,$$

. . . .

$$y'(x) - y'(0) - \frac{x}{1!} y''(0) - \ldots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} y^{(n-1)}(0) = \\ = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^x u(t)\,(x-t)^{n-2} dt \quad ,$$

$$y(x) - y(0) - \frac{x}{1!} y'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n-1)}(0) = \\ = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x u(t)\,(x-t)^{n-1} dt \quad .$$

Basta, en efecto, derivar cada una de estas integrales por la regla de Leibniz (§ 86-2, teor. 3^b) y resulta la anterior, por anularse el integrando para $t = x$. Sustituyendo en [Ap. II-50], tenemos esta ecuación integral de segunda especie, tipo VOLTERRA:

$$[\text{Ap. II-51}] \qquad u(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt = h(x) \quad ,$$

cuyo núcleo y segundo miembro son:

$$[\text{Ap. II-52}] \qquad k(x,t) = p_1(x) + p_2(x)\frac{x-t}{1!} + \\ + \dots + p_{n-1}(x)\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} + p_n(x)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad ;$$

$$[\text{Ap. II-53}] \qquad h(x) = f(x) - [p_1(x) + xp_2(x) + \frac{x^2}{2!}p_3(x) + \\ + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}p_n(x)]y^{(n-1)}(0) - \\ - [p_2(x) + xp_3(x) + \dots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}p_n(x)]y^{(n-2)}(0) - \\ - \dots\dots\dots\dots - \\ - p_n(x)y(0) \quad ,$$

ambos conocidos, pues están formados por la función dada $f(x)$, los coeficientes y los datos de CAUCHY para $x = 0$. Fórmula análoga si los datos iniciales se dan para $x = a$; basta tomar la integral en el intervalo (a, x).

Obsérvese que las condiciones iniciales:

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0 \quad ,$$

determinan la solución $y \equiv 0$ si la ecuación es homogénea ($h(x) \equiv 0$), pero dan una solución no nula para la ecuación no homogénea. Conviene subrayar la importancia de este resultado. El método clásico (§ 107-3) exige encontrar una solución particular de la ecuación completa [Ap. II-50], problema en general irresoluble, y n soluciones linealmente independientes para la ecuación homogénea, problema que solamente se sabe resolver para tipos muy especiales de ecuaciones. Tales son, por ejemplo, las ecuaciones de segundo orden que cumplen los polinomios ortogonales respecto de un núcleo (§ 97-8), las cuales admiten como solución regular el correspondiente polinomio, según sea el número n que en la ecuación figura. La determinación de otra solución (singular en el origen) exige especial estudio de cada caso (cfr. § 107, ejercicio 12). Otros tipos de ecuaciones de segundo orden admiten soluciones expresadas por ciertas series que han sido muy estudiadas, tales las funciones de BESSEL (Cap. XXVII, nota 1), HANKEL (Cap. XXVII, nota 1, *c*), GAUSS, etc., pero exceptuados estos pocos tipos conocidos, el único recurso es el desarrollo en serie de potencias de x, cuyo radio de convergencia se ignora.

La ventaja del método actual estriba en dar *directamente* la solución del problema de CAUCHY por una serie seguramente convergente, cuya convergencia será tanto más rápida cuanto menor sea el núcleo, siendo a veces suficiente un par de términos para lograr satisfactoria aproximación; pero claro es que la dificultad de formar los núcleos iterados puede ser insuperable, si se precisan muchos para alcanzar la aproximación exigida.

EJEMPLO 7. Compruébese que los núcleos iterados para la sencillísima forma diferencial $y'' - y$ son

$$\mathrm{k}(x,t) = t - x \quad ; \quad \mathrm{k}^n(x,t) = (-1)^n \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \frac{x^{2n-1-i}\, t^i}{(2n-1-i)!\,i!} \quad ,$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

La serie de NEUMANN [Ap. II-22] para la ecuación $y'' - y = 1$, da:

$$\mathrm{u}(x) = y''(x) - [1 + y(0)]\left[1 - \int_0^x \mathrm{k}\, dt + \int_0^x \mathrm{k}^2 dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^x \mathrm{k}^3 dt + \ldots\right] + y'(0)\left[x - \int_0^x t\mathrm{k}\, dt + \int_0^x t\mathrm{k}^2 dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^x t\mathrm{k}^3 dt + \ldots\right] = [1 + y(0)]\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \left(\sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \frac{x^{2n-1-i}\, t^i}{(2n-1-i)!\,i!}\right)\right.$$

$$\left. dt\right] + y'(0)\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \left(\sum_{i=0}^{2n-1} \frac{x^{2n-1-i}\, t^{i+1}}{(2n-1-i)!\,i!}\right) dt\right] =$$

$$= [1 + y(0)]\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] + y'(0)\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \quad ,$$

de donde:

$$y(x) = [1 + y(0)]\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) + y'(0)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) - 1 \quad ,$$

resultado que, sin embargo, se comprueba y se obtiene mucho más fácilmente, en este caso, por coeficientes indeterminados:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{en} \quad y'' - y = 1$$

implica

$$2a_2 = a_0 + 1; \; n(n-1)a_n = a_{n-2} \quad , \quad (n = 3, 4, \ldots) \quad ,$$

de donde:

$$a_{2n} = (1 + a_0)/(2n)! \quad ; \quad a_{2n+1} = a_1/(2n+1)! \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

3. **Ecuaciones integrales lineales de segunda especie con núcleo simétrico.** — *a) Formas cuadráticas.* — El teorema disyuntivo de FREDHOLM (Ap. II-2, b_2) deja en duda la existencia de soluciones en el caso singular (Ap. II-2, *a*, ejemplo 5), cuestión que con otras varias quedará resuelta para el tipo más sencillo de ecuaciones: las de *núcleo simétrico*, tal que $\mathrm{k}(r,s) \equiv \mathrm{k}(s,r)$.

Ya, en álgebra tensorial, se ha visto la excepcional importancia de este caso (§ 63-5); cuando el tensor es *simétrico*, dos autovectores correspondientes a autovalores distintos son *ortogonales* y la ecuación secular tiene sus raíces (autovalores) *reales*, propiedades que no valen para todo tensor. Especial aplicación hemos hecho para su reducción a la forma canónica en el grupo ortogonal y obtención de las ecuaciones normales de las cuádricas. Precisamente es esa clásica teoría de las cuádricas la que sirvió de pauta y modelo a HILBERT para su teoría de las ecuaciones integrales. El paralelismo es perfecto, a condición de eludir los determinantes, que no tienen análogo en el campo continuo.

Toda matriz $\{k_{rs}\}$ simétrica $k_{rs} = k_{sr}$ puede considerarse como discriminante de una *forma cuadrática* (§ 63-3, *b*) obtenida orlando la matriz con las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ arriba y a la izquierda, y sumando los productos de cada k_{rs} por sus correspondientes x_r, x_s. Análogamente, todo núcleo simétrico $\mathrm{k}(r,s) \equiv \mathrm{k}(s,r)$ engendra una *forma cuadrática integral*, como indican los esquemas siguientes:

$$F[x] = x_r \overline{\left| k_{rs} \right.}^{\,x_s} = \qquad\qquad F[x] = x(r) \overline{\left| k(r,s) \right.}^{\,x(s)} =$$

$$= \sum_r \sum_s k_{rs} x_r x_s \quad ; \qquad\qquad = \int_r \int_s k(r,s)\, x(r)\, x(s)\, dr\, ds \quad ;$$

que significan correlativamente: se orla la matriz con las componentes discretas o continuas del vector y se forma la suma o integral de cada valor k por las dos componentes que le corresponden. Si la matriz se orla con dos vectores $\{x_r\}$, $\{y_s\}$, o bien $x(r)$, $y(s)$, la forma se llama *bilineal* (§ 63-3, *a*).

b) *Determinación de autovalores y autofunciones.* — La determinación de los autovalores del núcleo simétrico k_{rs} en su caso más simple (§ 63-5), es decir, la determinación de los valores λ que hacen resoluble el sistema:

$$x_r - \lambda \sum_s k_{rs} x_s = 0 \quad ,$$

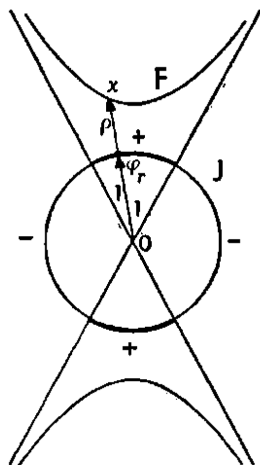


Fig. 447.

tiene carácter variacional, pues estas formas son las semiderivadas de la forma cuadrática:

$$\sum x_r^2 - \lambda \sum k_{rs} x_r x_s \quad ,$$

y su anulación es precisamente la exigida por el método de LAGRANGE (§ 70-8) para la determinación del valor mínimo del radio vector $\varrho = (\sum_r x_r^2)^{\frac{1}{2}}$ de la cuádrica $\sum k_{rs} x_r x_s = 1$, (mínimo existente por ser $\sum x_r^2 > 0$) y de todos los valores extremales de ϱ. Pero este método no toma en cuenta las direcciones en que no existe ϱ real, por ser $\sum k_{rs} x_r x_s < 0$; y si esto sucede para todo sistema de valores $\{x_r\}$ (forma cuadrática definida negativa, § 63-7) no tiene sentido hablar de radios extremales. Aunque este inconveniente puede salvarse introduciendo radios imaginarios o cuádricas conjugadas (§ 63-4), es preferible el siguiente método.

Consideremos *todas* las direcciones definidas por *todos* los vectores φ_r (vectores de módulo 1) que forman la esfera de radio 1 y centro 0 (fig. 447). A todo vector $\{x_r\}$ de módulo arbitrario $\varrho > 0$ corresponde un versor $\{\varphi_r\}$ que define su dirección, y el valor de toda forma cuadrática F de variables, $x_1, \ldots, x_n$, puede expresarse mediante los cosenos directores $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, así:

[Ap. II-54] $$F = \sum k_{rs} x_r x_s = \varrho^2 \sum k_{rs} \varphi_r \varphi_s = \varrho^2 \cdot J(\varphi) \quad .$$

Si existe un punto de la cuádrica $F = 1$ en la dirección $\{\varphi_r\}$ *es* $J = 1/\varrho^2$; pero aunque no lo haya, y aunque sea imaginaria dicha cuádrica, la forma $J(\varphi)$ queda determinada como función continua en todas direcciones, o bien como carga continua (positiva, negativa o nula) sobre la superficie esférica $\sum \varphi_r^2 = 1$ de radio 1; la sola diferencia es que no hay puntos reales de $F = 1$ en las direcciones donde esa carga J es negativa (suele expresarse diciendo: el vector es imaginario y es $\varrho^2 < 0$, convenio que no necesitamos).

En los puntos en que esa función $J(\varphi)$ alcanza su máximo o mínimo absoluto o cualquier otro valor extremal (§ 70-1, *c*), deben anularse (§ 70-8) las derivadas de $\lambda J - (\sum \varphi_r^2 - 1) = \lambda \sum k_{rs} \varphi_r \varphi_s - (\sum \varphi_r^2 - 1)$, es decir:

[Ap. II-55] $$\lambda \sum_s k_{rs} \varphi_s - \varphi_r = 0 \quad ,$$

ecuaciones que determinan cada dirección extremal $\{\varphi_r\}$ y el correspondiente valor real (§ 63-5, a_2) de λ; estos son autovalores y aquellos los

correspondientes autovectores o direcciones principales. Llamaremos *números característicos* a los recíprocos $\nu = 1/\lambda$ de los autovalores λ.

Procedamos análogamente con el núcleo continuo $k(r, s)$ y la forma integral correspondiente:

$$[\text{Ap. II-56}] \qquad J(\varphi) = \int\int k(r,s)\,\varphi(r)\,\varphi(s)\;dr\,ds \;, \quad \left(\int [\varphi(r)]^2 dr = 1\right) \;,$$

Obsérvese que subsiste la fórmula análoga a [Ap. II-54], pues llamando $\varrho = |\,x(r)|$, es decir $\varrho^2 = ||\,x(r)\,|| = \int [x(r)]^2 dr$, es:

$$F = \int\int k(r,s)x(r)x(s)\,dr\,ds = \varrho^2 \int\int k(r,s)\,\varphi(r)\,\varphi(s)\,dr\,ds \quad ;$$

brevemente: $F = \varrho^2 J$. Las ecuaciones $F = 1$, $F = -1$ representan *cuádricas conjugadas*, conjuntos de infinitas funciones $x(r)$, tales que corresponde una a cada φ, excepto para aquellas φ que anulan a J.

Con lenguaje geométrico consideramos $J(\varphi)$ como "función de carga" sobre la superficie esférica de todas las funciones continuas unimodulares $\varphi^2 = ||\,\varphi\,|| = 1$, es decir, a cada punto o función continua unimodular φ le asignamos un número real (positivo, negativo o nulo), que es el correspondiente valor de J.

Esta función toma valores reales acotados superior e inferiormente, pues la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ (§ 96-2 y Cap. XXV, nota I) aplicada a esta integral doble [Ap. II-56], producto escalar de $k(r, s)$ por $\varphi(r)\ \varphi(s)$ expresa:

[Ap. II-57]

$$J^2 \leqslant \int\int [k(r,s)]^2 dr\,ds \;.\; \int\int [\varphi(r)]^2[\varphi(s)]^2 dr\,ds = \int\int [k(r,s)]^2 dr\,ds \quad .$$

El conjunto de valores numéricos de J tiene, por tanto, un extremo superior ν_1 pero, ¿será accesible? La contestación afirmativa veámosla seguidamente.

c) *Existencia y naturaleza del máximo de* $J(\varphi)$. — La integral $J(\varphi)$ dada por [Ap. II-56] es ejemplo de *funcional* (Cap. XXVIII, nota X-1, *a*), en el espacio de funciones normalizadas $|\,\varphi\,| = 1$, y es *continua* respecto de la convergencia uniforme de las φ, pues si ésta se incrementa en una función suficientemente pequeña en "métrica uniforme" (§ 96, ejercicio 5), el incremento de J es arbitrariamente pequeño, como salta a la vista de la expresión [Ap. II-56]. Si para tales funcionales continuas tratamos de aplicar el teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS sobre el *máximo* accesible (§ 26-4) nos encontraremos que ni tan sólo es aplicable la demostración vista para el teorema extremal del método variacional constructivo (Cap. XXVIII, nota X-4, *b*), pues es fácil ver que la familia de todas las funciones *continuas* normalizadas no es equicontinua (Cap. XXVIII, nota X-4, *c*), ni compacta.* Aun existiendo el extremo superior ν_1 de J, según antes *b*) hemos visto, si se elige una sucesión $\{\varphi_n\}$ de modo que $\nu_1 - J(\varphi_n) < 1/2^n$, es ciertamente $J(\varphi_n) \to \nu_1$; pero la sucesión $\{\varphi_n\}$ puede no ser convergente. Tampoco podemos aplicar el método de la sucesión *parcial* convergente (Cap. XXVIII, nota X-4, *b*, *c*) porque la familia de las funciones normalizadas no es ni equicontinua ni compacta.

Para poder aplicar dicho método de la sucesión parcial convergente, lo que equivale a operar en un espacio compacto en sí (Cap. XXVIII, nota X-4, *a*), nos referimos a las funciones *emanantes* (Cap. XXVIII, nota IX, *c*) de un núcleo continuo $k(r, s)$ con coeficientes $g(s)$ de norma uniformemente acotada, es decir, a las expresadas así:

---

* Obsérvese que tampoco es uniformemente acotada. Aun a pesar de estar uniformemente acotada, no es equicontinua ni compacta la familia de funciones continuas definidas así en $(-1; +1)$: $f_n(r) = \begin{cases} = 1 - n|r| & \text{para } |r| \leqslant 1/n, \\ = 0 & \text{,, } |r| > 1/n. \end{cases}$

[Ap. II-58] $$f(r) = \int k(r,s)\,g(s)\,ds \quad , \quad \| g(s) \| < m \quad .$$

Para éstas vale:

TEOREMA 1. — *Forman familia equicontinua, uniformemente acotada, y, por tanto, compacta* (teorema de ARZELÀ, Cap. XXVIII, nota X-4, *e*) *todas las funciones emanantes* [Ap. II-58] *de un núcleo continuo* $k(r,s)$ *y coeficientes* $g(s)$ *de norma uniformemente acotada.*

En efecto, si llamamos $\Delta k = k(r',s) - k(r'',s)$, por la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ es:

$$[f(r') - f(r'')]^2 = [\int \Delta k \, . \, g(s)ds]^2 \leqslant \int [\Delta k]^2 ds \, . \int [g(s)]^2 ds \quad ,$$

y por la continuidad uniforme de $k(r,s)$ (teorema de HEINE, § 65-3, nota 2) es $[\Delta k]^2 \leqslant \varepsilon^2/m$ para todo par $|r' - r''| < \delta$, conservándose $\int [g(s)]^2 ds \leqslant m$, luego $|f(r') - f(r'')| < \varepsilon$, cualquiera que sea la $g(s)$, con la sola condición $\| g(s) \| < m$, como queríamos demostrar. Análogamente la familia es uniformemente acotada, pues

$$|f(r)|^2 \leqslant \int [k(r,s)]^2 ds \, . \int [g(s)]^2 ds \leqslant mM^2 \quad ,$$

si $|k(r,s)| \leqslant M$.

La demostración de que la forma cuadrática integral $J(\varphi)$ admite un máximo la haremos mediante el núcleo iterado [Ap. II-19] que ahora designamos

[Ap. II-59] $$\dot{k}(r,t) = k^2(r,t) = \int k(r,s)\,k(s,t)\,ds = \bar{k}(t,r) \quad ,$$

aquí también simétrico. Si en la forma cuadrática integral correspondiente:

[Ap. II-60] $$\bar{J}(\varphi) = \int\int \bar{k}(r,t)\,\varphi(r)\,\varphi(t)\,dr\,dt \quad ; \quad \int [\varphi(r)]^2 dr = 1 \quad ;$$

se sustituye [Ap. II-59], se obtiene la expresión:

[Ap. II-61] $$\bar{J}(\varphi) = \int [\int k(r,s)\,\varphi(r)\,dr]^2 ds \quad ,$$

y por tanto, para cualquier función $\varphi(r)$ es $\bar{J}(\varphi) \geqslant 0$.

Vamos a demostrar primero el teorema del máximo para $\bar{J}(\varphi)$, es decir, vamos a demostrar que entre todas las funciones normalizadas $\varphi(r)$, existe una $\Phi(r)$ que satisface las dos condiciones siguientes:

$$\int [\Phi(r)]^2 dr = 1 \quad ; \quad \bar{J}(\Phi) \geqslant \bar{J}(\varphi) \quad .$$

Como en [Ap. II-57] se demuestra que existe el extremo superior $\mu > 0$ de $\bar{J}(\varphi)$ (pues suponemos $k(r,s)$ no idénticamente nulo); sea entonces una sucesión $\{\psi_n(r)\}$ de funciones normalizadas tales que $\bar{J}(\psi_n) \rightarrow \rightarrow \mu$. A partir de estas ψ_n, introduzcamos:

[Ap. II-62] $$\omega_n(r) = \frac{1}{\sqrt{\bar{J}(\psi_n)}} \int k(r,s)\,\psi_n(s)\,ds \quad ,$$

que vamos a demostrar es normalizada y tal que $\bar{J}(\omega_n) \rightarrow \mu$.

Es normalizada, porque de la definición [Ap. II-62] y la expresión [Ap. II-61], se deduce:

$$\int \omega_n^2 dr = \frac{1}{\bar{J}(\psi_n)} \int [\int k(r,s)\,\psi_n(s)\,ds]^2 dr = 1 \quad .$$

Por otra parte, la misma expresión [Ap. II-61] aplicada a $\omega_n(r)$, teniendo en cuenta [Ap. II-62] da:

$$\bar{J}(\omega_n) = \int [\int k(r,s)\,\omega_n(r)\,dr]^2 ds =$$

$$= \frac{1}{\bar{J}(\psi_n)} \int [\int k(r,s)\,dr \int k(r,t)\,\psi_n(t)\,dt]^2 ds \quad .$$

Si esta última se multiplica por $\int \Psi_n^2 ds = 1$, y se aplica la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene:

$$\overline{J}(\omega_n) \geqslant \frac{1}{J(\Psi_n)} [\int \Psi_n(s) ds \int k(r,s) dr \int k(r,t) \Psi_n(t) dt]^2 =$$
$$= \frac{1}{J(\Psi_n)} [\int \int \Psi_n(s) \Psi_n(t) ds dt \int k(s,r) k(r,t) dt]^2 =$$
$$= \frac{1}{J(\Psi_n)} [\int \int \overline{k}(s,t) \Psi_n(s) \Psi_n(t) ds dt]^2 = \overline{J}(\Psi_n) \quad ,$$

teniendo en cuenta [Ap. II-59], [Ap. II-60] y que el núcleo es *simétrico*.

Puesto que $\overline{J}(\Psi_n) \to \mu$, siendo $\overline{J}(\omega_n) \geqslant \overline{J}(\Psi_n)$, debe también tender $\overline{J}(\omega_n)$ a su extremo superior μ como queríamos demostrar.

Ahora bien, las $\omega_n(r)$ son *emanantes* [Ap. II-62] del núcleo $k(r,s)$, transformadas de la sucesión $\{\Psi_n(s)/\sqrt{J(\Psi_n)}\}$ y aplicando a ellas el anterior teorema 1 de compacidad (cfr. Cap. XXVIII, nota X-4, *c*), existirá una sucesión parcial uniformemente convergente $\lim_i \omega_{n_i} = \Phi$, continua como las ω_{n_i}, tal que por la continuidad de la forma $\overline{J}$ es $\overline{J}(\omega_{n_i}) \to \overline{J}(\Phi)$, luego $\overline{J}(\Phi) = \mu$, y el teorema del máximo accesible queda demostrado para la forma $\overline{J}(\varphi)$.

Por otra parte, si, en general, una forma integral cuadrática $J(\varphi)$ alcanza su extremo superior ν_1 para la función normalizada φ_1, puede demostrarse directamente que esa φ_1 y ese número $\nu = \nu_1$ satisfacen la ecuación integral:

[Ap. II-63] $$\varphi(r) = \frac{1}{\nu} \int k(r,s) \varphi(s) ds \quad ,$$

lo que, por ejemplo, podemos en particular aplicar a la forma $\overline{J}(\varphi)$ para establecer:

[Ap. II-64] $$\mu \Phi(r) = \int \overline{k}(r,s) \Phi(s) ds \quad .$$

En efecto, sustituyamos $J(\varphi) \leqslant \nu_1$ con la condición $\int \varphi^2 dr = 1$, por la más general:

[Ap. II-65] $$J(g)/\int g^2 dr \leqslant \nu_1$$

para toda $g(r)$ de cuadrado integrable, pues es

$$J(g/\sqrt{\int g^2 dr}) = J(g)/\int g^2 dr \quad \text{con} \quad \int (g/\sqrt{\int g^2 dr})^2 dr = 1 \quad .$$

En particular es:

[Ap. II-66] $$J(\varphi_1)/\int \varphi_1^2 dr = J(\varphi_1) = \nu_1 \quad .$$

Si se incrementa la función fija $\varphi_1(r)$ poniendo $\varphi_1(r) + t\,w(r)$ (con $w(r)$ cualquier función fija continua) para valores reales de t se tiene una función real:

$$J(\varphi_1 + tw) = \int \int k(r,s) [\varphi_1(r) + tw(r)][\varphi_1(s) + tw(s)] dr ds =$$
$$= J(\varphi_1) + t \int \int k(r,s) [\varphi_1(r) w(s) + \varphi_1(s) w(r)] dr ds + t^2 J(w) \quad ,$$

a la que puede aplicarse la acotación [Ap. II-65], dando:

$$J(\varphi_1 + tw) \leqslant \nu_1 \int (\varphi_1 + tw)^2 dr = \nu_1 [1 + 2t \int \varphi_1(r) w(r) dr + t^2 \int w^2 dr] \quad ,$$

y teniendo en cuenta [Ap. II-66], por la *simetría* $k(r,s) \equiv k(s,r)$, queda:

$$2t[\int \int k(r,s) \varphi_1(s) w(r) ds dr - \nu_1 \int \varphi_1(r) w(r) dr] + t^2 [J(w) - \nu_1 \int w^2 dr] \leqslant 0.$$

De una relación de este tipo $t\alpha + t^2\beta \leqslant 0$, se deduce que α debe ser nulo, pues de lo contrario sería posible encontrar t suficientemente peque-

ño y de adecuado signo para que $t(\alpha + t\beta)$ fuese positivo. Desde luego, debe ser entonces $\beta \leqslant 0$, lo que ya ocurre en la anterior por [Ap. II-65], para $g(r) = w(r)$. En definitiva, resulta:

[Ap. II-67] $$\int [\nu_1\varphi_1(r) - \int k(r,s)\varphi_1(s)\,ds]\,w(r)\,dr = 0 \quad ,$$

condición válida para toda $w(r)$ continua, que exige:

[Ap. II-68] $$\nu_1\varphi_1(r) - \int k(r,s)\varphi_1(s)\,ds = 0 \quad ,$$

pues siendo continuas k y φ_1, si en un punto r_0 fuese esta expresión $\neq 0$ (por ejemplo, valiese $2a > 0$), en todo un entorno (p, q) sería $> a$, y eligiendo $w(r) = (r - p)(q - r)$ en (p, q) y nula en el resto del intervalo base, resultaría > 0 el primer miembro de [Ap. II-67]. Conclusión:

TEOREMA 2. — *Toda función normalizada* $\varphi_1(r)$ *que sea extremante de la forma* $J(\varphi)$ *satisface la ecuación* [Ap. II-68], *es decir, es autofunción del núcleo* $k(r,s)$, *con el número característico correspondiente* $\nu_1 = J(\varphi_1)$.

Habiendo ya quedado demostrado que $\overline{J}(\varphi)$ alcanza su máximo μ para una función normalizada $\Phi(r)$, el teorema 2 implicará que se cumple [Ap. II-64].

De aquí resulta también que [Ap. II-63] posee autovalores y autofunciones. Sea en efecto:

[Ap. II-69] $$\Psi_1(r) = \Phi(r) + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int k(r,s)\Phi(s)\,ds \quad ,$$

y entonces, si $\Psi_1(r) \equiv 0$, la misma $\Phi(r)$ es autofunción de [Ap. II-63] con el autovalor $-1\sqrt{\mu}$. Si en cambio $\Psi_1(r)$ no es idénticamente nula, teniendo en cuenta su definición [Ap. II-69] pongamos:

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \int k(r,s)\Psi_1(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int k(r,s)\Phi(s)\,ds + \frac{1}{\mu} \int [\int k(r,s)k(s,t)\,ds]\Phi(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int k(r,s)\Phi(s)\,ds + \frac{1}{\mu} \int \overline{k}(r,t)\Phi(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int k(r,s)\Phi(s)\,ds + \Phi(r) \quad ,$$

donde luego hemos aplicado [Ap. II-59] y [Ap. II-64]. Teniendo de nuevo en cuenta [Ap. II-69] se obtiene:

$$\int k(r,s)\Psi_1(s)\,ds = \sqrt{\mu}\Psi_1(r) \quad ,$$

y normalizando Ψ_1 mediante:

$$\varphi_1(r) = \Psi_1(r)/\sqrt{\int \Psi_1^2 dr}$$

resulta finalmente:

[Ap. II-70] $$\sqrt{\mu}\varphi_1(r) = \int k(r,s)\varphi_1(s)\,ds \quad ,$$

y por tanto la función normalizada $\varphi_1(r)$ es autofunción de [Ap. II-63] con autovalor $1/\sqrt{\mu}$.

Si se multiplica [Ap. II-70] por $\varphi_1(r)$ y se integra respecto de r, se obtiene:

[Ap. II-70'] $$\sqrt{\mu} = \sqrt{\mu}\int \varphi_1^2 dr = \int\int k(r,s)\varphi_1(r)\varphi_1(s)\,dr\,ds = J(\varphi_1) \quad ,$$

es decir, *el valor de* $J(\varphi_1)$ *es el número característico* $\sqrt{\mu}$ de $\varphi_1(r)$, que va-

mos a ver es máximo de la forma cuadrática $J(\varphi)$. En efecto, mediante la expresión [Ap. II-61] y la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ, teniendo en cuenta que μ es el máximo de la forma $\overline{J}(\varphi)$, resulta:

[Ap. II-71] $$\mu \geqslant \overline{J}(\varphi) = \int[\int k(r,s)\,\varphi(r)dr]^2 ds \,.\, \int \varphi^2 ds \geqslant$$
$$\geqslant [\int\int k(r,s)\varphi(r)\varphi(s)drds]^2 = [J(\varphi)]^2 \;.$$

Si hubiese resultado $\Psi_1(r) \equiv 0$ en [Ap. II-69], aparte de ser ya $J(\Phi) = -\sqrt{\mu}$, mediante:

$$\Psi_2(r) = \Phi(r) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\int k(r,s)\Phi(s)ds \quad ,$$

[no idénticamente nula, por no serlo la función normalizada $\Phi(r)$], se obtendría del mismo modo otra autofunción normalizada $\varphi_2(r)$ con $J(\varphi_2) = -\sqrt{\mu} = J(\Phi)$, *mínimo* de $J(\varphi)$ en virtud de [Ap. II-71].

Por tanto, queda demostrado:

TEOREMA 3. — *Toda forma cuadrática integral* $J(\varphi)$ *dada por* [Ap. II-56] *para un núcleo continuo simétrico* $k(r,s) \equiv k(s,r)$ *tiene su extremo en valor absoluto accesible, verificándose también para dicho extremo el teorema* 2.

Si $J(\varphi)$ toma sólo valores positivos (en forma cuadrática integral *definida positiva*, § 63-7) el extremo superior accesible, o sea, su *máximo* $\nu_1 > 0$ es número característico. Análogamente, si J toma sólo valores negativos (es forma cuadrática *definida negativa*), su *mínimo* $\nu_{-1} < 0$ es número característico. Si J toma valores de uno y otro signo (es forma cuadrática integral *indefinida*, § 63-7) su extremo en valor absoluto $|\nu_1|$ es accesible y proporciona una autofunción $\varphi_1(r)$ de número característico ν_1. Para determinar las demás autofunciones, veamos la sencilla relación que debe unirlas.

d) *Ortogonalidad de autofunciones.* — Cualesquiera que sean los signos de dos autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2$ o de sus recíprocos $\nu_1 \neq \nu_2$ (números característicos), como sus correspondientes autofunciones satisfacen por definición las identidades

$$\nu_1\varphi_1(r) = \int k(r,s)\,\varphi_1(s)ds \quad , \quad \nu_2\varphi_2(r) = \int k(r,s)\,\varphi_2(s)ds \quad ,$$

multiplicando respectivamente por $\varphi_2(r)$, $\varphi_1(r)$ y restando, resulta:

$$(\nu_1 - \nu_2)\varphi_1(r)\,\varphi_2(r) = \int k(r,s)\,\varphi_1(s)\,\varphi_2(r)ds - \int k(r,s)\,\varphi_2(s)\,\varphi_1(r)ds \quad ;$$

integrando respecto de r los dos miembros, resultan en el segundo dos integrales dobles cuyos integrandos toman valores iguales en puntos simétricos (r,s), (s,r) respecto de la recta $r = s$, por ser $k(r,s) \equiv k(s,r)$; y como el cuadrado en que ambas están definidas es simétrico respecto de esta recta, ambas integrales son iguales, luego:

$$(\nu_1 - \nu_2)(\varphi_1 . \varphi_2) = 0 \quad , \qquad \text{de donde } (\varphi_1 . \varphi_2) = 0 \quad .$$

Más general:

TEOREMA 4. — *Las autofunciones correspondientes a autovalores distintos de un núcleo simétrico sobre un campo simétrico de integración forman un sistema ortogonal; y si están normalizadas por la condición* $|\varphi_i|^2 = 1$, *el sistema es ortonormal.*

Si φ fuera autofunción de número característico *imaginario* ν, será también autofunción correspondiente al conjugado $\overline{\nu}$ la conjugada $\overline{\varphi}$, pues siendo $k(r,s)$ real, la igualdad [Ap. II-63] también se verifica para los valores conjugados $\overline{\varphi}$ y $\overline{\nu}$; pero la ortogonalidad:

$$\int \varphi\,\overline{\varphi}\,dr = \int |\varphi|^2 dr = 0$$

está en contradicción con el valor 1 de esta integral (cfr. § 63-5). Por tanto:

TEOREMA 5. — *Todos los autovalores de núcleo real simétrico son reales, pudiendo tomarse reales las correspondientes autofunciones.*

e) Autovalores múltiples. — Cabe que a un autovalor λ correspondan dos autofunciones φ_1, φ_2 linealmente independientes (§ 68-4), es decir:

$$\varphi_1(r) = \lambda \int k(r,s)\, \varphi_1(s)\, ds \quad , \quad \varphi_2(r) = \lambda \int k(r,s)\, \varphi_2(s)\, ds \quad .$$

Sumando estas igualdades, multiplicadas por constantes c_1 y c_2, resulta:

$$c_1\varphi_1(r) + c_2\varphi_2(r) = \lambda \int k(r,s) [c_1\varphi_1(s) + c_2\varphi_2(s)] ds \quad ,$$

es decir, todas las funciones $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ son autofunciones correspondientes o (como también diremos) *homólogas* de λ; y si no hay más diremos que λ es autovalor *doble* y, en general, se dirá *n-ple* si le corresponden n autofunciones linealmente independientes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, y por tanto, todas las del espacio n-dimensional $c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$. Como funciones correspondientes al autovalor λ elegiremos en esta familia n ortogonales *entre sí* (§ 97-4) para ubicarlas en la sucesión que vamos a formar, y en esta sucesión o *espectro* de autovalores, escribiremos cada uno tantas veces como indique su orden de multiplicidad, el cual, como pronto veremos (teor. 6), es *finito.*

f) Formación y distribución del espectro de un núcleo simétrico. — Establecida la ortogonalidad de las autofunciones, nada más fácil que determinarlas todas, por método inductivo, a partir de la ya obtenida como homóloga del número característico ν_1, extremo de J.

Para ello, restrinjamos la variabilidad de las φ con la nueva condición $(\varphi \cdot \varphi_1) = 0$, y suponiendo J *definida positiva,* en el campo así reducido alcanzará J un máximo $\nu_2 > 0$; pero siendo $\nu_2 \leqslant \nu_1$ (pues ν_1 era el máximo en campo más amplio), resulta el segundo autovalor $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$. Consideremos ahora las funciones φ ortogonales a φ_1 y φ_2, y sea ν_3 el máximo de J en ellas, siendo, por tanto, $\nu_3 \leqslant \nu_2$; y así puede proseguirse, obteniendo la sucesión de autovalores: $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$ Observemos que el método equivale en E_3 a restringir la superficie esférica de direcciones a la circunferencia ecuatorial, y después a los extremos de un diámetro; en E_n equivale a que la esfera $|\varphi|^2 = 1$ vaya reduciéndose hasta llegar a la dimensión ... 2, 1, 0. En nuestro caso, si el núcleo no es disociado, el proceso es infinito (Ap. II-4, *a*, teor. 2).

Si J es *definida negativa* resultará, por simple cambio de signo de J, o por obtención de mínimos en vez de máximos, una sucesión de autovalores $0 > \lambda_{-1} \geqslant \lambda_{-2} \geqslant \lambda_{-3} \geqslant \ldots$.

Si J es *indefinida* resultará una sucesión ordenada por valores absolutos decrecientes de los números característicos $|\nu_1| \geqslant |\nu_2| \geqslant |\nu_3| \geqslant \ldots$, o creciente de los autovalores $0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| \leqslant \ldots$. De ellos, acaso haya sólo un número finito de determinado signo, pero luego veremos (Ap. II-4, *a*, teor. 2) que no pueden ser finitas las de uno y otro signo si el núcleo no es disociado.

Puesto que las autofunciones $\varphi_n(s)$ del núcleo $k(r,s)$ son ortonormales en (0; 1), parece natural aplicar la desigualdad de BESSEL (§ 97-2 a_1) a este núcleo como función de s, siendo sus componentes, o sea, sus c.F. (funciones de r):

$$c_n = \int k(r,s)\varphi_n(s)\, ds \quad ; \quad \sum c_n^2 \leqslant \int [k(r,s)]^2 ds \quad ;$$

pero si ν_n es el número característico de φ_n, esta integral que expresa c_n, según [Ap. II-63] coincide con $\nu_n\varphi_n(r)$, luego:

[Ap. II-72] $\quad \sum \nu_n^2 [\varphi_n(r)]^2 \leqslant \int [k(r,s)]^2 ds \quad , \quad (n = 1, 2, \ldots, m) \quad ,$

e integrando respecto de r en el intervalo (0; 1):

$$\sum \nu_n^2 \leqslant ||k(r,s)|| \quad , \quad (n = 1, 2, \ldots, m) \quad ,$$

acotación válida para todo m, lo que no podría ocurrir, si al crecer m indefinidamente, tuviese la serie resultante del primer miembro un número infinito de términos iguales, de donde obtenemos:

TEOREMA 6. — *El orden de multiplicidad de cada* ν_n *(o del autovalor* λ_n*) es finito*; pero al variar n, ese orden puede llegar a superar cualquier número.

Corolarios inmediatos son también:

TEOREMA 7. — *Es finito el número de* ν_m *superiores, en valor absoluto, a una cota prefijada, es decir, excluído un entorno del origen, sólo hay un número finito. Por tanto, es finito el número de autovalores en intervalo finito.*

TEOREMA 8. — *Si el núcleo tiene infinitos autovalores* (tal sucede si no es disociado, como pronto veremos, Ap. II-4, *a*, teor. 2) *converge la suma de cuadrados de sus recíprocos (números característicos) y es:*

[Ap. II-73] $$\sum_{n=0}^{\infty}\nu_n^2 \leqslant ||\mathrm{k}(r,s)|| \quad , \quad \lim_n|\nu_n| = 0 \quad , \quad \lim_n|\lambda_n| = \infty \quad .$$

Como la condición [Ap. II-68] es *necesaria* pero *no suficiente* para extremar la forma J, cabe pensar que haya autofunciones no extremantes, omitidas, por tanto, en el proceso extremal inductivo antes explicado, y aun cabe suponer que no sea numerable el conjunto de autofunciones, o que aun siéndolo no haya quedado agotado por la sucesión φ_n. Los tres temores se desvanecen por el absurdo, suponiendo otra autofunción φ_0 de número característico ν_0 la cual será, según (*d*), ortogonal a todas las φ_n. Supongamos, pues, una función continua normalizada φ_0 ortogonal a las φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ y sea $\mathrm{J}(\varphi_0) = \nu_0$, tal como hemos visto en [Ap. II-70']. Como ν_1 es el máximo en valor absoluto de *todos* los valores $\mathrm{J}(\varphi)$ sobre la esfera $|\varphi|^2 = 1$ es $|\nu_0| \leqslant |\nu_1|$; pero siendo φ_0 ortogonal a φ_1 está en el espacio reducido que todas las ortogonales a φ_1 forman (cfr. Ap. I, *h*, teor. 13), y por tanto, $|\nu_0| \leqslant |\nu_2|$, etc. En virtud de [Ap. II-73] el número $|\nu_0| \leqslant$ $\leqslant |\nu_n|$ debería ser nulo, contrariamente a su significado $\nu_0 = 1/\lambda_0$; si el núcleo es disociado, existe ya un número finito de números característicos (Ap. II-4, *a*, nota), que pueden obtenerse por el método extremal antes explicado. En definitiva:

TEOREMA 9. — *La sucesión* λ_n *formada por el método extremal inductivo antes explicado, es el espectro de todos los autovalores del núcleo.*

Así, el conjunto de autovalores es esencialmente *discreto*; pero si el campo de integración es infinito puede resultar *continuo* y cesar la ortogonalidad demostrada en (*d*) (cfr. Ap. II-5, *f*).

4. **Desarrollos en serie de los núcleos simétricos y de sus emanantes.** — *a*) *Núcleos desarrollables bilinealmente.* — Si para cada valor de r el núcleo es desarrollable en serie *uniformemente convergente* de funciones ortonormales $\beta_n(s)$:

[Ap. II-74] $$\mathrm{k}(r,s) = \mathrm{k}_1\beta_1(s) + \mathrm{k}_2\beta_2(s) + \ldots ,$$

los coeficientes k_n, funciones de r, están determinados por las clásicas fórmulas de EULER (§ 97-1, def. 2):

$$\mathrm{k}_n(r) = \int \mathrm{k}(r,s)\beta_n(s)ds \quad ,$$

aquí sencillamente obtenidas al multiplicar ambos miembros de [Ap. II-74] por $\beta_n(s)$ e integrar respecto de s, en el segundo miembro término a término (§ 85-1, teor. 1).

En particular, si las $\beta_n(r)$ son las autofunciones $\varphi_n(r)$ del núcleo $\mathrm{k}(r,s)$, es por definición:

[Ap. II-75] $$\int \mathrm{k}(r,s)\varphi_n(s)\,ds = \nu_n\varphi_n(r) \quad ,$$

luego:

$$\mathrm{k}_n(r) = \nu_n\varphi_n(r) \quad ,$$

y ahora el desarrollo supuesto en [Ap. II-74] es *bilineal*, del tipo:

[Ap. II-76] $\qquad \mathrm{k}(r,s) = \nu_1\varphi_1(r)\,\varphi_1(s) + \nu_2\varphi_2(r)\,\varphi_2(s) + \dots$.

Bastará, pues, estudiar los núcleos de tipo bilineal [Ap. II-76] según las autofunciones, con coeficientes que son los números característicos para agotar todos los posibles desarrollos en *serie uniformemente convergente de autofunciones.*

Recíprocamente, si $\mathrm{k}(r,s)$ admite desarrollo bilineal uniformemente convergente:

[Ap. II-76'] $\qquad \mathrm{k}(r,s) = \sum c_n\,\alpha_n(r)\,\alpha_n(s)$

de coeficientes c_n cualesquiera y funciones *ortonormales* $\alpha_n(s)$ cualesquiera, los c.F. son $\mathrm{k}_n(r) = c_n\alpha_n(r)$, es decir, aplicando al primer miembro de [Ap. II-75], la [Ap. II-76'] con α_n en lugar de φ_n, al integrar término a término, resultará como segundo miembro $c_n\alpha_n(r)$, expresando que $\alpha_n(r)$ es *autofunción* del núcleo y c_n el correspondiente número característico. Y así se obtienen *todas* las autofunciones y *todos* los números característicos, pues si $\alpha_0(r)$, normalizada, es ortogonal a todas las $\alpha_n(r)$, aplicando [Ap. II-76'] será

$$\int \mathrm{k}(r,s)\,\alpha_0(s)\,ds = 0,$$

y por tanto, el primer miembro no valdrá $\nu_0\alpha_0(r)$ para $\nu_0 \neq 0$; es decir, $\alpha_0(r)$ no es autofunción. De aquí:

TEOREMA 1. — *Si el núcleo* $\mathrm{k}(r,s)$ *admite desarrollo bilineal* [Ap. II-76] *uniformemente convergente respecto de una variable, siendo ortonormales las funciones* $\varphi_n(r)$, *éstas son precisamente las autofunciones del núcleo y los coeficientes son los números característicos.*

COROLARIO. — Si la serie [Ap. II-76] se reduce a un polinomio de n términos, es decir, si el núcleo es *disociado*:

$$\mathrm{k}(r,s) = \sum_1^m c_n\,\alpha_n(r)\,\beta_n(s) \quad ,$$

y si además las β_n son las mismas funciones α_n formando sistema *ortogonal*, éstas son las autofunciones del núcleo y los coeficientes son sus números característicos.

NOTA 1. — Este corolario del teor. 1 resulta directamente reduciendo como se hizo en [Ap. II-8], la ecuación:

$$\nu\varphi(r) = \int \mathrm{k}(r,s)\,\varphi(s)\,ds$$

al sistema:

$$\nu X_i = \sum_j c_j k_{ij} X_j \quad \text{con} \quad k_{ij} = \int \beta_i \alpha_j\,dr \quad ; \quad X_j = \int \beta_j \varphi\,ds$$

pues siendo las β_i las mismas funciones α_i en un sistema ortonormal, es

$$k_{ij} = \begin{cases} = 0 & \text{si } i \neq j \;, \\ = 1 & \text{si } i = j \;, \end{cases}$$

y resultarán como valores ν los coeficientes $c_1, c_2, \dots, c_m$.

Obsérvese que la mencionada reducción a sistema algebraico lineal demuestra que aun suponiendo el núcleo solamente disociado, éste admite una representación bilineal simétrica, subsistiendo así para núcleo disociado las conclusiones que probamos para dicha representación.

EJEMPLO 8. El núcleo disociado $\mathrm{k}(r,s) = r + s$ admite la representación bilineal simétrica $\mathrm{k}(r,s) = c_1\alpha_1(r)\,\alpha_1(s) + c_2\alpha_2(r)\,\alpha_2(s)$, con

$$\alpha_1(r) = (1 + \sqrt{3}\,r)/\sqrt{2+\sqrt{3}},\; c_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}+2)/\sqrt{3};$$

$$\alpha_2(r) = (1 - \sqrt{3}\,r)/\sqrt{2-\sqrt{3}},\; c_2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-2)/\sqrt{3}.$$

Aplicación importante del mismo corolario es ver que un núcleo no disociado no puede tener un número finito de autovalores.

En efecto, supongamos que $k(r, s)$ tenga solamente m autovalores, o sea, m números característicos ν_i y formemos con ellos el núcleo disociado:

$$k_0(r, s) = \nu_1\varphi_1(r)\varphi_1(s) + \dots + \nu_m\varphi_m(r)\varphi_m(s) \quad .$$

De la definición de autovalor y autofunciones mediante [Ap. II-75], resulta que una autofunción de dos núcleos lo es de su suma y diferencia, y el número característico es suma o diferencia de los respectivos números característicos. Resulta, pues, que el núcleo $k_1(r, s) = k(r, s) - k_0(r, s)$ es idénticamente nulo, ya que el máximo y el mínimo de la forma cuadrática:

$$\int\int k_1(r, s)\varphi(r)\varphi(s)\,dr ds$$

son $\nu_1 - \nu_1 = 0$, $\nu_m - \nu_m = 0$; luego $k(r, s) \equiv k_0(r, s)$. Es decir:

TEOREMA 2. — *Condición necesaria y suficiente para que un núcleo tenga un número finito m de autovalores, es que sea disociado, es decir, bilineal respecto de sus m autofunciones, con m coeficientes que son sus números característicos.*

b) Funciones emanantes de un núcleo. — Si $f(r)$ es emanante de $k(r, s)$, es decir (Cap. XXVIII nota IX, *c*) transformada de la función continua $g(s)$ por el operador $k(s, r)$, o sea:

[Ap. II-77] $$f(r) = \int k(r, s)g(s)\,ds$$

y designamos por g_n los c.F. de $g(r)$ respecto del sistema ortonormal $\{\varphi_n\}$ de autofunciones (§ 97-1 def. 2), los c.F. de $f(r)$ se deducen muy sencillamente así:

$$f_n = \int f(r)\varphi_n(r)\,dr = \int\varphi_n(r)\,dr\int k(r, s)g(s)\,ds \quad .$$

Como es legítima la permutación de integraciones por la supuesta continuidad (§ 86-2, teor. 2), resulta:

$$f_n = \int g(s)\,ds\int k(r, s)\varphi_n(r)\,dr \quad ,$$

pero esta última integral, transformada de φ_n, es precisamente $\nu_n\varphi_n(s)$, por definición [Ap. II-75] de autofunción; luego:

[Ap. II-78] $$f_n = \nu_n\int g(s)\varphi_n(s)\,ds = \nu_n g_n \quad ,$$

de donde:

TEOREMA 3. — *Los* c.F. *respecto de las autofunciones del núcleo* $k(r, s)$ *de la función emanante, o transformada de* $g(s)$ *por este núcleo, son los* c.F. *de* $g(s)$, *multiplicados por los respectivos números característicos.*

Inmediatamente ocurre preguntarse: 1º) Si se verificará el desarrollo cuadrático (§ 97-3, def. 2):

[Ap. II-79] $$f(r) \overset{2}{=} \nu_1 g_1\varphi_1(r) + \nu_2 g_2\varphi_2(r) + \dots \quad ;$$

2º) ¿Podrá omitirse el índice 2, resultando la más estricta convergencia puntual? Así resulta, en efecto, de la hipótesis [Ap. II-76] (que no se verifica para todo núcleo) pues siendo:

$$f(r) = \int k(r, s)g(s)\,ds \qquad k(r, s) = \sum\nu_n\varphi_n(r)\varphi_n(s) \quad ,$$

con serie uniformemente convergente, es legítima la integración término a término (§ 85-1, teor. 1) para r fijo y $0 \leqslant s \leqslant 1$; es decir:

$$f(r) = \sum\nu_n\varphi_n(r)\int g(s)\varphi_n(s)\,ds \quad ,$$

y llamando g_n a estas integrales (c.F. de $g(s)$ respecto del sistema ortonormal $\{\varphi_n\}$), resulta el desarrollo:

[Ap. II-80] $$f(r) = \sum\nu_n g_n\varphi_n(r) \quad , \quad g_n = (g \cdot \varphi_n) \quad .$$

Mediante el método de SCHMIDT vamos a ver (teor. 5) que este des-

arrollo es válido sin exigir la restricción de suponer el núcleo desarrollable bilinealmente, y además probaremos (teor. 6) el desarrollo bilineal, menos exigente (§ 97-6, c_1), en media cuadrática de dicho núcleo.

c) Resolución de la ecuación integral general de segunda especie de núcleo simétrico. — Si damos a λ cualquier valor numérico distinto de los autovalores λ_n, carece de solución la ecuación homogénea; pero en cambio admite *solución única continua* (Ap. II-2, *d*), como vamos a volver a probar y hallar, la no homogénea:

[Ap. II-81] $$x(r) - \lambda \int k(r,s)x(s)ds = h(r) \quad .$$

Comenzando por la unicidad, si $x(r)$ es solución de [Ap. II-81], es decir, si $x(r) - h(r)$ es su transformada por el núcleo $\lambda k(r,s)$, y llamamos c_n a sus c.F. y h_n a los de $h(r)$, los de $x(r)$ serán $c_n + h_n$; y por teor. 3 debe ser:

$$c_n = \lambda(c_n + h_n)\nu_n \quad , \quad c_n = \frac{\lambda h_n \nu_n}{1 - \lambda\nu_n} = \frac{\lambda h_n}{\lambda_n - \lambda} \quad .$$

La única solución continua posible es, por tanto,

[Ap. II-82] $$x(r) = h(r) + \sum c_n \varphi_n(r) \quad , \quad \left[c_n = \frac{\lambda h_n}{\lambda_n - \lambda} \right] \quad ,$$

pero, ¿convergerá esta serie?; y si converge, ¿será solución?

La convergencia absoluta y uniforme resulta observando que para $n \to \infty$ es (Ap. II-3, teor. 8):

$$\frac{\lambda_n - \lambda}{\lambda_n} \to 1 \quad , \quad \text{y por tanto:} \quad \frac{1}{|\lambda_n - \lambda|} < \frac{2}{|\lambda_n|} \quad , \quad (n > n_0) \quad ,$$

luego es mayorante la serie:

$$2|\lambda|\sum|\nu_n| \cdot |h_n| \cdot |\varphi_n(r)| \quad ,$$

cuya convergencia uniforme será demostrada en [Ap. II-88]. Si se sustituye la serie [Ap. II-82] en la ecuación integral. la satisface, pues por definición de φ_n se cumple [Ap. II-73] y por el teor. 3 y la convergencia de la última serie, es:

$$\int k(r,s)h(s)ds = \sum \frac{h_n\varphi_n(r)}{\lambda_n} \quad ,$$

de donde:

$$\lambda\int k(r,s)x(s)ds = \lambda\int k(r,s)\left[h(s) + \sum \frac{\lambda h_n}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n(s)\right]ds =$$

$$= \lambda\sum\frac{h_n\varphi_n(r)}{\lambda_n} + \lambda\sum\frac{\lambda h_n\varphi_n(r)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)} = \sum c_n\varphi_n(r) = x(r) - h(r) \quad .$$

Así queda demostrada la existencia de ***solución única continua***, con la fórmula [Ap. II-82] para calcularla.

La solución [Ap. II-82] puede escribirse en forma explícita, sustituyendo las expresiones de

$$c_n = \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda}\int h(s)\varphi_n(s)ds,$$

dando:

[Ap. II-83] $$x(r) = h(r) + \lambda\int\left[\frac{\varphi_1(r)\varphi_1(s)}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\varphi_2(r)\varphi_2(s)}{\lambda_2 - \lambda} + \dots\right]h(s)ds$$

o sintéticamente, adopta esta forma correlativa o dual de la ecuación [Ap. II-81]:

$$x(r) = h(r) + \lambda\int K(r,s,\lambda)h(s)ds \quad ,$$

donde este núcleo K, llamado *resolvente* de la ecuación o *recíproco* del $k(r, s)$, es:

$$[\text{Ap. II-84}] \qquad K(r,s,\lambda) = \frac{\varphi_1(r)\,\varphi_1(s)}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\varphi_2(r)\,\varphi_2(s)}{\lambda_2 - \lambda} + \dots \quad .$$

Esta es la descomposición en fracciones simples del "núcleo de FREDHOLM" vista en Ap. II-2, *d.*

d) *Método de* SCHMIDT *y desarrollos en serie.* — Está calcado en el seguido para la descomposición de una forma cuadrática algebraica en suma de cuadrados, o sea, la reducción a forma canónica (§ 63-7). En efecto, obtenida la autofunción φ_1 con número característico ν_1, para el nuevo núcleo simétrico

$$k_1(r,s) = k(r,s) - \nu_1\varphi_1(r)\varphi_1(s) \quad ,$$

la forma cuadrática de coeficiente $k_1(r, s)$ toma el valor:

$$J_1 = J - \nu_1 \int\int \varphi(r)\varphi(s)\varphi_1(r)\varphi_1(s)\,dr\,ds = J - \nu_1 A_1^2 \quad ;$$
$$(A_1 = \int \varphi(r)\varphi_1(r)\,dr) \quad ,$$

y obtenido para $k_1(r, s)$, supuesto no idénticamente nulo, el número característico máximo ν_2, con su correspondiente autofunción φ_2, pondremos:

$$k_2(r,s) = k_1(r,s) - \nu_2\varphi_2(r)\varphi_2(s) \quad ; \quad J_2 = J_1 - \nu_2 A_2^2 \quad .$$

Sin embargo, hemos de probar que también ν_2 es número característico y φ_2 es autofunción del núcleo primitivo $k(r, s)$. En efecto, por hipótesis:

$$[\text{Ap. II-85}] \qquad \nu_2\varphi_2(r) = \int k_1(r,s)\varphi_2(s)\,ds = \int k(r,s)\varphi_2(s)\,ds - $$
$$- \nu_1\varphi_1(r)\int \varphi_1(s)\varphi_2(s)\,ds \quad .$$

Multiplicando por $\varphi_1(r)$ e integrando, resulta (pues φ_1 está normalizada):

$$\nu_2\int \varphi_1(r)\varphi_2(r)\,dr = \int\int k(r,s)\varphi_1(r)\varphi_2(s)\,dr\,ds - \nu_1\int \varphi_1(s)\varphi_2(s)\,ds =$$
$$= \int \varphi_2(s)\left[\int k(r,s)\varphi_1(r)\,dr - \nu_1\varphi_1(s)\right]ds \quad ,$$

donde el último corchete es nulo por ser ν_1 número característico y φ_1 autofunción del núcleo $k(r, s)$ y por tanto φ_1 y φ_2 son ortogonales. Esto anula el último término de [Ap. II-75] y ésta misma prueba entonces que ν_2 es número característico y φ_2 autofunción del núcleo $k(r, s)$. De la misma manera demostraríamos que si $k_2(r, s)$ no es idénticamente nulo, su existente (Ap. II-3, *c*) número característico ν_3 y autofunción φ_3 lo son también del núcleo $k_1(r, s)$ y por tanto del primitivo $k(r, s)$.

Para ver si el núcleo $k(r, s)$ es desarrollable en serie bilineal, formemos la diferencia:

$$[\text{Ap. II-86}] \quad k_n(r,s) = k(r,s) - [\nu_1\varphi_1(r)\varphi_1(s) + \dots + \nu_n\varphi_n(r)\varphi_n(s)]$$

y con este núcleo construyamos la siguiente forma bilineal para cualquier par de funciones normalizadas $\alpha(r)$, $\beta(r)$:

$$I_n(\alpha,\beta) = \int\int k_n(r,s)\alpha(r)\beta(s)\,dr\,ds \quad ,$$

en particular:

$$I_n(\alpha,\alpha) = J_n(\alpha) \quad .$$

De la identidad:

$$I_n(\alpha+\beta;\alpha+\beta) = I_n(\alpha,\alpha) + 2I_n(\alpha,\beta) + I_n(\beta,\beta) \quad ,$$

resulta:

$$J_n(\alpha+\beta) = J_n(\alpha) + 2I_n(\alpha+\beta) + J_n(\beta) \quad ,$$

y por ser $|\nu_{n+1}|$ el valor máximo de $|J_n|$ (Ap. II-3, *f*), resultan las acotaciones:

$$|J_n(\alpha)| \leqslant |\nu_{n+1}| \quad , \quad |J_n(\beta)| \leqslant |\nu_{n+1}| \quad , \quad |J_n(\alpha+\beta)| \leqslant |\nu_{n+1}| \quad .$$

Por consiguiente, el sumando restante es:

$$|I_n(\alpha,\beta)| < 2\,|\nu_{n+1}| \quad ;$$

y como estos números tienden a cero (Ap. II-3, teor. 8), resulta este lema que pronto utilizaremos:

TEOREMA 4. — *Para* $n \to \infty$, *la forma integral bilineal* $I_n(\alpha,\beta)$ *de núcleo* $k_n(r,s)$ *dado por* [Ap. II-86] *y funciones normalizadas cualesquiera* $\alpha(r)$, $\beta(r)$ *tiende a cero.* Lo mismo sucede si $\alpha_n(r)$, $\beta_n(r)$ dependen de n, pero sus normas están *acotadas.*

Prescindiendo de la hipótesis [Ap. II-76], he aquí la demostración rigurosa del importante desarrollo en serie [Ap. II-80] de las funciones emanantes del núcleo $k(r,s)$, es decir, del tipo:

$$f(r) = \int k(r,s)\,g(s)\,ds \quad .$$

Si g_n son los c.F. de $g(r)$ respecto de las autofunciones de $k(r,s)$, los c.F. de la transformada $f(r)$, según teor. 3, son $f_n = \nu_n g_n$, y para estudiar la convergencia de la s.F. de:

$$f(r) \sim \sum f_n\varphi_n(r) = \sum \nu_n g_n \varphi_n(r) \quad ,$$

acotemos su resto mediante la desigualdad [96-4] de CAUCHY-SCHWARZ:

[Ap. II-87] $$[\nu_p g_p \varphi_p(r) + \ldots + \nu_q g_q \varphi_q(r)]^2 \leqslant$$
$$\leqslant (g_p^2 + \ldots + g_q^2)\{\nu_p^2[\varphi_p(r)]^2 + \ldots + \nu_q^2[\varphi_q(r)]^2\}.$$

Como converge $\sum g_i^2$ (desigualdad de BESSEL, § 97-2, a_1), desde un p, es:

$$g_p^2 + \ldots + g_q^2 < \varepsilon \quad ;$$

y si M es la cota de $|k(r,s)|$, por la convergencia de la serie [Ap. II-72] con suma $\leqslant M^2$ para todo r, también tiene esta cota el último paréntesis de [Ap. II-87]; luego converge uniformemente para todo r la serie:

[Ap. II-88] $$\nu_1 g_1 \varphi_1(r) + \nu_2 g_2 \varphi_2(r) + \ldots = \gamma(r) \quad ,$$

y su suma $\gamma(r)$ es continua. Para ver que esa suma es precisamente la función dada $f(r)$, escribiremos las sumas parciales en forma de integral:

$$\gamma_n(r) = \int\left[\sum_{i=1}^{n}\nu_i\varphi_i(r)\,\varphi_i(s)\right]g(s)\,ds \quad ,$$

mientras:

$$f(r) = \int k(r,s)\,g(s)\,ds \quad ,$$

y para aplicar el teor. 4 construiremos la forma bilineal mediante una función α_n de norma acotada:

$$\int \alpha_n(r)\,[f(r) - \gamma_n(r)]\,dr = \int \alpha_n(r)\,dr \int k_n(r,s)\,g(s)\,ds =$$
$$= \int\int k_n(r,s)\,\alpha_n(r)\,g(s)\,dr\,ds \quad ,$$

forma bilineal $I_n(\alpha_n, g)$ que tiende a 0 para $n \to \infty$. En particular, elegida $\alpha_n(r) = f(r) - \gamma_n(r)$, cuya norma es $\|\alpha_n\| \leqslant \|f\|$, entonces por el teor. 4 y [86-1] es:

$$\lim \int [f(r) - \gamma_n(r)]^2 dr = \int [f(r) - \gamma(r)]^2 dr = 0 \quad ,$$

y por la continuidad de f y γ debe ser $\gamma(r) \equiv f(r)$, quedando así demostrado el desarrollo [Ap. II-88] de $f(r)$. Es decir:

TEOREMA 5. — *Toda función emanante del núcleo simétrico continuo* $k(r,s)$, *transformada de una función continua* $g(r)$, *admite este desarrollo uniformemente convergente en serie de* FOURIER, *según las autofunciones del núcleo:*

[Ap. II-89] $$f(r) = \sum \nu_n g_n \varphi_n(r) \quad , \quad g_n = \int g(r)\,\varphi_n(r)\,dr \quad .$$

¿Será legítimo pasar de [Ap. II-86] al desarrollo en serie de $k(r,s)$?

No con convergencia puntual, pero sí cuadrática. Para ello, formemos el núcleo iterado $k^2(r, t)$ aplicándole el desarrollo [Ap. II-89] como función emanante de $k(r, s)$, es decir, llamando:

$$k_n(t) = \int k(r, t)\varphi_n(r)\,dr \quad ,$$

será:

$$\text{[Ap. II-90]} \qquad k^2(r, t) = \int k(r, s)k(s, t)\,ds = \sum \nu_n k_n(t)\varphi_n(r) \quad ,$$

y como por definición de ν_n y simetría de $k(r, s)$ es:

$$k_n(r) = \int k(s, r)\varphi_n(s)\,ds = \nu_n\varphi_n(r) \quad ,$$
$$k^2(r, r) = \sum \nu_n^2[\varphi_n(r)]^2 \quad ,$$

tendremos:

$$k^2(r, r) - \{\nu_1^2[\varphi_1(r)]^2 + \ldots + \nu_n^2[\varphi_n(r)]^2\} \to 0 \text{ para } n \to \infty \quad ;$$

y poniendo $k^2(r, r)$ en su forma integral, esta diferencia se puede escribir así:

$$\int [k(r, s)]^2 ds - 2\sum \nu_i^2[\varphi_i(r)]^2 + \sum \nu_i^2[\varphi_i(r)]^2 \to 0 \quad ,$$

que es el desarrollo de:

$$\int [k(r, s) - \sum \nu_i\varphi_i(r)\varphi_i(s)]^2 ds \to 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ con } n \to \infty \quad ,$$

como se comprueba desarrollando el cuadrado y simplificando; importante resultado que enunciaremos así (§ 97-3):

TEOREMA 6. — *Todo núcleo continuo y simétrico es desarrollable cuadráticamente en serie bilineal de sus autofunciones:*

$$\text{[Ap. II-91]} \qquad k(r, s) \overset{2}{=} \sum \nu_i\varphi_i(r)\varphi_i(s) \quad ,$$

Fácilmente se deduce de [Ap. II-90], al ser

$$k_n(t) = \int k(r, t)\varphi_n(r)\,dr = \nu_n\varphi_n(t)$$

que

$$k^2(r, t) = \sum \nu_n^2\varphi_n(r)\varphi_n(t) \quad ,$$

y reiterando el procedimiento, resulta el hecho sorprendente:

TEOREMA 7. — *Los núcleos iterados admiten el siguiente desarrollo en serie absoluta y uniformemente convergente respecto de ambas variables:*

$$\text{[Ap. II-92]} \qquad k^m(r, s) = \sum \nu_i^m\varphi_i(r)\varphi_i(s) \quad , \quad (m \geqslant 2) \quad ,$$

y sin embargo para $m = 1$, debemos conformarnos con el desarrollo cuadrático [Ap. II-91]. ¿Qué condiciones deben imponerse al núcleo para que sea válido el desarrollo [Ap. II-91], pero con convergencia absoluta y uniforme? La contestación la da el importante teorema de MERCER (1909):

TEOREMA 8. — *Basta que el núcleo* $k(r, s)$ *sea continuo y definido (es decir, de autovalores de signo constante) o que a lo sumo tenga un número finito de autovalores de uno de ambos signos, para que entonces sea válido el desarrollo* [Ap. II-76] *en serie absoluta y uniformemente convergente respecto de ambas variables.*

En efecto, si el núcleo $k(r, s)$ es definido positivo, entonces la forma cuadrática correspondiente $J(\varphi)$ es definida positiva (Ap. II-3, f), de donde se deduce que $k(r, r) \geqslant 0$, pues si para algún r_0 fuese $k(r_0, r_0) < 0$, sería fácil construir una $\varphi(r)$ para la que fuera $J(\varphi) < 0$, contra lo supuesto. Si se aplica esto al núcleo definido positivo $k_n(r, s)$ (y por ello podemos admitir un número *finito* de autovalores negativos para $k(r, s)$), será

$$k_n(r, r) = k(r, r) - \sum \nu_i[\varphi_i(r)]^2 \geqslant 0 \quad ,$$

que prueba la convergencia de la serie $\sum \nu_i[\varphi_i(r)]^2$, y por la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ:

$$(\sum \sqrt{\nu_i}\varphi_i(r)\sqrt{\nu_i}\varphi_i(s))^2 \leqslant (\sum \nu_i[\varphi_i(r)]^2)(\sum \nu_i[\varphi_i(s)]^2) \quad ,$$

queda también probada la convergencia de la serie $\sum \nu_i \varphi_i(r)\, \varphi_i(s)$, absoluta y uniformemente en r y s, representando una función que por [Ap. II-91] debe ser la $k(r,s)$.

5. Ecuaciones integrales de primera especie. Ecuaciones singulares. — *a) Propiedades generales.* — Cuando la función incógnita no figura fuera del signo integral, la ecuación de primera especie:

[Ap. II-93] $$\int k(r,s)x(s)\,ds = h(r)$$

plantea el problema inverso al estudiado en Ap. II-4, *b*, es decir, conocida la *emanante* $h(r)$ calcular la *generatriz* $x(s)$. Pero hemos visto que si $k(r,s)$ es continuo, resulta $h(r)$ continua, aunque $x(s)$ no sea continua (§ 86-2, teor. 1[b]); y por la regla de derivación bajo el signo integral (§ 86-2, nota 4) resulta $h(r)$ derivable si $k(r,s)$ lo es; y si r es compleja, resulta $h(r)$ analítica (§ 115-9, nota 3), a pesar de que $x(s)$ sea discontinua, definida en intervalo real. La familia de emanantes es, pues, mucho más restringida que la de generatrices, hecho nada sorprendente, pues en el algoritmo correlativo de las series funcionales $\sum c_n k_n(r)$ poco interesan las singularidades de la sucesión de coeficientes numéricos y mucho, en cambio, la naturaleza de las funciones $k_n(r)$.

Muchos y muy importantes son los resultados obtenidos en los tipos especiales siguientes: LAPLACE, FOURIER, STIELTJES, HILBERT, y algo diremos de ellos; históricamente importante es la ecuación integral de ABEL (*c*) una de las primeramente estudiadas. En cuanto al problema general [Ap. II-93] los resultados más salientes obtenidos hasta ahora son éstos:

a_1) Si el núcleo es simétrico y λ_n, φ_n, sus autovalores y autofunciones, toda serie:

$$x(s) = \sum \lambda_n h_n \varphi_n(s) \quad , \quad \text{con } h_n = \int h(r)\varphi_n(r)\,dr \quad ,$$

es la solución de [Ap. II-93], como se comprueba sustituyendo, *cuando sea uniformemente convergente.* Es obvio que los h_n (c.F. de $h(r)$) deben decrecer muy rápidamente para que haya convergencia, pues $\lambda_n \to \infty$ (Ap. II-3, teor. 8).

a_2) Si el núcleo no es simétrico, se forman (según E. SCHMIDT) *núcleos simétricos adjuntos*:

$$k'(r,s) = \int k(r,t)k(s,t)\,dt \quad ; \quad k''(r,s) = \int k(t,r)k(t,s)\,dt \quad ;$$

y se prueba la existencia de valores λ_n y funciones $\varphi_n(r)$, $\Psi_n(r)$ tales que:

$$\varphi_n(r) = \lambda_n \int k(r,s)\Psi_n(s)\,ds \quad , \quad \Psi_n(r) = \lambda_n \int k(s,r)\varphi_n(s)\,ds \quad ,$$
$$\varphi_n(r) = \lambda_n^2 \int k'(r,s)\varphi_n(s)\,ds \quad , \quad \Psi_n(r) = \lambda_n^2 \int k''(r,s)\Psi_n(s)\,ds \quad ,$$

llegándose a este resultado importante:

TEOREMA DE SCHMIDT (1907): *Toda función* $\int k(r,s)g(s)\,ds$ *emanante del núcleo* $k(r,s)$ *admite desarrollo uniformemente convergente en las* φ_n *(autofunciones de* k'*); y parejamente, toda emanante* $\int k(s,r)g(s)\,ds$ *del núcleo* $k(s,r)$ *admite desarrollo uniformemente convergente en las* Ψ_n *(autofunciones de* k''*).*

El núcleo $k(r,s)$ *admite el desarrollo* $\sum \nu_n \varphi_n(r)\Psi_n(s)$ *si es uniformemente convergente en cada variable (llamando* $\nu_n = 1/\lambda_n$*). El núcleo* k *queda unívocamente determinado por los valores* ν_n *y por ambos sistemas ortonormales (entre sí independientes).*

a_3) TEOREMA DE PICARD (1910). — *Condición necesaria y suficiente para que* [Ap. II-93] *admita solución* (L^2)*, es que sea convergente la serie*:

$$\sum \lambda_n^2 h_n^2 \quad \text{con} \quad h_n = \int h(r)\varphi_n(r)\,dr \quad .$$

b) Ecuaciones de primera especie tipo VOLTERRA: *su reducción a ecuación de segunda especie.* — Es el caso más sencillo de núcleo no simétrico, reduciéndose fácilmente, por derivación, a ecuaciones de segunda especie.

Así, la ecuación de primera especie, tipo VOLTERRA:

$$\text{[Ap. II-94]} \qquad \int_0^r k(r,s)x(s)ds = y(r)$$

se reduce a una de segunda especie derivando respecto de r; pues aplicada la regla de derivación bajo el signo integral (§ 86-2, teor. 3°), es:

$$\text{[Ap. II-95]} \qquad \int_0^r k_r(r,s)x(s)ds + k(r,r)x(r) = y'(r) \quad ,$$

y llamando $K(r,s) = k_r(r,s)/k(r,r)$, $z(r) = y'(r)/k(r,r)$, resulta:

$$\text{[Ap. II-96]} \qquad x(r) + \int_0^r K(r,s)x(s)ds = z(r) \quad ,$$

ecuación de segunda especie, tipo VOLTERRA, de resolución ya vista (Ap. II-2, e_1). En el caso $k(0,0) = 0$ sigue siendo [Ap. II-95] de primera especie y se puede seguir derivando hasta llegar a una ecuación de segunda especie si $k_r^{(n)}(0,0) \neq 0$.

Nótese que esta reducción al tipo bien estudiado no es factible para un intervalo fijo de integración, pues al derivar no aparece el término en $x(r)$ que tanto simplifica la resolución.

Como corolario del método de aproximaciones sucesivas que da solución única (Ap. II-2, c_2) aplicado a [Ap. II-95] si $k(r,r) \neq 0$, y teniendo en cuenta que en [Ap. II-94] debe ser $y(0) = 0$, resulta:

TEOREMA DE L. ROUX. — *Si* $y(0) = 0$ *y en un intervalo* $(0,a)$ *es* $k(r,r) \neq 0$, *siendo continuas en él* $y'(r)$, $k_r(r,s)$, *la ecuación* [Ap. II-95] *admite una solución y sólo una, continua, en* $(0,a)$.

c) Ecuación integral de primera especie de ABEL. — La cicloide tiene la propiedad *braquistócrona*, es decir, entre todas las rampas que pueden tenderse entre A y C para el descenso de un grave (fig. 448), es la que exige el tiempo *mínimo* (§ 113-4, c_1): además, como veremos en seguida, es *tautócrona*, es decir, cualquiera que sea el punto inicial $X \neq B$, el tiempo invertido en llegar al punto más bajo B es el mismo.

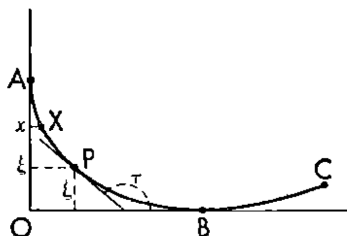


Fig. 448.

ABEL generalizó este problema así: Encontrar la curva tal que el tiempo invertido en llegar al punto más bajo sea una función prefijada $f(x)$ de la altura x, con la condición $f(0) = 0$.

Según la ley de BERNOULLI, la velocidad del grave que desciende desde la altura x, al llegar a la altura ξ, es:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(x-\xi)} = \frac{d\xi}{dt} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \tau} \quad ,$$

siendo τ el ángulo que forma la tangente a la curva incógnita con el eje horizontal η. Luego, el tiempo total $\int dt$, para llegar desde X hasta B, es:

$$\text{[Ap. II-97]} \qquad -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} \cdot \frac{d\xi}{\operatorname{sen} \tau} = f(x) \quad .$$

Obsérvese que para la cicloide de ecuación (cfr. § 34-6, ejemplo 2):

$$\eta = a(2\tau + \pi + \operatorname{sen} 2\tau) \quad , \quad \xi = a(1 - \cos 2\tau) \quad ,$$

es $\operatorname{sen} \tau = -\sqrt{\xi/(2a)}$, de donde:

[Ap. II-98] $$f(x) = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)\xi}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}x} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\frac{1}{2}x-\zeta)(\frac{1}{2}x+\zeta)}} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} \quad ,$$

independiente de $x \neq 0$, mostrando así que la cicloide es una curva *tautócrona*.

La ecuación integral [Ap. II-97] de primera especie (ecuación de ABEL, cfr. § 106, ejercicio 9) cuya función incógnita es $y(\xi) = 1/\text{sen}\,\tau$, una vez resuelta, determinará τ como función de ξ.

El núcleo es:

$$k(x,\xi) = \begin{cases} = 1/\sqrt{x-\xi} & \text{para} \quad \xi < x \quad , \\ = 0 & \text{para} \quad \xi \geqslant x \quad . \end{cases}$$

Este núcleo *triangular* es de tipo VOLTERRA, pero *singular*, pues es infinito en la diagonal $x = \xi$, no siendo aplicable el método expuesto en (*b*)*.

Sin embargo, la integración de la ecuación:

[Ap. II-99] $$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-\xi}}\, y(\xi)\, d\zeta = F(x) = \sqrt{2g}\, f(x) \quad , \quad F(0) = 0,$$

se logra muy fácilmente ensayando la ley de reciprocidad que se observa en las ecuaciones de primera especie. Pongamos:

[Ap. II-100] $$y(\xi) = \int_0^\xi \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt{\xi - z}} \quad ,$$

y permutando las integrales se tiene:

$$\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}}\int_0^\xi \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt{\xi-z}} = \int_0^x \varphi(z)\,dz \int_z^x \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)(\xi-z)}} \quad ,$$

y como esta integral en (z, x) vale π según hemos visto en [Ap. II-98], se obtendrá con [Ap. II-100] la solución buscada de [Ap. II-99], adoptando $\varphi(z) = F'(z)/\pi$. Calculada así: $y(\xi) = 1/\text{sen}\,\tau$, resulta:

$$\text{tg}\tau = \eta'(\xi) = 1/\sqrt{[y(\xi)]^2 - 1} \quad ,$$

cuya primitiva nos da la ecuación $\eta = \eta(\xi)$ de la curva.

NOTA 2. *Generalización de la ecuación de* ABEL. — Más general que [Ap. II-99] es la ecuación:

$$\int_a^x \frac{y(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^p} = F(x) \quad , \quad (0 < p < 1).$$

Teniendo en cuenta que es (Cap. XXIX, nota VII, c_2, b_2):

$$\int_z^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^p(\xi-z)^{1-p}} = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^p t^{1-p}} = B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\text{sen}\,p\pi},$$

se deduce la solución:

$$y(\xi) = \frac{\text{sen}\,p\pi}{\pi} \cdot \frac{F(a)}{(\xi-a)^{1-p}} + \frac{\text{sen}\,p\pi}{\pi}\int_a^\xi \frac{F'(z)\,dz}{(\xi-z)^{1-p}} \quad ,$$

que comprende a la [Ap. II-100] tomando $p = \frac{1}{2}$, $a = 0$.

---

* La amplitud del intervalo de validez de la serie de NEUMANN (Ap. II-2, c_2) según la fórmula 1/M es nula; pero también lo es la dada por la fórmula de SCHMIDT $\lambda < 1/\mu$ (Ap. II-2, c_3), por ser divergente la integral doble [Ap. II-26]. En cambio, si en el núcleo de [Ap. II-98] figurase la raíz 4ª, la regla 1/M daría radio nulo, mientras la de SCHMIDT da el radio $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

d) Resolución de tipos especiales. — La "transformación de LAPLACE" (Cap. XXIX, nota VIII) está definida por el operador

$$\text{[Ap. II-101]} \qquad L[x(s)] = \int e^{-rs} x(s)\,ds = y(r) \quad .$$

Si el intervalo es finito, se dirá de tipo HAUSDORFF, si es $(0;\infty)$, de tipo L_I o de LAPLACE; si es $(-\infty;+\infty)$, de tipo L_{II} o de MELLIN.

En el tipo L_I $(0;\infty)$, la emanante de cualquier función real $x(s)$ integrable es una función analítica definida por la integral en un semiplano $R(r) > a$, que es todo el plano si esta "abscisa de convergencia" a es $-\infty$; o no existe, si $a = +\infty$ (Cap. XXIX, nota VIII, *c*). Dada una función analítica $y(r)$ que cumpla ciertas condiciones de crecimiento de orden exponencial, la inversión se hace por la "fórmula de RIEMANN-MELLIN" (Cap. XXIX, nota VIII, *l*):

$$\text{[Ap. II-102]} \qquad x(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{rs} y(r)\,dr \quad .$$

En el tipo $(-\infty, +\infty)$ el campo de convergencia es la zona entre dos paralelas al eje imaginario, que puede abarcar todo el plano, o todo un semiplano, o no existir. La inversión, es decir, la resolución de la ecuación [Ap. II-101], viene efectuada por la adecuada "fórmula de MELLIN" para este caso.

Cuando el núcleo es e^{irs} y el intervalo de s $(-\infty, +\infty)$ la transformación [Ap. II-101] y su inversa se llaman "de FOURIER" (§ 99-4):

$$\text{[Ap. II-103]} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{irs} x(s)\,ds = y(r) \quad ; \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-irs} y(r)\,dr = x(s) \quad ; \end{cases}$$

y el tránsito de cada una a la otra constituye el "teorema de FOURIER" (§ 99-2).

Nótese que es lo mismo, adoptando $is = t$ como variable de integración, escribir el integrando en la forma de LAPLACE $\int e^{rt} x(t)\,dt$, pero el intervalo es entonces $(-i\infty, +i\infty)$, es decir, el eje imaginario.

Poniendo $ir = -t$, la primera integral [Ap. II-103] es de tipo L_{II}, y su inversa es de tipo RIEMANN-MELLIN [Ap. II-102] (§ 99, epercicio 3).

Se llama *problema de los momentos* con un intervalo finito o infinito a la resolución de la ecuación equivalente a la [Ap. II-101]:

$$\int s^n x(s)\,ds = y_n \quad ,$$

[(0; 1) HAUSDORFF; (0; ∞) STIELTJES; (—∞; ∞) HAMBURGER]

Finalmente, tiene interés el núcleo singular $k(r,s) = 1/(r-s)$, que por haber sido estudiado por HILBERT en su clásica obra *Grundzüge einer allgemeine Theorie der lineare Integralgleichungen* (Leipzig, Teubner, 1912), lleva su nombre, así como también la correspondiente ecuación de primera especie y su fórmula de inversión. Con (VP) valor principal (§ 80-4, def. 4) ellas son:

$$\text{[Ap. II-104]} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\ (\text{VP})\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s)}{r-s}\,ds = y(r) \quad ; \\ \dfrac{1}{\pi}\ (\text{VP})\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(r)}{r-s}\,dr = x(s) \quad , \end{cases}$$

presentando, como todas las revisadas en este párrafo y la [Ap. II-100] de ABEL, sorprendente simetría.

e) Otros tipos de núcleos. — LALESCO estudió los núcleos *antisimétricos* $k(s,r) = -k(r,s)$; los de tipo $k(r-s)$ siendo k función *impar* entran en esta clase; y si es *par*, son simétricos. Todo núcleo $k(r-s)$ es, pues, suma de un *simétrico* y un *antisimétrico* (§ 23, ejercicio 7).

Interesantes son los núcleos *simetrizables* de SCHMIDT, MARTY, etc., y los *definidos* (de signo constante) estudiados por MERCER, HOPF, etc.; para estos núcleos ya hemos demostrado el teorema de MERCER (Ap. II-4, teor. 8). HAMMERSTEIN logra esto en 1923 para todo núcleo con derivada uniformemente acotada.

Otro teorema importante es el de WEYL: *si a un núcleo se le suma otro de autovalores positivos, los de aquél se aproximan al origen*; es decir, $|\lambda'_n| \leqslant |\lambda_n|$.

f) Ecuaciones singulares. — Mayor importancia tienen los núcleos *singulares*, especialmente los del tipo $g(x, y)|x-y|^{-\alpha}$, $(0 < \alpha < 1)$. Estudio profundo de los núcleos singulares es el de CARLEMANN (Upsala, 1923).

Aunque el núcleo esté acotado, puede ser singular si el campo de integración es infinito, pero la singularidad aparecerá al cambiar de variable. Ejemplo: es simétrico, continuo e integrable el núcleo: $e^{-|r-s|}$ en $(-\infty, +\infty)$, pero la ecuación de primera especie tiene como autovalores *todos* los números $\lambda > \frac{1}{2}$, o sea, $\lambda = (1+\alpha^2):2$, es decir, hay *espectro continuo*, y cesa la ortogonalidad, realidad, etc. Las correspondientes autofunciones son $e^{\alpha r i}$, como el lector puede comprobar. De tales ecuaciones se han ocupado HARDY, TITCHMARSH, WEGNER, HOPF, etc.

Las integrales singulares con núcleo de tipo CAUCHY (cfr. § 115-9), por su interés teórico y práctico, han sido últimamente detenida y profundamente estudiadas por N. I. MUSKHELISHVILI y su escuela. Se plantean así:

$$\text{[Ap. II-105]} \qquad A(r)x(r) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(r,s)}{r-s}\, x(s)ds = h(r) \quad ,$$

donde $A(r)$ y $K(r, s)$ son lipschitzianas (§ 104-4), L es curva sin puntos dobles, formada por un número finito de arcos o contornos cerrados rectificables y $A(s) \pm K(s,s)$ no se anulan nunca sobre L.

Si $K(s,s) \equiv 0$ con $A(s) \neq 0$, la [Ap. II-105] es una ecuación de FREDHOLM de segunda especie (Ap. II-2, *d*):

$$A(r)x(r) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(r,s) - K(r,r)}{r-s}\, x(s)ds = h(r) \quad .$$

La ecuación *adjunta* a la [Ap. II-105] es la

$$\text{[Ap. II-106]} \qquad A(r)y(r) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(s,r)}{s-r}\, y(s)ds = g(r) \quad .$$

Necesario y suficiente para que exista solución de la [Ap. II-105] es que:

$$\int_L h(r)\psi(r)dr = 0 \quad ,$$

donde $\psi(r)$ es cualquier solución de la *ecuación adjunta homogénea*:

$$A(r)\psi(r) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(s,r)}{s-r}\, \psi(s)ds \quad .$$

Aplicación importante de este tipo de ecuaciones [Ap. II-105] es la de proporcionar la solución del *problema de contorno* llamado de HILBERT. Éste se refiere, dado en el plano complejo un dominio D, acaso múltiplemente conexo, cuyo contorno sea una curva L del tipo antes dicho, a hallar en D una función $\Phi(z)$ seccionalmente holomorfa de grado finito en ∞, tal que cumpla la condición de contorno:

$$\text{[Ap. II-107]} \qquad \Phi^+(s) = G(s)\Phi^-(s) + g(s)$$

sobre L, donde $G(s)$ y $g(s)$ son de tipo lipschitziano. Con $\Phi^+(s)$ y $\Phi^-(s)$

se indican los límites de $\Phi(z)$ cuando z se acerca a un punto s de L, ya por la izquierda, ya por la derecha. Diremos que una función $\Phi(z)$ es *seccionalmente holomorfa con frontera o línea singular* L, si $\Phi(z)$ es holomorfa fuera de L y es continua a izquierda y a derecha de L con la posible excepción de los extremos c de eventuales arcos que formen parte de L, pero cumpliendo en el entorno de dichos extremos c la condición:

$$|\Phi(z)| \leqslant K/|z-c|^{-\alpha} \quad \text{con} \quad |\alpha| < 1 \quad .$$

Si en el entorno de ∞ es (§ 117-2):

$$\Phi(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j z^j$$

diremos que $\Phi(z)$ es de *grado finito en* ∞ si para un cierto k es $a_j = 0$ cuando $j > k$. Si $k > 0$, es ∞ polo de orden k de $\Phi(z)$; si $k < 0$, es ∞ cero de orden $-k$ (§ 117-2). Si $k \leqslant 0$, entonces $\Phi(z)$ es seccionalmente holomorfa *incluyendo* ∞.

Según que $g(s)$ sea o no sobre L idénticamente nula, el problema de HILBERT se llama *homogéneo* o *no homogéneo*.

El *problema de* RIEMANN-HILBERT es hallar $\Phi(z) = u + iv$ en el interior de D y continua en D, cumpliendo las condiciones de contorno:

$$R(a+ib)\Phi^{+} \equiv au - bv = c$$

sobre L, donde a, b, c son funciones continuas reales sobre el contorno L de D. De éste (para $a \equiv 1$, $b \equiv 0$) es caso particular el problema de DIRICHLET. El problema de RIEMANN-HILBERT se refiere al de HILBERT tomando en éste:

$$G(s) = -\frac{a-ib}{a+ib} \quad , \quad g(s) = \frac{2c}{a+ib} \quad .$$

El problema de resolver [Ap. II-105] es equivalente al de resolver su *parte dominante*:

[Ap. II-108] $$A(r)x(r) - \frac{K(r,r)}{\pi i}\int_L \frac{x(s)\,ds}{r-s} = h(r) \quad ,$$

por ser $k(r,s) = \dfrac{K(r,s) - K(r,r)}{s-r}$ núcleo ordinario, al haber supuesto $K(r,s)$ lipschitziana.

Si se pone:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{x(s)\,ds}{s-z} \quad ,$$

PREMELJ ha demostrado que es:

$$x(s_0) = \Phi^{+}(s_0) - \Phi^{-}(s_0) \quad , \quad \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{x(s)\,ds}{s-s_0} = \Phi^{+}(s_0) + \Phi^{-}(s_0) \quad ,$$

y entonces la [Ap. II-108] se convierte en:

$$A(s_0)[\Phi^{+}(s_0) - \Phi^{-}(s_0)] + K(s_0,s_0)[\Phi^{+}(s_0) + \Phi^{-}(s_0)] = h(s_0) \quad ,$$

que es la [Ap. II-107] del problema de HILBERT para:

$$G(s_0) = \frac{A(s_0) - K(s_0,s_0)}{A(s_0) + K(s_0,s_0)} \quad , \quad g(s_0) = \frac{h(s_0)}{A(s_0) + K(s_0,s_0)} \quad .$$

Así como la ecuación de FREDHOLM (donde el parámetro no es autovalor) es siempre invertible con solución única (Ap. II-2, d), la ecuación [Ap. II-105] puede no tener solución, o tener varias, siendo importante estudiar cuándo tiene solución única.

g) Sobre la equivalencia entre ecuaciones diferenciales e integrales. — En diversos ejemplos hemos visto la esencia del método general, que permite plantear en la ecuación integral de núcleo cuadrado los problemas de contorno (Cap. XXVIII, nota IX, *e*), y de núcleo triangular, los problemas de CAUCHY (Ap. II-2, e_2). Esta equivalencia tiene proyecciones más amplias y el nuevo algoritmo presenta estas ventajas:

1ª Una sola ecuación sin condiciones accesorias sustituye al conjunto de condiciones necesarias para definir un problema de contorno o de CAUCHY, a saber: una o más ecuaciones diferenciales y dos o más condiciones lineales de contorno o iniciales.

2ª Al quedar englobadas en un todo esos tipos muy diversos de problemas, según sea el orden de las ecuaciones diferenciales, el número de variables y el número y tipo de las condiciones de contorno o iniciales, se evita la diversidad de métodos estudiados sucesivamente en el análisis clásico, quedando sustituídos por uno solo, cualquiera sea el número de variables.

3ª Esta unificación de problemas físicos tan diversos, como equilibrio, vibraciones de la cuerda elástica, la varilla, la viga, la membrana, la placa, expresados por distintos algoritmos, descubre una estructura conceptual común, progreso esencial para la filosofía natural.

Como contrapeso de estas ventajas seductoras, que durante los primeros años del siglo hicieron soñar en el desalojo de las ecuaciones diferenciales por el nuevo algoritmo creado por LIOUVILLE, NEUMANN, FREDHOLM, VOLTERRA y HILBERT, no se ha avanzado apenas en la resolución de las ecuaciones integrales, quedando así relegadas al papel de sistematización y únificación de los diversos capítulos clásicos, que siguen siendo necesarios.

En virtud del teorema de equivalencia (en sus dos aspectos vistos en Cap. XXVIII, nota IX, *e*, y Ap. II-2, e_2), uno de los más importantes y bellos de la moderna matemática, ambos algoritmos son necesarios; uno para las propiedades existenciales y otro para el cálculo numérico.

6. **Bibliografía.** — LAPLACE desde 1782; FOURIER y ABEL, en los primeros años del siglo XIX, son los primeros en resolver importantes ecuaciones de primera especie que llevan sus nombres.

LIOUVILLE estudió ya en 1836 el tipo que a fines de siglo redescubrió VOLTERRA y obtuvo el desarrollo, hoy llamado "serie de NEUMANN" (dada por éste en 1900); en 1887, PAUL DE BOIS REYMOND redujo las ecuaciones en derivadas parciales al nuevo algoritmo, que llamó "ecuaciones integrales". Poco después VOLTERRA estudió las de núcleo triangular y en 1900, KARL NEUMANN redujo el problema de DIRICHLET a una ecuación integral, que integró por la serie que lleva su nombre y cuya prolongación analítica realizó POINCARÉ en 1902. La teoría general empieza en 1903, cuando FREDHOLM resolvió la ecuación de segunda especie por la serie que hemos visto (Ap. II-2, *d*); y HILBERT publica sus seis memorables trabajos (1904-10), en que, siguiendo la pauta de la geometría euclídea, desarrolla la teoría del espacio de las funciones de cuadrado integrable y métrica pitagórica, según también hemos visto (Ap. II-3 y 4; §§ 96 y 97). La teoría de HILBERT está expuesta en su obra de conjunto:

D. HILBERT: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der lineare Integralgleichungen* (2ª ed., Teubner, Leipzig, 1924; reimpreso Chelsea, Nueva York, 1953).

Su discípulo EHRARD SCHMIDT completó y modificó la teoría en muchos puntos, como hemos visto en nuestra exposición; dió el proceso de ortogonalización que también hemos expuesto (Cap. XVII, nota II, c_1 y § 97-4), y el método de aproximación por núcleos disociados, al mismo tiempo que GOURSAT (1907). De progresos ulteriores (núcleos especiales y singulares, sistemas de ecuaciones, generalización a varias variables) algo hemos dicho anteriormente y puede estudiarse en los libros de la siguiente reseña bibliográfica.

La obra de HILBERT mostró la fecundidad del análisis funcional, ya iniciado en la célebre disertación:

G. F. B. RIEMANN: *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Habilitationschrift*, 1854; Ges. Werke, 2ª ed., Leipzig, 1892; ed. de H. Weyl, Springer, Berlin, 1919),

donde al tratar del problema de mínimo que constituye el principio de DIRICHLET, se hace referencia a un conjunto de "funciones que forman un dominio conexo cerrado", neto concepto de análisis funcional, lo que toma cuerpo en sendas memorias de G. ASCOLI (1883) y J. HADAMARD (1896-98) sobre curvas límites de una variedad de curvas.

De ahí se pasa por V. VOLTERRA (1887) a tomar una función como variable independiente para definir una función numérica, prevaleciendo como nombre de esa correspondencia el de "funcional" dado por HADAMARD al de "función de línea" dado por VOLTERRA, según éste mismo acepta en sus sucesivas obras:

V. VOLTERRA: *Leçons sur les fonctions de lignes* (Coll. Borel. Gauthier-Villars, Paris, 1913);

V. VOLTERRA: *Teoría de las funcionales y de las ecuaciones integrales e íntegro-diferenciales* (Fac. Ci., Madrid, 1927);

V. VOLTERRA: *Theory of functionals* (Blackie, Glasgow, 1930);

V. VOLTERRA y J. PÉRÈZ: *Théorie générale des fonctionnelles. I. Généralités sur les fonctionnelles. Théorie des équations intégrales* (Col. Borel; Gauthier-Villars, Paris, 1936).

Obras didácticas ya antiguas, aunque algunas remozadas en posteriores ediciones, son:

M. BÖCHER: *Introduction to integral equations* (1909; 2ª ed., 1926; Cambridge Math. Tracts nº 10);

A. KNESER: *Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik* (1911; 2ª ed., 1922; Vieweg, Brauschweig);

H. B. HEYWOOD y M. FRÉCHET: *L'équation de* FREDHOLM *et ses applications à la physique mathématique* (Hermann, Paris, 1912);

T. LALESCO: *Introduction à la théorie des équations intégrales* (Paris, 1912);

V. VOLTERRA: *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles* (Gauthier-Villars, Paris, 1912);

G. VIVANTI: *Elementi della teoria delle equazioni integrali lineare* (Man. Hoepli, Milán, 1916; trad, alemana F. Schwank, Hannover, 1929).

Buenos textos para un estudio bastante amplio y profundo sobre ecuaciones integrales, son los incluídos en las obras de GOURSAT (citada en Cap. VI, nota VI-5, vol. III) y de COURANT y HILBERT (citada en Cap. XVI, nota IV-4) vol. I, así como en el curso;

G.KOWALEWSKI: *Integralgleichungen* (W. de Gruyter, Berlin, 1930);

o más brevemente en:

G. HAMEL: *Integralgleichungen. Einführung in Lehre und Gebrauch* (2ª ed., Springer, Berlin, 1949),

o en el libro de LICHNEROWICZ (citado en Cap. XVII, nota V-3).

De carácter más elevado, incluye ecuaciones integrales y transformaciones lineales con sus teorías espectrales en espacios de HILBERT y de BANACH la obra de F. RIESZ y B. SZ. NAGY (citada en Cap. XXIV, nota IV-4).

Excelente artículo de la enciclopedia alemana (citada en el volumen I, "Plan de la obra" - 3), editado separadamente, es:

E. HELLINGER y O. TOEPLITZ: *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten* (Chelsea Publ., Nueva York, 1953).

Estudia ecuaciones integrales de núcleo singular el trabajo:

T. CARLEMAN: *Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique* (Almquist, Uppsala, 1923).

Presentación de los resultados fundamentales de la teoría de las ecuaciones integrales lineales con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales de segundo orden, basada en la teoría de HILBERT y COURANT, es:

M. JANET: *Équations intégrales et applications à certaines problèmes de la physique mathématique* (Mémor. Sc. Math. nº 101 y 102, Gauthier-Villars, Paris, 1941).

En castellano, hay una elemental e instructiva introducción en el folleto

J. Mª. ORTS: *Introducción al estudio de las ecuaciones integrales* (Sem. Mat. Univ. Barcelona, 1941);

y el libro de rico contenido, donde siguiendo a A. HAMMERSTEIN, se incluye el tema, eludido en obras anteriores, de las ecuaciones no lineales, importante en las aplicaciones:

F. NAVARRO BORRÁS: *Ecuaciones integrales (lineales y no-lineales)* (Cons. Sup. Inv. Cient.; Inst. "Jorge Juan", Madrid, 1942).

Entre los libros últimamente publicados sobre ecuaciones integrales, el más importante es el completo tratado

W. SCHMEIDLER: *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. I. Lineare Integralgleichungen* (Akademische Verl., Leipzig, 1950),

donde además de la teoría clásica de las ecuaciones no singulares para las que subsisten los teoremas de FREDHOLM, se incluyen muchas clases de ecuaciones singulares.

Sobre este tema y apoyándose en la teoría de las integrales de CAUCHY, que interviene extensamente en las ecuaciones integrales singulares estudiadas por el autor y sus discípulos, está el libro traducido del ruso:

N. I. MUSKHELISHVILI: *Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics* (Dep. of Supply and Development, Aer. Res. Lab., Melbourne, Australia, 1949; Noordhoff, Groningen, 1953);

Condicionada en su contenido por las investigaciones de su autor, está la obra cuya traducción del ruso trae muchos cambios, especialmente al tratar ecuaciones singulares:

W. D. KUPRADSE: *Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen* (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlín, 1956).

Exposición de los teoremas fundamentales sobre ecuaciones integrales de segunda especie, es el breve curso, simple y claramente escrito:

I. G. PETROVSKI: *Vorlesungen über die Theorie der Integralgleichungen* (Physica-Verlag, Würzburg, 1953; trad. de la 2ª ed. rusa, 1951). Hay también traducción inglesa: *Lectures on the theory of integral equations* (Graylock Press, Rochester, 1957).

Adecuado a lectores que sólo conozcan el cálculo infinitesimal elemental, con numerosas soluciones numéricas elaboradas en detalle, que lo hacen apropiado para ingenieros, incluye ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, y ecuaciones integrales, éstas aplicadas en particular al estudio de vigas continuas:

H. F. P. PURDAY: *Linear equations in applied mechanics* (Oliver & Boyd, Edinburgo y Londres; Interscience Publ., Nueva York, 1954).

Para la resolución práctica de ecuaciones integrales está la monografía, que encabeza la colección "*Ergebnisse der angewandten Mathematik*":

H. BÜCKNER: *Die praktische Behandlung von Integral-Gleichungen* (Springer, Berlín, 1952).

Es interesante el nuevo método de resolución recientemente publicado:

M. G. KREIN: *On a new method of solving linear integral equations of the first and second kinds* (M. D. Friedman, West Concord, Mass., 1955; trad. de Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N. S.), *100*, 1955, pp. 413-416 en ruso).

Tipos particulares de ecuaciones integrales son investigados mediante la transformación de LAPLACE en la obra cuyo título señala el anterior objetivo de M. PARODI (citada en Cap. XXV, nota IV-6).

En el Cap. XXV, nota IV-5 y 6 se ha dado biblografía sobre la teoría de las transformaciones integrales a que nos hemos referido anteriormente (Ap. II-5, *d*) siendo particularmente importantes desde este punto de vista general las obras allí citadas de TITCHMARSH y de SNEDDON.

APÉNDICE III

CALCULO OPERACIONAL

1. **Métodos simbólicos de Heaviside y de Dirac.** — *a*) A fines del siglo pasado un ingeniero electricista [O. HEAVISIDE: *On operators in mathematical physics* (Procedings of the Royal Society, *52*, 1893, p. 504; *54*, 1894, p. 105)] introdujo ciertas reglas y métodos operatorios con muy débil (o acaso ninguna) justificación matemática, pero que "en general" conducen a la solución correcta de problemas sobre circuitos eléctricos. Estos métodos, introducidos con el objeto de reducir a cuestiones puramente algebraicas la resolución de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales relacionados con la teoría de los circuitos eléctricos, han seguido su desarrollo, empleándose incluso en estudios teóricos por electricistas y otros técnicos, pero fueron considerados durante mucho tiempo por los matemáticos como simple medio práctico para hallar presuntas soluciones (cuya validez podía verificarse *a posteriori* en la ecuación o sistema) hasta que su éxito creciente les indujo a buscarles justificaciones teóricas por diversos caminos, algunos de los cuales señalamos más adelante (ver 2 a 8).

a_1) El primitivo método simbólico de HEAVISIDE se basa en considerar, en las derivadas de una función $y = \mathrm{y}(t)$:

$$\mathrm{D}y,\ \mathrm{D}^2y,\ \mathrm{D}^3y,\ \ldots$$

el operador D como un número ordinario (HEAVISIDE usa p e indica las derivadas por py, p^2y, ...), siendo

$$\mathrm{D}^m(\mathrm{D}^ny) = \mathrm{D}^{m+n}y \quad , \quad (\mathrm{D}^m)^ny = \mathrm{D}^{mn}y,$$

con las convenciones:

$$\alpha)\ \ \mathrm{D}^0y = y,\ \mathrm{D}^{-1}y = \int_0^t \mathrm{y}(\tau)d\tau,\ (\textit{primitiva nula para}\ t = 0),$$

$$\mathrm{D}^{-2}y = \int_0^t\int_0^t \mathrm{y}(\tau)\ (d\tau)^2 = \int_0^t \mathrm{y}(\tau)\ (t - \tau)d\tau,\ \ldots \quad ,$$

[Ap. III-1]
$$\mathrm{D}^{-n}y = \int_0^t \ldots \int_0^t \mathrm{y}(\tau)\ (d\tau)^n =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t \mathrm{y}(\tau)\ (t - \tau)^{n-1}\,d\tau \quad ,$$

(cfr. § 106-1, nota 3), y

β) la convención de definir f(D) reemplazando x por D en el desarrollo en serie de potencias positivas y/o negativas de f(x).

Ya hemos visto en § 108-8 y 9 cómo se aplica este método simbólico a la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes homogénea o no. Los ejemplos que siguen se proponen mostrar cual es el espíritu del primitivo método operacional, el primero da una posible interpretación de un operador f(D) con f(x) trascendente, y los otros dos muestran

cómo funciona el método en el estudio del régimen transitorio para dos circuitos eléctricos simples.

EJEMPLOS: 1. De $e^{hx} = \sum \frac{h^n x^n}{n!}$ sigue por β:

[Ap. III-2] $$e^{hD} = \sum \frac{h^n D^n}{n!}$$

y aplicando este operador a una función indefinidamente derivable $y(t)$ resulta

[Ap. III-3] $$e^{hD} y(t) = \sum \frac{h^n y^{(n)}(t)}{n!} = y(t+h)$$

siendo válida la última igualdad si *además* $y(\tau)$ es desarrollable en serie de TAYLOR alrededor de $\tau = t$, con radio $> h$. Pero como el último miembro de [Ap. III-3] tiene sentido sólo con que $y(\tau)$ esté definida en $\tau = t + h$, es posible ampliar el significado del operador e^{hD}, *definiendo* $e^{hD} y(t)$ por

[Ap. III-4] $$e^{hD} y(t) = y(t+h)$$

aunque $y(t)$ no sea ni siquiera derivable.

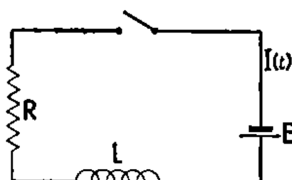


Fig. 449.

2. Si el circuito de la figura 449, con fuerza electromotriz (f.e.m.) constante E, se cierra en el instante $t = 0$, la intensidad $I = I(t)$ de la corriente, satisface en *todo* instante ($t > 0$, $= 0$, ó < 0) a la ecuación diferencial

[Ap. III-5] $$R\, I(t) + L \frac{dI}{dt} = E \,.\, 1(t)$$

siendo $1(t)$ la función salto unidad o función de HEAVISIDE [XXIX-86]. Reemplazando dI/dt por DI se obtiene la llamada *solución operacional* de [Ap. III-5]:

[Ap. III-6] $$I(t) = \frac{1}{R + LD} \,.\, E\, 1(t) \quad ,$$

donde el *operador* $1/(R + LD)$ actúa sobre el *operando* $E \,.\, 1(t)$. Falta el paso (llamado por HEAVISIDE *algebrización de la solución operacional*) de [Ap. III-6] a la expresión efectiva de $I(t)$. Por β podemos poner

$$\frac{1}{R + LD} = \frac{1}{LD}\left(1 + \frac{R}{LD}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{L} D^{-1}\left(1 - \frac{R}{L} D^{-1} + \frac{R^2}{L^2} D^{-2} - \ldots\right) \quad ;$$

entonces:

$$I(t) = \frac{E}{L} D^{-1}\left(1 - \frac{R}{L} D^{-1} + \frac{R^2}{L^2} D^{-2} - \ldots\right) 1(t) \quad ,$$

y como por α es para $t \geqslant 0$:

[Ap. III-7] $$D^{-1} 1(t) = t, \quad D^{-2} 1(t) = \frac{t^2}{2!}, \ldots, D^{-n} 1(t) = \frac{t^n}{n!}, \ldots$$

será:

$$\left(1 - \frac{R}{L} D^{-1} + \frac{R^2}{L^2} D^{-2} - \ldots\right) 1(t) = 1 - \frac{R}{L} t + \frac{R^2}{L^2} \frac{t^2}{2!} -$$
$$- \ldots = e^{-\frac{R}{L} t} \quad , \quad (t \geqslant 0) \quad .$$

y finalmente

[Ap. III-8] $$I(t) = \frac{E}{L}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}\tau}\, d\tau = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) .$$

3. Si en el circuito del ejemplo anterior actúa *desde el instante* $t = 0$ una f.e.m. sinusoidal $E_0 \cos(\omega t + \alpha)$ tendremos para *todo* t, con el convenio de retener la parte real de la solución, la ecuación diferencial

[Ap. III-9] $$RI + L\frac{dI}{dt} = E_0 e^{i(\omega t + \alpha)}\, 1(t) ,$$

y entonces habrá que algebrizar (ejemplo 2) la solución operacional

[Ap. III-10] $$I(t) = \frac{1}{R + LD} \cdot E_0 e^{i(\omega t + \alpha)}\, 1(t) .$$

Ahora bien, a un operando de tipo exponencial puede aplicarse le llamada *regla de trasposición de* LAPLACE (o *"shifting theorem"* de HEAVISIDE):

[Ap. III-11] $$f(D)[e^{at} y(t)] = e^{at} f(D + a)\, y(t) ,$$

que resulta, por desarrollo de $f(D)$ en serie de potencias, de la identidad [108-33] escrita en la forma

[Ap. III-12] $$D^h e^{at} y(t) = e^{at}(D + a)^h y(t) ,$$

e indica que un factor e^{at} en el operando puede salir del operador con tal de reemplazar D por $D + a$ en éste.

Será entonces por [Ap. III-10]:

[Ap. III-13] $$I(t) = E_0 e^{i(\omega t + \alpha)} \frac{1}{R + L(D + i\omega)}\, 1(t) ,$$

pero aquí el nuevo operador puede identificarse con el de [Ap. III-6] sin más que cambiar R por $R + Li\omega$, y así obtendremos por igual cambio en [Ap. III-8] la solución de [Ap. III-9]:

[Ap. III-14] $$I(t) = \frac{E_0}{R + Li\omega}\, e^{i(\omega t + \alpha)}\, [1 - e^{-(R + Li\omega)t/L}]$$

de donde debemos tomar la parte real. Para ello pongamos $R + Li\omega = \varrho e^{i\varphi}$, $[\varrho = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2},\ \varphi = \text{arc tg}\,(L\omega/R)]$ y resulta

[Ap. III-15] $$I(t) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} [\cos(\omega t + \alpha - \varphi) - e^{-Rt/L} \cos(\alpha - \varphi)],$$

donde el primer término corresponde al régimen permanente, con el conocido defasamiento $\varphi = \text{arc tg}\,(L\omega/R)$ respecto de la f.e.m., y el segundo, rápidamente decreciente a cero debido al factor exponencial, corresponde al régimen transitorio.

a_2) Una ecuación lineal de orden m de coeficientes constantes

[Ap. III-16] $$a_0 y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + \ldots + a_{m-1} y' + a_m y = f(t)$$

puede escribirse

[Ap. III-17] $$P(D)y = f(t) \quad \textit{con} \quad P(x) = a_0 x^m + \ldots + a_m$$

y su solución operacional será:

[Ap. III-18] $$y = \frac{1}{P(D)} f(t) .$$

Descomponiendo $1/P(x)$ en fracciones simples (§ 46-4, b_2), como suma de términos de la forma $A/(x - r)^n$, la solución operacional [Ap. III-18] será la aplicación a $f(t)$ de una suma de operadores de la

forma $A/(D-r)^n$ (*descomposición en fracciones simples de* HEAVISIDE) y entonces bastará "algebrizar" (ejemplo 2) la expresión operacional

[Ap. III-19] $$(D-r)^{-n} f(t) \quad ,$$

pero esto resulta de aplicar a [Ap. III-1] la regla de trasposición [Ap. III-11] (con $a=-r$) y así resulta la llamada *fórmula de* HEAVISIDE:

[Ap. III-20] $$(D-r)^{-n} f(t) = \frac{1}{(n-1)!} e^{rt} \int_0^t e^{-r\tau} f(\tau)(t-\tau)^{n-1} d\tau \quad ,$$

que expresa la solución de

[Ap. III-21] $$(D-r)^n y = f(t)$$

que se anula para $t=0$ conjuntamente con las $n-1$ primeras derivadas. La solución general de [Ap. III-21] resulta de sumar a [Ap. III-20] la solución de la ecuación simple (§ 108-8, *c*) $(D-r)^n y=0$, y teniendo presente [108-35] vemos que la solución general de [Ap. III-16] será una suma de expresiones de la forma

$$\frac{A}{(n-1)!} e^{rt} \int_0^t e^{-r\tau} f(\tau)(t-\tau)^{n-1} d\tau + P_{n-1}(t) e^{rt}$$

con P_{n-1} polinomio arbitrario de grado $n-1$, correspondientes a cada término $A/(x-r)^n$ de la descomposición en fracciones simples de $1/P(x)$.

b) P. A. M. DIRAC, en su formulación de la Mecánica cuántica (Proceedings of the Royal Society, *113*, 1926-7) se vió obligado a introducir un ente matemático ficticio y contradictorio en sí en su forma originaria de función, que llamó "función impropia" $\delta(x)$, con las propiedades *contradictorias entre sí*:

[Ap. III-22] $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \,.\, dx = 1 \quad ,$$

[Ap. III-23] $$\delta(x) = 0 \textit{ para } x \neq 0 \quad .$$

Una exposición sistemática se encuentra en su obra citada en 11, *g*. Después de las relaciones [Ap. III-22] y [Ap. III-23] se lee allí: "Para obtener una imagen de $\delta(x)$, tomemos una función de x, nula fuera de un pequeño intervalo, de longitud ε, digamos, que cubre el origen $x=0$, y tan grande dentro que su integral sea 1. La forma exacta dentro no interesa siempre que no haya innecesariamente variaciones bruscas (por ejemplo si es siempre del orden de ε^{-1}). Entonces en el límite para $\varepsilon \to 0$ esta función dará lugar a la función δ ("will go over into the δ function").

La propiedad más importante de δ es

[Ap. III-24] $$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ \delta(x)\ dx = \varphi(0) \quad ,$$

siendo $\varphi(x)$ una función continua de x. Podemos ver fácilmente la validez de esta ecuación con la imagen anterior de $\delta(x)$. El primer miembro depende sólo de los valores de $\varphi(x)$ muy próximos al origen, y entonces podemos reemplazar $\varphi(x)$ por $\varphi(0)$ sin error serio. Entonces sigue [Ap. III-24] de [Ap. III-22] y [Ap. III-23]. Con un cambio de origen en [Ap. III-24] resulta

[Ap. III-25] $$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ \delta(x-a)\ dx = \varphi(a) \quad ,$$

y por consiguiente el proceso de multiplicar una función de x por $\delta(x-a)$ e integrar, es equivalente a sustituir x por a."

Pero, de considerar a $\delta(x)$ como límite de funciones $f_n(x)$ todas con integral $= 1$, no sigue [Ap. III-22], pues puede ser (cfr. § 85-1, ej. 3):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 1 \quad ,$$

y por el contrario, de [Ap. III-23] resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 0.$$

El método de DIRAC no satisface en modo alguno las exigencias del rigor matemático, ni aún en la medida por lo demás habitual en la Física teórica, y hay fundamentaciones sin δ, como la excelente de J. VON NEUMANN (citado en Cap. XXV nota IV, 8). Pero el uso de δ está muy difundido en la literatura por su eficacia y sencillez formal de los cálculos; de allí el interés de reemplazar la "función" $\delta(x)$ por algo dotado de pleno sentido y que preste la misma utilidad. Esto puede lograrse mediante la integral de STIELTJES (§ 78-1) y las relaciones [Ap. III-24] y [Ap. III-25] se reemplazan entonces por

$$\text{[Ap. III-26]} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d1(x) = \varphi(0) \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d1(x-a) = \varphi(a) \quad ,$$

siendo 1 la *función de* HEAVISIDE o *salto unidad* definida por [XXIX-86].

Pero relaciones como $1'(x) = \delta(x)$, o la consideración, como hace DIRAC, de derivadas $\delta'(x)$, $\delta''(x)$, ... de esta función desprovista de sentido real, no pueden justificarse tampoco mediante la integral de STIELTJES. Todas estas cuestiones relativas a los métodos simbólicos introducidos por DIRAC, semejantes en su espíritu a los de HEAVISIDE, aunque de significación mucho más profunda, adquieren sentido sencillo y pleno, como veremos en 10, en el ámbito del análisis funcional con la introducción del concepto de *distribución*, debido a L. SCHWARTZ, que generaliza la noción de función.

Para referencia posterior señalemos que DIRAC (Cap. IV, § 20, de la obra citada en 11, g) define la derivada de la función δ "que es otra función impropia, más impropia que δ misma" por el siguiente efecto operacional sobre toda función derivable con derivada continua en a

$$\text{[Ap. III-27]} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ \delta'(x-a)\,dx = -\varphi'(a) \quad ,$$

y después de señalar que [Ap. III-27] se puede verificar ya sea por integración por partes y aplicación de [Ap. III-25] a $\varphi'(x)$, ya sea derivando [Ap. III-25] respecto de a, agrega: "La coincidencia de ambos métodos de verificación evidencia la auto-consistencia de nuestro uso de funciones impropias."

2. **Cálculo operacional y transformaciones funcionales.** — Hemos visto en 1 que los procedimientos de HEAVISIDE consisten o bien en descomponer en fracciones simples un operador de la forma $P^{-1}(D)$ con P polinomio (como en nº 1, α_2), o bien en desarrollar el operador en serie de potencias negativas de D, llamada *desarrollo de* HEAVISIDE (como en ej. 2) y luego, cuando este operador se aplica a $1(t)$, en reemplazar en virtud de [Ap. III-7], cada potencia D^{-n} por $t^n/n!$.

La semejanza formal de estos procedimientos con los de cálculo de antitransformadas de LAPLACE de funciones racionales (Cap. XXIX, nota VIII, m) y con [XXIX-84] escrita en la forma $L^{-1}\{p^{-n-1}\} = t^n/n!$, respectivamente, hacen pensar que los métodos formales de HEAVISIDE encuentren una realización efectiva en la transformación funcional de LAPLACE, en la cual a la derivación o "multiplicación" formal por el

operador D en un campo funcional, corresponde una efectiva multiplicación por un factor numérico en el otro, en virtud de [XXIX-90] y [XXIX-93]. Esto daría una justificación de los métodos formales vistos y explicaría su éxito.

Retomemos por ejemplo la ecuación diferencial [Ap. III-5] y apliquemos a ambos miembros la transformación de LAPLACE poniendo $L\{I(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} I(t)\, dt = i(p)$. Resulta de [XXIX-77] y [XXIX-93] para $I(0^+) = I(0) = 0$, la ecuación algebraica en el otro campo funcional $Ri(p) + Lpi(p) = E/p$, que resuelta así:

$$i(p) = \frac{E}{p(R + Lp)} = \frac{E}{L}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{R}{L}\frac{1}{p^3} + \frac{R^2}{L^2}\frac{1}{p^4} - \dots\right)$$

permite retornar al campo de las funciones-objeto mediante la fórmula de antitransformación $L^{-1}\{1/p^{n+1}\} = t^n/n!$, dando:

$$I(t) = \frac{E}{L}\left(\frac{t}{1!} - \frac{R}{L}\frac{t^2}{2!} + \frac{R^2}{L^2}\frac{t^3}{3!} - \dots\right) = \frac{E}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \quad ,$$

en coincidencia con [Ap. III-8].

En los párrafos 3 a 7 nos proponemos señalar otras importantes propiedades operacionales de la transformación de LAPLACE comenzando con ejemplos sencillos de aplicación al estudio de funciones §§ 3 y 4) y siguiendo con un estudio más detenido de la realización efectiva mediante **L**, de los procedimientos formales en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales (§§ 5 y 6). En el § 7 introduciremos el llamado símbolo operatorio $G(1/D)$ correspondiente a una serie de potencias $G(z)$ de radio no nulo, relacionado con la transformación funcional $p\,L\{F\}$ de CARSON.

Para dar idea de las propiedades operacionales de otras transformaciones funcionales, en el § 8 se dan aplicaciones de la transformación de FOURIER al estudio de la respuesta de un circuito eléctrico simple y en § 9 se aplican propiedades operacionales de la transformación de LAPLACE bilateral L_{II} para obtener fórmulas de inversión de diversas transformaciones funcionales.

3. **Funciones salto e impulsivas y transformadas de Laplace.** — *a*) No sólo las ideas de DIRAC expuestas en § 1, *b*, sino también el estudio de la transformación de LAPLACE y su inversa, sugiere la conveniencia de ampliar el concepto de función. Vimos en efecto en Cap. XXIX, nota VIII, *m*, que ni los polinomios $Q(p)$ ni las funciones $f(p) = e^{-ap}$ admiten antitransformadas. Pero ¿no podrá darse sentido a las operaciones

[Ap. III-28] $$L^{-1}\{Q(p)\} \quad , \quad L^{-1}\{e^{-ap}\} \quad ,$$

ampliando el campo de las funciones ordinarias?

Ya con la "función" de DIRAC, gracias a la propiedad [Ap. III-25] puede expresarse e^{-ap} $(a > 0)$ como transformada de LAPLACE.

[Ap. III-29] $$L\{\delta(t - a)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt}\, \delta(t - a)\, dt = e^{-ap} \quad ,$$

o sea hemos realizado la segunda operación [Ap. III-28]: $L^{-1}\{e^{-ap}\} = \delta(t - a)$, y veremos en nº 10, *f*, que también puede darse significado al primer símbolo [Ap. III-28].

b) Por otra parte, la función salto unidad de HEAVISIDE, relacionada con la "función" de DIRAC como puede verse comparando [Ap. III-24] y [Ap. III-25] con [Ap. III-26], juega importante papel en la transformación de LAPLACE, como vimos en Cap. XXIX, nota VIII, *d* y *h*. Muchas funciones discontinuas de importancia en la técnica se expresan en forma

sencilla con $1(t)$, y sus transformadas de LAPLACE resultan de [XXIX-87]: $L\{1(t-b)\} = e^{-bp}/p$.

EJEMPLOS: 4. La función *"escalera regular"* (fr. fonction gradins; fig. 450):

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1(t-kb) = 1(t) + 1(t-b) + 1(t-2b) + \ldots$$

tiene por transformada de LAPLACE:

$$\frac{1}{p}(1 + e^{-bp} + e^{-2bp} + \ldots) = \frac{1}{p(1-e^{-bp})}$$

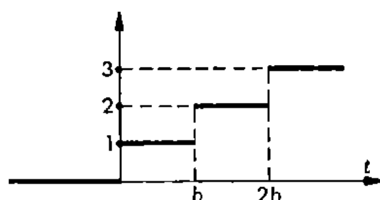


Fig. 450.

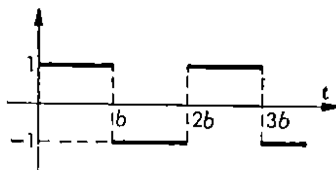


Fig. 451.

5. La función *"onda rectangular"* (fr. fonction créneaux; i. square wave function; fig. 451):

$$1(t) - 1(t-b) + 1(t-2b) - \ldots ,$$

tiene por transformada de LAPLACE:

$$\frac{1}{p}(1 - e^{-bp} + e^{-2bp} - e^{-3bp} + \ldots) = \frac{1}{2p}\operatorname{tgh}\frac{bp}{2}.$$

c) En el estudio de fenómenos de choque y similares, se consideran en Mecánica las llamadas *"fuerzas impulsivas"*. Se entiende por *fuerza impulsiva unitaria* o *impulso unidad* una fuerza $F(t)$ que actúa durante un intervalo $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon$ tan pequeño, que durante el mismo el movimiento del punto de aplicación es despreciable, mientras que la fuerza es tan grande que

$$\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} F(t)\,dt = 1.$$

Estas condiciones se cumplen para

$$\text{[Ap. III-30]} \quad \Delta(t-\tau;\varepsilon) = \frac{1(t-\tau) - 1(t-\tau-\varepsilon)}{\varepsilon} =$$

$$= \begin{cases} = 0 & si\ t \leqslant \tau \\ = 1/\varepsilon & si\ \tau \leqslant t < \tau + \varepsilon \\ = 0 & si\ \tau + \varepsilon \leqslant t \end{cases}$$

pero las consideraciones anteriores sugieren buscar el límite de $\Delta(t-\tau;\varepsilon)$ para $\varepsilon \to 0$, reapareciendo las dificultades señaladas en § 1, *b*, para $\delta(x)$; y ciertas conclusiones formales conducen a considerar a [Ap. III-30] como una aproximación de la función de DIRAC $\delta(t-\tau)$, llamada entonces *función impulsiva unitaria* en el instante $t = \tau$. Por ejemplo, si $\varphi(t)$ es continua en $a \leqslant t \leqslant a + \varepsilon$ se tiene por el teorema del valor medio del cálculo integral (§ 48-6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cdot \Delta(t-a;\ \varepsilon)\, dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} \varphi(t)\, dt = \varphi(a+\theta\varepsilon)$$

con $0 < \theta < 1$, y haciendo $\varepsilon \to 0$ se reencuentra [Ap. III-25].

Por otra parte, observemos que la transformación de LAPLACE de [Ap. III-30] es por [XXIX-87]:

$$L\{\Delta(t-\tau;\ \varepsilon)\} = \frac{1}{p\varepsilon} [e^{-p\tau} - e^{-p(\tau+\varepsilon)}]$$

y para $\varepsilon \to 0$, aplicando la regla de L'HOSPITAL en el segundo miembro se reencuentra [Ap. III-29].

4. **Series de Fourier y transformación de Laplace.** — Consideremos la serie de FOURIER (s. F.) de una función $F(t)$ de período $T = 2\pi/\omega$ (§ 99-1):

[Ap. III-31] $$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad .$$

Considerando la función

[Ap. III-32] $$F_1(t) = \begin{cases} = F(t) \text{ } \textit{en el intervalo } 0 \leqslant t \leqslant T \ , \\ = 0 \text{ } \textit{fuera} \ , \end{cases}$$

y su transformada de LAPLACE

[Ap. III-33] $$f_1(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F_1(t)\, dt = \int_0^{T} e^{-pt} F(t)\, dt \quad ,$$

vemos que los coeficientes de FOURIER (c. F.) de $F(t)$ se expresan así:

[Ap. III-34] $$c_n = \frac{1}{T} \int_0^{T} F(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = \frac{1}{T} f_1(in\omega) = \frac{\omega}{2\pi} f_1(in\omega) \quad ,$$

y entonces para obtener la s. F. de una función $F(t)$ de período T, basta conocer la transformada de LAPLACE de $F_1(t)$ dada por [Ap. III-32].

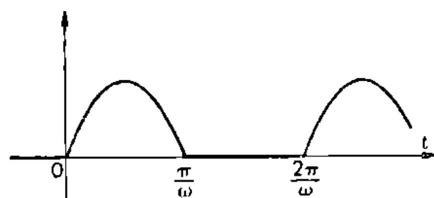


Fig. 452.

EJEMPLO 6. Desarrollo en s. F. de la función

[Ap. III-35] $$F(t) = \text{Máx}\{\text{sen}\, \omega t;\ 0\} \quad ,$$

representada por una sinusoide de la cual se han "suprimido las alternancias negativas" [*rectificación por semiondas* (i. half-wave rectification)]; (fig. 452).

Se tiene

$$F_1(t) = \begin{Bmatrix} = F(t) & \textit{en} & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi/\omega \\ = 0 & \textit{fuera} & \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} = \text{sen}\, \omega t & \textit{en} & 0 \leqslant t \leqslant \pi/\omega \\ = 0 & \textit{fuera} & \end{Bmatrix} =$$

$$= \text{sen}\, \omega t [1(t) - 1(t - \frac{\pi}{\omega})] =$$

$$= \text{sen}\, \omega t \cdot 1(t) - \text{sen}\, \omega (t - \frac{\pi}{\omega}) \cdot 1(t - \frac{\pi}{\omega}) \quad ,$$

de modo que por [XXIX-81] y [XXIX-103] resulta:

$$f_1(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} [1 + e^{-(\pi/\omega)t}] \quad ,$$

de donde, por [Ap. III-34]:

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi} \, f_1(in\omega) = \frac{1}{2\pi} \, \frac{1 + e^{-in\pi}}{1 - n^2} \, ,$$

y se obtiene la s. F.:

$$F(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{3}{2\pi} \cos 2\omega t - \ldots -$$

$$- \frac{2}{(4n^2 - 1)\pi} \cos 2n\omega t + \ldots$$

donde el coeficiente de $\operatorname{sen} \omega t$ se obtiene aplicando la regla de L'HOSPITAL a la expresión $(1 + e^{-in\pi})/(1 - n^2)$, indeterminada para $n = \pm 1$.

5. **Ecuaciones diferenciales ordinarias.** — *a*) Las relaciones de la transformación de LAPLACE con la derivación e integración, así como con la convolución de funciones (Cap. XXIX, nota VIII, *g*, *j*) conducen a importantes aplicaciones a la resolución de ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales de ciertos tipos, las cuales, consideradas como ecuaciones funcionales entre elementos del campo de las funciones-objeto $F(t)$, se traducen en ecuaciones funcionales, en general mucho más sencillas, entre elementos del dominio de las funciones-imágen $f(p)$. Resueltas estas últimas, las fórmulas y procedimientos de inversión (Cap. XXIX, nota VIII, *l*, *m*) permiten retornar al campo primitivo, obteniéndose así la solución de la ecuación originaria, y justificándose el procedimiento por la unicidad de la transformación.

Los procedimientos simbólicos de HEAVISIDE quedan así realizados y justificados con la transformación funcional de LAPLACE (cfr. 2).

b) Aquí nos limitaremos a las ecuaciones lineales de coeficientes constantes, para las cuales vimos un método simbólico en §§ 108-8 y 9, dando en *c* un ejemplo de aplicación del mismo método a un sistema de ecuaciones lineales.

b_1) Consideremos la ecuación de orden n en la función incógnita $Y = Y(t)$:

[Ap. III-36] $$a_0 Y^{(n)} + a_1 Y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} Y' + a_n Y = F(t), \quad (a_i \text{ constantes}, \ a_0 \neq 0),$$

con las condiciones iniciales

[Ap. III-37] $$Y(0) = c_0 \, , \ Y'(0) = c_1 \, , \ \ldots \, , \ Y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \, ,$$

que determinan unívocamente la solución (§§ 107-1 y 3).

Suponiendo que la función incógnita $Y(t)$ y sus derivados hasta el orden n sean L-transformables, sigue de la linealidad de L:

[Ap. III-38] $$a_0 L\{Y^{(n)}\} + a_1 L\{Y^{(n-1)}\} + \ldots + a_{n-1} L\{Y'\} + a_n L\{Y\} = f(p).$$

Pero de [XXIX-93], [XXIX-96] a [XXIX-98] y [Ap. III-37] sigue, poniendo $L\{Y\} = y(p) = y$:

a_n) $\quad L\{Y\} = y$
a_{n-1}) $\quad L\{Y'\} = py - c_0$
a_{n-2}) $\quad L\{Y''\} = p^2 y - c_0 p - c_1$
. . . .
a_0) $\quad L\{Y^{(n)}\} = p^n y - c_0 p^{n-1} - c_1 p^{n-2} - \ldots - c_{n-2} p - c_{n-1}$,

y reemplazando en [Ap. III-38], para lo cual se multiplica cada igualdad por el factor indicado a la izquierda y se suma, resulta la *ecuación transformada* (también llamada *ecuación subsidiaria*):

$$(a_n + a_{n-1} p + a_{n-2} p^2 + \ldots + a_0 p^n) \, y = f(p) + (a_{n-1} c_0 +$$
$$+ a_{n-2} c_1 + \ldots + a_0 c_{n-1}) + (a_{n-2} c_0 + \ldots + a_0 c_{n-2}) p + \ldots$$
$$+ (a_1 c_0 + a_0 c_1) p^{n-2} + a_0 c_0 p^{n-1} \, ,$$

de la forma:

[Ap. III-39] $$Q_n(p)y = f(p) + R_{n-1}(p)$$

siendo Q_n y R_{n-1} polinomios de grados indicados por los subíndices. Su solución (también llamada *solución operacional*, cfr. ej. 2) es:

[Ap. III-40] $$y = \frac{1}{Q_n(p)} \cdot f(p) + \frac{R_{n-1}(p)}{Q_n(p)} .$$

Como las dos fracciones racionales que aquí figuran son propias, son antitransformables (Cap. XXIX, nota VIII, m_1) mediante previa descomposición en fracciones simples. Poniendo $L^{-1}\{1/Q_n(p)\} = A(t)$ y $L^{-1}\{R_{n-1}(p)/Q_n(p)\} = B(t)$, por la linealidad de L^{-1} y [XXIX-114] sigue de [Ap. III-40]:

[Ap. III-41] $$Y = A(t) * F(t) + B(t)$$

EJEMPLO 7. Resolver la ecuación $Y'' + a^2Y = \operatorname{sen} \omega t$, $(\omega \neq a)$, con las condiciones iniciales: $Y(0) = c_0$, $Y'(0) = c_1$.

La ecuación transformada es:

$$(a^2 + p^2)y = L\{\operatorname{sen} \omega t\} + c_0p + c_1 = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} + c_0p + c_1$$

por [XXIX-81], y la solución operacional

$$y = \frac{\omega}{(a^2 + p^2)(p^2 + \omega^2)} + \frac{c_0p + c_1}{a^2 + p^2}$$

es ya una suma de fracciones propias, por ser *en este caso* $f(p) = \omega/(p^2 + \omega^2)$ función racional propia. En este caso, tampoco es necesario proseguir la descomposición hasta llegar a fracciones *simples*, pues se aplican [XXIX-80] y [XXIX-81], y de

$$y = \frac{\omega}{\omega^2 - a^2}\left\{\frac{1}{p^2 + a^2} - \frac{1}{p^2 + \omega^2}\right\} + \frac{c_0p + c_1}{a^2 + p^2}$$

se obtiene la solución del problema dado:

$$Y = \frac{1}{a(\omega^2 - a^2)}[\omega \operatorname{sen} ax - a \operatorname{sen} \omega x] + c_0 \cos ax + \frac{c_1}{a} \operatorname{sen} ax.$$

b_2) Haciendo $F(t) \equiv 0$, [Ap. III-41] se reduce a $Y = B(t)$ y entonces $B(t)$ es la solución de la ecuación homogénea correspondiente a [Ap. III-36] y con las mismas condiciones iniciales.

Para ver el significado de $A(t)$ retomemos la ecuación no homogénea [Ap. III-36] y supongamos que los valores iniciales son todos nulos. Entonces es $B(t) \equiv 0$ y [Ap. III-41] se reduce a:

[Ap. III-42] $$Y = A(t) * F(t) = \int_0^t A(t-u)F(u)\,du \quad .$$

Suponiendo ahora que $F(t)$ sea una función impulsiva unitaria en el instante $t = \tau$:

$$F(t) = \delta(t - \tau)$$

resulta

$$Y = A(t) * \delta(t - \tau) = A(t - \tau) \cdot 1(t - \tau) \quad ,$$

es decir, un impulso unitario en el instante τ, genera la solución $A(t - \tau) \cdot 1(t - \tau)$. En otras palabras, si se aplica un impulso unitario en un instante τ y se observa la respuesta en un instante posterior t; ésta, $A(t - \tau)$, no depende de t ni de τ separadamente, sino sólo de la diferencia $t - \tau$. Esta propiedad es consecuencia de que los coeficientes de [Ap. III-36] son constantes, y no sólo da una interpretación de $A(t)$ sino que hace intuitiva la solución [Ap. III-42], imaginando descompuesto el intervalo $0 \leqslant u \leqslant t$ en intervalos infinitésimos $(u, u + du)$ y $F(t)$ en impulsos

infinitésimos $\delta(t-u).F(u)du$; resulta así [Ap. III-42] por el principio de superposición, consecuencia de la linealidad de [Ap. III-36].

c) Veamos en un ejemplo cómo se aplica el mismo método a sistemas de ecuaciones diferenciales. Un estudio detenido puede verse en GHIZZETTI (citado en Cap. XXV, nota IV, 6).

EJEMPLO 8. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$Y' + Y + Z' = 0 \quad , \quad Y' - Y + 2\,Z' = e^{-x} \quad ,$$

con las condiciones $Y(0) = c_0$, $Z(0) = 0$.

Las ecuaciones transformadas son:

$$(p+1)y + pz = c_0 \quad , \quad (p-1)y + 2pz = \frac{1}{p+1} + c_0.$$

Calculando, por ejemplo, y, y descomponiendo en fracciones simples, resulta:

$$y = \frac{c_0}{p+3} - \frac{\frac{1}{2}}{p+1} + \frac{\frac{1}{2}}{p+3}$$

y por [XXIX-79]:

$$Y = (c_0 + \tfrac{1}{2})e^{-3x} - \tfrac{1}{2}\,e^{-x} \quad .$$

Reemplazando en la primera ecuación del sistema y teniendo en cuenta $Z(0) = 0$, resulta

$$Z = -\tfrac{1}{3}(2c_0 + 1)\,(e^{-3x} - 1) \quad .$$

6. **Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.** — La transformación de LAPLACE es uno de los recursos más eficaces para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden de tipos parabólico e hiperbólico. Por ejemplo en la ecuación de la cuerda vibrante (§ 112-6, *a*)

[Ap. III-43] $$U_{xx} = \frac{1}{c^2}\,U_{tt}$$

podemos aplicar el método dado en 5, efectuando la transformación L sobre la función incógnita $U(x, t)$ considerada como función de una variable (por ejemplo t) y dejando la otra como parámetro. La ecuación transformada o subsidiaria no será ya algebraica sino otra vez una ecuación diferencial, pero ordinaria, en la variable que quedó como parámetro.

Tendremos así, siendo $u = u(x, p)$ la transformada de LAPLACE de la función de t, $U(x, t)$, la ecuación transformada de [Ap. III-43]:

[Ap. III-44] $$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2}\,.\,u = -\frac{p}{c}\,.\,U(x, 0) - \frac{1}{c}\,U_t(x, 0) \quad .$$

Las condiciones *iniciales* para [Ap. III-43] determinan el segundo miembro de [Ap. III-44] y las condiciones *de contorno* de [Ap. III-43] se traducen en condiciones para [Ap. III-44].

EJEMPLO 9. Consideremos una cuerda infinita en un sentido, inicialmente en reposo y superpuesta con el semieje $x \geqslant 0$, es decir, tendremos las *condiciones iniciales*.

[Ap. III-45] $$U(x, 0) = U_t(x, 0) = 0 \quad , \quad 0 \leqslant x < \infty \quad .$$

Supondremos además que el extremo $x = 0$ se mueve de una manera preestablecida, estando fijo el "extremo $x = \infty$", es decir, que se cumplen las *condiciones de contorno*:

[Ap. III-46] $$U(0, t) = F(t) \quad , \quad \lim_{x \to \infty} U(x, t) = 0 \quad ,$$

siendo $F(t)$ una función prefijada del tiempo.

La ecuación transformada de [Ap. III-44] será por [Ap. III-45]:

[Ap. III-47] $$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{p^2}{c} u = 0 \quad ,$$

y llamando $f(p)$ a la transformada de $F(t)$, tendremos por [Ap. III-46] las condiciones para [Ap. III-47]:

[Ap. III-48] $$u(0, p) = f(p) \quad , \quad \lim_{x \to \infty} u(x, p) = 0 \quad .$$

En el problema transformado, p figura como un parámetro. La solución general de [Ap. III-47] es

[Ap. III-49] $$u(x, p) = A(p) e^{px/c} + B(p) e^{-px/c}$$

siendo A y B constantes de integración, que dependen del parámetro p. Las condiciones [Ap. III-48] dan

$$A(p) = 0 \quad , \quad B(p) = f(p) \quad ,$$

y la solución del "problema transformado" es:

[Ap. III-50] $$u(x, p) = f(p) \cdot e^{-px/c} \quad .$$

Finalmente, como $L^{-1}\{f(p)\} = F(t)$, se tiene por [XXIX-103] la antitransformada de la función $u(x, p)$ dada por [Ap. III-50]

$$U(x, t) = \begin{cases} = 0 & si\ t < x/c \\ = F(t - \frac{x}{c}) & si\ t \geqslant x/c \end{cases} \quad .$$

Se verifica fácilmente que ésta es la solución de nuestro problema, es decir, de la ecuación diferencial [Ap. III-43] con las condiciones iniciales y de contorno, y la forma de esta solución muestra que la perturbación en $x = 0$, dada por $F(t)$, se propaga a lo largo del eje x con velocidad c (cfr. § 112-7).

7. **Símbolo operatorio y transformación de** Carson. — *a*) Ya en el cálculo operacional de Heaviside juegan importante papel los polinomios y series de potencias en $1/D$ (ver ejemplo 2). Indiquemos con q el operador D^{-1} definido (ver 1, *a*) por $q\,f(t) = \int_0^t f(x)\,dx$. Con sus iterados $q^n = D^{-n}$ definidos por [Ap. III-1] se puede formar el operador $P(q)$ siendo P un polinomio:

[Ap. III-51] $$P(q)f = (a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n) f =$$
$$= a_0 f(t) + \int_0^t \left[a_1 + a_2 \frac{t-\tau}{1!} + \ldots + a_n \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \right] f(\tau)\, d\tau \quad .$$

Para una función definida por

[Ap. III-52] $$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ , con } |a_n| < K\, h^n \text{ , K y } h \text{ constantes} \quad ,$$

donde esta acotación de $|a_n|$ asegura que la serie de potencias tenga radio de convergencia no nulo, definiremos (generalizando [Ap. III-51]) el *símbolo operatorio* $G(q)$ por:

[Ap. III-53] $$G(q)f = a_0 f(t) + \int_0^t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \right\} f(\tau)\, d\tau \quad ,$$

y la serie entre llaves representa una función entera en virtud de la acotación de los coeficientes dada en [Ap. III-52].

Aplicada a la función de Heaviside $\mathbf{1}(t)$ en lugar de f, [Ap. III-53]

da la *respuesta al salto unidad* o *respuesta transitoria* o *unitaria* o *admitancia indicial* del operador G(q):

[Ap. III-54] $$G(q)1 = [a_0 + a_1 \frac{t}{1!} + a_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots]\, 1(t) = g(t)1(t)$$

y [Ap. III-53] muestra que mediante esta función $g(t) = \Sigma a_n \frac{t^n}{n!}$ se puede expresar la transformada de $f(t)$ así:

[Ap. III-55] $$G(q)f = a_0 f(t) + g'(t) * f(t) = g(0)f(t) + \int_0^t g'(t-\tau)f(\tau)\,d\tau \quad ,$$

o bien:

[Ap. III-56] $$G(q)f = \frac{d}{dt}\,[g * f] \quad .$$

Mediante [Ap. III-54] se obtiene la respuesta a la función $\Delta(t;\varepsilon) = [1(t) - 1(t-\varepsilon)]/\varepsilon$ definida en 3, *c*:

$$G(q)\Delta(t;\varepsilon) = \frac{g(t) - g(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

de modo que la *respuesta al impulso unidad* o *respuesta percusional* será, para $\varepsilon \to 0$:

[Ap. III-57] $$G(q)\delta(t) = g'(t)$$

y el resultado anterior dado por [Ap. III-55] o [Ap. III-56] corresponde a una descomposición de $f(t)$ en impulsos infinitésimos, para calcular su respuesta por el principio de superposición (cfr. 5, b_2).

b) En virtud de [XXIX-84] se tiene:

[Ap. III-58] $$L\{g(t)1(t)\} = L\{g(t)\} = L\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}} = \frac{1}{p}\, G\left(\frac{1}{p}\right)$$

de modo que considerando la llamada *transformación de* CARSON, definida por

[Ap. III-59] $$p\,.\,L\{F(t)\} = p\int_0^{\infty} e^{-pt}F(t)\,dt = \varphi(p) \quad ,$$

vemos que, *aplicada a la respuesta unitaria, da como resultado la función* $G(1/p)$ *que resulta de reemplazar* $q = D^{-1}$ *por* p^{-1} (*es decir* D *por* p) *en el símbolo operatorio* G(q).

NOTAS: 1. HEAVISIDE resumió lo esencial de sus procedimientos formales en tres enunciados recetarios llamados hoy *reglas de* HEAVISIDE. El enunciado precedente corresponde a la segunda; de [Ap. III-58] sigue que la *antitransformada de* CARSON de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ es $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$, y HEAVISIDE efectuaba formalmente el paso de un desarrollo a otro en base a [Ap. III-7], indicando con p el operador D (*segunda regla de* HEAVISIDE).

La *primera regla de* HEAVISIDE consiste en la "algebrización" de la descomposición en fracciones simples de una función racional del operador D (ver 1, a_2), y formalizada mediante la transformación de LAPLACE, puede extenderse a funciones trascendentes de D con la teoría de los residuos de funciones analíticas.

La *tercera regla de* HEAVISIDE corresponde, en la formalización con la

transformación de CARSON, a hallar la antitransformada de una serie de la forma

[Ap. III-60] $$\varphi(p) = \sqrt{p}\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^{n+\frac{1}{2}} \quad .$$

Con la teoría de la función Gamma (Cap. XXIX, nota VII) se generaliza [XXIX-84] para r no entero en la forma $L\{t^r\} = \Gamma(r+1)/p^{r+1}$ y entonces la antitransformada de CARSON de $1/p^r$ es $t^r/\Gamma(r+1)$. Teniendo en cuenta [XXIX-41]: $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$, y [XXIX-44]: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, la antitransformada de CARSON de [Ap. III-60] resulta:

[Ap. III-61] $$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\left[a_0 - \frac{a_1}{2t} + \frac{1.3.a_2}{(2t)^2} - \frac{1.3.5.a_3}{(2t)^3} + \dots\right] .$$

En realidad HEAVISIDE hacía corresponder *al operador*

[Ap. III-62]
$$\Psi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n p^{n/2} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} p^k + p^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} p^k \quad , \quad (p = D) \quad ,$$

aplicado a $1(t)$, la *respuesta* (*transitoria* o *unitaria*):

[Ap. III-63] $$b_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\left[b_1 - \frac{b_3}{2t} + \frac{1.3.b_5}{(2t)^2} - \frac{1.3.5.b_7}{(2t)^3} + \dots\right] ,$$

dando un significado a potencias fraccionarias de $p = D$, y obteniendo así desarrollos asintóticos válidos para grandes valores de t.

2. En los primeros trabajos para justificar los métodos formales de HEAVISIDE debidos a J. R. CARSON (Physical Review, *10*, 1917, p. 217), se utiliza, más que la transformación de LAPLACE, la transformación [Ap. III-59]. Debido a que en muchos casos su inversa, aplicada a $\varphi(p)$, coincide con la respuesta transitoria de $\varphi(D)$ (ver nota 1), muchos autores modernos, siguiendo a K. W. WAGNER y T. J. I'A. BROMWICH, basan el cálculo operacional en esa transformación de CARSON (que algunos llaman de LAPLACE). A la fórmula de inversión de MELLIN [XXIX-120] para la transformación de LAPLACE, corresponde la fórmula de inversión de la transformación de CARSON

[Ap. III-64] $$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\varphi(p)e^{pt}}{p}\, dp \quad ,$$

también llamada *integral de* BROMWICH-WAGNER.

En la transformación de CARSON, la función de HEAVISIDE es autotransformada, y la integral de BROMWICH-WAGNER para ella es

[Ap. III-65] $$1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{e^{pt}}{p}\, dp \quad .$$

8. **Cálculo operacional y transformación de Fourier.** — La justificación de los procedimientos operatorios de HEAVISIDE puede también obtenerse con otras transformaciones funcionales como la de LAPLACE bilateral L_{II} (ver p. ej. VAN DER POL y BREMMER, citado en Cap. XXV, nota IV, 6, y cfr. 9) o la transformación de FOURIER, como señalaremos brevemente en este apartado.

a) *Respuesta de un circuito a una* f.e.m. *arbitraria periódica.* — En la solución operacional [Ap. III-13] de la ecuación diferencial [Ap. III-9] el cociente entre la f.e.m. aplicada $E(t) = E_0 e^{i(\omega t+\alpha)} 1(t)$ y la respuesta $I(t)$ del circuito, o *impedancia compleja* del circuito para la pulsación ω, es el operador lineal en D:

[Ap. III-66] $$Z(\omega) = R + L(D + i\omega) \quad ,$$

y [Ap. III-13] puede escribirse

[Ap. III-67] $$I(t) = \frac{E(t)}{Z(\omega)} .$$

El conocimiento de la impedancia [Ap. III-66] para toda pulsación ω, permite obtener la respuesta del circuito para una f.e.m. periódica arbitraria, descomponiéndola en componentes sinusoidales, es decir, representándola en s.F., y aplicando a [Ap. III-67] el principio de superposición. Si es T el período de la f.e.m. $E(t)$, poniendo $\omega_0 = 2\pi/T$ tendremos la s.F. compleja

[Ap. III-68] $$E(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} E_n e^{in\omega_0 t} ,$$

con c.F. dados por:

[Ap. III-69] $$E_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} E(t)\, e^{-in\omega_0 t}\, dt .$$

En virtud de [Ap. III-67] y el principio de superposición, la solución de $RI + L(dI/dt) = E(t)$ con $E(t)$ dada por [Ap. III-68] será:

[Ap. III-70] $$I(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{E_n e^{in\omega_0 t}}{R + L(D + in\omega_0)} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{E_n}{Z(n\omega_0)}\, e^{in\omega_0 t} ,$$

y en esta s.F. los c.F. resultan de los de $E(t)$ dividiendo por la impedancia compleja la correspondiente frecuencia.

b) *Respuesta a una* f.e.m. *no periódica.* — Veamos qué ocurre si en el caso anterior *a*, hacemos $T \to \infty \therefore \omega_0 = 2\pi/T \to 0$. De [Ap. III-68] y [Ap. III-70] sigue:

[Ap. III-71] $$E(t) = \lim_{\omega_0 \to 0} \sum_{-\infty}^{\infty} E_n e^{in\omega_0 t} ,$$

[Ap. III-72] $$I(t) = \lim_{\omega_0 \to 0} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{E_n}{Z(n\omega_0)}\, e^{in\omega_0 t} .$$

Poniendo $\omega = n\omega_0$, $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$, $E_n = \omega_0 F(\omega)$, resulta (cfr. § 99-2):

[Ap. III-73] $$E(t) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega ,$$

y como $F(\omega) = E_n/\omega_0 = E_n \cdot T/(2\pi)$ resulta de [Ap. III-69] para $T \to \infty$;

[Ap. III-74] $$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(t)\, e^{-i\omega t} dt .$$

Por otra parte resulta de [Ap. III-72]

[Ap. III-75] $$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{Z(\omega)}\, e^{i\omega t} d\omega .$$

Calculada $F(\omega)$ por [Ap. III-74] como transformada de FOURIER (§ 99-4) de la f.e.m. $E(t)$, [Ap. III-75] expresa la respuesta $I(t)$ como transformada (en sentido contrario) de $F(\omega)/Z(\omega)$. Dicho de otro modo, descompuesta $E(t)$ en componentes armónicas, $F(\omega)d\omega$ es la contribución de aquéllas con frecuencias comprendidas entre ω y $\omega + d\omega$, y por [Ap. III-75] la contribución de aquéllas a la respuesta $I(t)$ es $[F(\omega)/Z(\omega)]\, d\omega$.

9. Método operacional para inversión de transformaciones integrales. — *a*) Análogamente a la convolución (sobre intervalo finito) introducida en Cap. XXIX, nota VIII, *j*:

[Ap. III-76] $$G * \Phi = \int_0^t G(\tau)\ \Phi(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t G(t-\tau)\ \Phi(\tau)\, d\tau ,$$

si las funciones G y Φ están definidas en $(-\infty, \infty)$ podemos definir la *convolución* o *producto de composición sobre intervalo infinito*:

[Ap. III-77]
$$\varphi(t) = G \circ \Phi =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)\, \Phi(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)\, \Phi(\tau)\, d\tau \quad ,$$

que en la teoría de las transformaciones de LAPLACE bilateral L_{II}, y de FOURIER, juega un papel análogo al de [Ap. III-76] en la de L.

Observemos que si $G(t)$ y $\Phi(t)$ son nulas para $t < 0$, [Ap. III-77] se reduce a [Ap. III-76].

Para $G(t)$ fija [Ap. III-77] define una transformación funcional que hace pasar de Φ a φ, la llamaremos *transformación integral por convolución*, de *núcleo* $G(t)$. Observemos en los ejemplos siguientes, que muchas de las transformaciones integrales usuales son de este tipo general.

EJEMPLOS: 10. *Transformación de* LAPLACE. — Haciendo en

$$f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t)\, dt, \quad t = e^{-u},\ p = e^{x}, \text{ resulta:}$$

$$f(e^x) = -\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-e^{x-u}} F(e^{-u})\, e^{-u} du,$$

de donde:

[Ap. III-78]
$$f(e^x)\,.\,e^x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{x-u}} e^{x-u} F(e^{-u})\, du = [e^{-e^x}\,.\,e^x] \circ F(e^x) \quad ,$$

de modo que se pasa de $F(e^x)$ a $f(e^x)\,.\,e^x$ por una transformación por convolución, de núcleo e^{x-e^x}.

11. Las transformaciones integrales de la forma

[Ap. III-79]
$$f(p) = \int_0^{\infty} K(pt)\, F(t)\, dt$$

que dan las transformaciones de LAPLACE, de FOURIER-coseno [99-13] y de FOURIER-seno [99-16] para los núcleos $K(x) = e^{-x}$, $\sqrt{2/\pi}\cos x$, $\sqrt{2/\pi}\,\mathrm{sen}\, x$ respectivamente (y también otras usuales de HANKEL y de MEIJER, con núcleos funciones de BESSEL) se reducen también a la forma [Ap. III-77] con el cambio exponencial de variables $t = e^{-u}$, $p = e^{x}$. Resulta (cfr. ej. 10):

$$f(e^x)\,.\,e^x = \int_{-\infty}^{\infty} K(e^{x-u})\,.\,e^{x-u} F(e^{-u})\, du = [K(e^x)\,.\,e^x] \circ F(e^x) \quad .$$

12. La *transformación de* WEIERSTRASS:

[Ap. III-80]
$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}(t-\tau)^2}\, \Phi(\tau)\, d\tau$$

que se presenta en la teoría de la conducción del calor y de la difusión y fué usada por WEIERSTRASS en la primera demostración de su célebre teorema sobre aproximación uniforme de una función continua mediante polinomios, es ya de la forma [Ap. III-77] con núcleo $G(t) = (4\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-t^2/4}$. Se la llama también transformación de GAUSS y da una descomposición de $\varphi(t)$ en curvas de GAUSS (Ap. IV) de igual dispersión, con "densidad" $\Phi(\tau)$ en la media τ.

b) Llamando $g(p)$ a la transformación de LAPLACE *bilateral* del núcleo G de [Ap. III-77]:

[Ap. III-81]
$$g(p) = L_{II}\{G(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} G(t)\, dt \quad ,$$

veremos que el operador $g(D)$ efectúa la transformación funcional

[Ap. III-77]. En efecto, se tiene por [Ap. III-3], donde D indica derivación respecto de u:

[Ap. III-82]
$$g(D)\Phi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tD}\Phi(u)G(t)\,dt = $$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u-t)G(t)\,dt = \varphi(u) \quad .$$

Esta relación conduce a una "inversión operacional" de la transformación [Ap. III-77]:

[Ap. III-83]
$$\Phi(u) = \frac{1}{g(D)}\varphi(u) \quad ,$$

que se podrá "algebrizar" (ej. 2) toda vez que pueda darse una interpretación adecuada al operador $1/g(D)$.

EJEMPLO 13. En la transformación de WEIERSTRASS [Ap. III-80] la transformada L_{II} del núcleo es

$$g(p) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt}\, e^{-\frac{1}{4}t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, e^{p^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{1}{2}t+p)^2}dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, e^{p^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u+p)^2}\,du \quad , \quad (\tfrac{1}{2}t = u) \quad ,$$

y aplicando, si u no es real, § 115-ejercicio 5, resulta:

[Ap. III-84]
$$g(p) = e^{p^2} \quad ,$$

La inversión operacional de [Ap. III-80] será entonces por [Ap. III-83]:

[Ap. III-85]
$$\Phi(u) = e^{-D^2}\varphi(u)$$

e interpretando e^{-D^2} como $\sum(-D^2)^n/n!$ llegamos a la fórmula de inversión de [Ap. III-80]:

[Ap. III-86]
$$\Phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,\varphi^{(2n)}(u) \quad ,$$

obtenida en 1914 por A. S. EDDINGTON formalmente y sin dar condiciones de validez. La transformación de WEIERSTRASS fué estudiada a fondo por E. HILLE (*A class of reciprocal functions*, Annals of Math., *27*, 1926, pág. 427-464), obteniendo diversas fórmulas de inversión en forma rigurosa A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (*Contrib. a la teoría de las funciones de* HILLE; Ciencia y Técnica, *42*, 1941, pág. 283-331, Bs. As.), H. POLLARD (*Representation as a Gaussian integral*; Duke Math. Journal, *10*, 1943, pág. 59-65), D. V. WIDDER (*Neccesary and sufficient conditions for the representation of a function by a* WEIERSTRASS *transform*; Trans. Am. Math. Soc., *71*, 1951, pág. 430-439).

NOTA 3. La inversión operacional de [Ap. III-80] dada por [Ap. III-85] puede algebrizarse de maneras totalmente distintas. Se tiene por ejemplo (§ 115-ejercicio 3):

[Ap. III-87]
$$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/4}\cos tx\,dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/4}\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{t^{2n}}{(2n)!}\,x^{2n}\Big\}dt$$

de suerte que interpretando e^{-D^2} mediante sustitución de x por D en el último miembro, se tiene la fórmula de inversión

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/4}\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \varphi^{(2n)}(u)\}dt$$

obtenida con sus condiciones de validez por WIDDER en 1951.

10. **Distribuciones.** — *a) Ampliación del concepto de función por el de funcional lineal de su producto escalar.* — Veamos ahora cómo puede darse un sentido preciso al cálculo simbólico de DIRAC (1, *b*), a las funciones impulsivas (3, *c*), y ampliar el campo de las antitransformadas de LAPLACE (cfr. Cap. XXIX, nota VIII, *m*) mediante una adecuada ampliación del concepto de función.

Sea [L] la clase de las funciones $f(x)$ de una variable real, sumables LEBESGUE (§ 95-1, *b*) en cada intervalo finito, y C la clase de las funciones $\varphi(x)$ continuas en $(-\infty, \infty)$ y nulas fuera de un intervalo finito (no necesariamente el mismo para todas).

Para cada $f(x)\varepsilon[L]$, el *producto escalar* (cfr. Cap. XVII, nota II, *a*) definido por

[Ap. III-88] $$(\varphi, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, f(x)\, dx \quad ,$$

es un *funcional lineal* (Cap. XVII, nota I, c_1) definido en C pues a cada $\varphi(x)\varepsilon C$ corresponde un número (φ, f), y se verifica:

[Ap. III-89] $$(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, f) = c_1(\varphi_1, f) + c_2(\varphi_2, f)$$

si $\varphi_i\varepsilon C$ y las c_i son constantes $(i = 1, 2)$.

Diremos que

[Ap. III-90] $$\varphi_j(x) \to \varphi(x) \ \textit{en}\ C$$

si las $\varphi_j(x)\varepsilon C$ son todas nulas fuera de *un mismo* intervalo, y convergen uniformemente en él hacia una función $\varphi(x)\varepsilon C$. Entonces el funcional [Ap. III-88] es además *continuo en* C en el sentido siguiente:

[Ap. III-91] *De* [Ap. III-90] *sigue* $(\varphi_j, f) \to (\varphi, f)$.

En general, el funcional $L(\varphi)$ es continuo en C si

[Ap. III-92] *De* [Ap. III-90] *sigue* $L(\varphi_j) \to L(\varphi)$.

No sólo cada $f\varepsilon[L]$ determina el funcional lineal (φ, f) continuo en C, sino que recíprocamente, considerando como idénticas las funciones casi iguales o equivalentes (L) (§ 95-2), el funcional lineal [Ap. III-88] determina unívocamente la función $f(x)$ pues si fuera para todo $\varphi\varepsilon C$:

[Ap. III-93] $$(\varphi, f) = (\varphi, f^*) \quad ,$$

tomando una sucesión $\varphi_k(x)$ convergente hacia la función característica (§ 94-1, *a*) del intervalo $r \leqslant x \leqslant s$, tendremos

[Ap. III-94] $$\int_r^s f(x)\,dx = \int_r^s f^*(x)\,dx \quad ,$$

cualesquiera sean r y s, y entonces $f(x)$ y $f^*(x)$ son casi iguales.

Pero veremos en *b*, que existen funcionales lineales continuos en C, no expresables en la forma [Ap. III-88], de suerte que si *identificamos* cada función $f(x)\varepsilon[L]$ con el funcional [Ap. III-88] que define, el conjunto de todos los funcionales lineales continuos en C nos dará una *ampliación* del concepto de función de la clase [L], de igual manera que como la identificación [9-3] del complejo $(a_1, 0)$ con el número real a_1 permite considerar al campo complejo como una ampliación del campo real.

b) Funcionales lineales continuos en C. *Medidas.* — Si se da en $(-\infty, \infty)$ la función de distribución $\mu(x)$ (creciente, o aún de variación acotada) y se construye (Cap. XXIV, nota II, b_1) la función aditiva de

conjunto $\mu(X)$ única, coincidente en todo intervalo $I = (a, b)$ con la función de intervalo $\mu(I) = \mu(b) - \mu(a)$, estará definida para toda función $\varphi \varepsilon C$ la integral de LEBESGUE-STIELTJES (en realidad sobre intervalo finito):

[Ap. III-95] $$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ d\mu(x) = \mu[\varphi]$$

con respecto a la *medida* μ.

También [Ap. III-95] define para cada μ un funcional lineal continuo en C, el cual en general no podrá expresarse en la forma [Ap. III-88]. En cambio si $\mu(x)$ es absolutamente continua, será por Cap. XXIV, nota II, b_1:

$$(L - St) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ d\mu(x) = (L) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \mu'(x)\ dx \quad ,$$

o sea

[Ap. III-96] $\mu[\varphi] = (\varphi, \mu')$, ($\mu$ *absolutamente continua*),

en cuyo caso se dice que la medida μ tiene *densidad* $\mu'(x)$.

Por el célebre teorema de F. RIESZ (§ 78-7) *todo* funcional lineal $L(\varphi)$ continuo en C es expresable en la forma [Ap. III-95], es decir, existe una medida μ (única como función de conjunto, y definida a menos de una constante aditiva como función de punto) tal que $L(\varphi) = \mu[\varphi]$. Como [Ap. III-88] puede ponerse en la forma [Ap. III-95] con $\mu(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, si identificamos la medida μ con el funcional $\mu[\varphi]$, podemos decir que *toda* [funcional definida por una] *función* f *es una medida* μ, pero la recíproca no es cierta, de suerte que el concepto de *medida* es más amplio que el de *función*.

NOTA 4. En realidad la medida es una generalización de la noción de clase de funciones casi iguales, sumables en todo intervalo $[a, b]$. Por ejemplo a $1/x$ no corresponde ninguna medida, pues $1/x$ no es sumable en un entorno de $x = 0$.

EJEMPLOS: 14. La *medida de* DIRAC es la definida por el funcional lineal continuo en C (cfr. [Ap. III-24]):

[Ap. III-97] $$\delta(\varphi) = \varphi(0) \quad , \quad \varphi \varepsilon C \quad ,$$

y por la primera igualdad [Ap. III-26] corresponde a la función de distribución $\mu(x) = 1(x)$, que con la interpretación física vista en Cap. XXIV, nota I, a, corresponde a una masa 1 concentrada en $x = 0$. Como esta función $1(x)$ de HEAVISIDE no es absolutamente continua (ni continua), *la medida de* DIRAC *no es una función*. Es $\delta(\varphi) = 1[\varphi]$, pero DIRAC (ver [Ap. III-24]) escribe $\delta(\varphi) = (\varphi, \delta)$, de modo que si a $1(x)$ pudiera aplicarse [Ap. III-96] se tendría $(\varphi, \delta) = 1[\varphi] = (\varphi, 1)$, de donde la relación usada por DIRAC y (por ahora) sin sentido:

[Ap. III-98] $$\delta = 1' \quad .$$

En Ej. 16 daremos un sentido y demostraremos esta relación [Ap. III-98].

15. Análogamente, la medida definida por el funcional

[Ap. III-99] $$\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$$

corresponde en virtud de la segunda igualdad [Ap. III-26] a la función de distribución $\mu(x) = 1(x - a)$, o a una masa 1 concentrada en $x = a$.

c) Ampliación del campo de funcionales por reducción del dominio de continuidad. Distribuciones. — Si en [Ap. III-88] $f(x)$ admite derivada $f'(x) \varepsilon [L]$, a esta derivada corresponde también un funcional lineal (φ, f'),

de modo que si también φ admite derivada $\varphi'(x)\varepsilon C$, tendremos por integración por partes:

$$(\varphi, f') = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f'(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) f(x) dx = -(\varphi', f) \quad .$$

Esta relación sugiere la conveniencia de *definir* la *derivada* de *todo* funcional lineal $L(\varphi)$ (aunque no sea expresable en la forma [Ap. III-88]) por:

[Ap. III-100] $$L'(\varphi) = -L(\varphi') \quad ,$$

pero entonces restringiremos el conjunto de las funciones $\varphi(x)$ a una clase de funciones con derivada $\varphi'(x)$ perteneciente a la misma clase, lo que conduce a la *clase* **D** de las *funciones de prueba*, indefinidamente derivables en $(-\infty, \infty)$ y nulas fuera de un intervalo finito (no el mismo para todas).

Diremos (Cfr. [Ap. III-90]) que

[Ap. III-101] $$\varphi_j(x) \rightarrow \varphi(x) \text{ en } \mathbf{D} \quad ,$$

si las $\varphi_j(x)\varepsilon \mathbf{D}$, son todas nulas fuera de *un mismo* intervalo, y en él es uniformemente:

[Ap. III-102] $$\begin{cases} \varphi_j(x) \rightarrow \varphi(x)\varepsilon \mathbf{D} \quad , \\ \varphi_j^{(r)}(x) \rightarrow \varphi^{(r)}(x), \qquad (r = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Además (cfr. [Ap. III-92]) diremos que el funcional $L(\varphi)$ es *continuo en* **D**, si:

[Ap. III-103] *De* [Ap. III-101] *sigue* $L(\varphi_j) \rightarrow L(\varphi)$.

Toda función de **D** es de **C**, pero [Ap. III-101] exige mucho más que [Ap. III-90] y en consecuencia [Ap. III-103] *menos* que [Ap. III-92]. Por tanto, los funcionales lineales continuos en **D**, que llamaremos *distribuciones*, forman una clase mucho más amplia que los de los continuos en **C**. Toda medida, y en particular toda función de [L], es una distribución, pero *hay distribuciones que no son funciones ni medidas* (ver ejemplo 17).

Toda distribución $L(\varphi)$, $\varphi\varepsilon \mathbf{D}$, admite derivada primera definida por [Ap. III-100], y las infinitas derivadas

[Ap. III-104] $$L^{(n)}(\varphi) = (-1)^n L(\varphi^{(n)}), \quad \varphi\varepsilon \mathbf{D} \quad ,$$

En particular, toda función (ε[L]), considerada como distribución, admite infinitas derivadas.

EJEMPLOS: 16. De $(\varphi, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) 1(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$ resulta, aplicando la definición de derivada

[Ap. III-105] $$(\varphi, 1') = -(\varphi', 1) = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) \quad ,$$

que demuestra [Ap. III-98].

17. Las derivadas de la medida de DIRAC $\delta(\varphi)$ definida por [Ap. III-97] son (cfr. [Ap. III-27]):

[Ap. III-106]
$$\begin{cases} \delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0), \ \delta''(\varphi) = -\delta'(\varphi') = +\varphi''(0), \\ , \ldots, \ \delta^{(r)}(\varphi) = (-1)^r \varphi^{(r)}(0), \ \ldots \quad . \end{cases}$$

d) *Propiedades fundamentales de la clase* **D** *y de las distribuciones.* — d_1) La clase **D** es suficientemente restringida como para que toda distribución (y en particular toda función de [L] o toda medida) admita infini-

tas derivadas [Ap. III-104]. Pero por otra parte veremos ahora que es suficientemente amplia como para que si (cfr. a):

$$\text{[Ap. III-107]} \qquad (\varphi, f) = (\varphi, f^*) \text{ para toda } \varphi \varepsilon \mathbf{D} \quad ,$$

sean $f(x)$ y $f^*(x)$ casi iguales.

En efecto, para todo $r < s$ y n entero pertenecen a **D** las funciones

$$\varphi_{r,s,n}(x) = \begin{cases} = \exp\left[-\dfrac{1}{n(x-r)} - \dfrac{1}{n(s-x)}\right] & si \quad r < x < s \quad , \\ = 0 \quad si \quad x \leqslant r \quad ó \quad x \geqslant s \quad , \end{cases}$$

donde $\exp(t) = e^t$; y como

$$\lim_{n \to \infty} (\varphi_{r,s,n}, f) = \int_r^s f(x)\,dx, \quad \lim_{n \to \infty} (\varphi_{r,s,n}, f^*) = \int_r^s f^*(x)\,dx \quad ,$$

de [Ap. III-107] sigue [Ap. III-94] para todo r, s, y entonces f y f* son casi iguales.

d_2) Las funciones $\varphi \varepsilon \mathbf{D}$ forman un espacio vectorial (Cap. II, nota, III, b, y Cap. XVII, nota 1) si definimos $\varphi_1 + \varphi_2$ y $a\varphi$ por las funciones $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ y $a \cdot \varphi(x)$, también de **D**. Sea $\mathbf{D}_0 = \mathbf{C}$, y $\mathbf{D}_m$ el espacio vectorial de las funciones con derivadas continuas hasta el orden m inclusive en $(-\infty, \infty)$ y nulas fuera de un intervalo finito (no el mismo para todas). Es

$$\mathbf{C}(\geqslant)\mathbf{D}_1(\geqslant) \;\ldots\; (\geqslant)\mathbf{D}_m(\geqslant)\mathbf{D}$$

y **D** es la intersección de todos los $\mathbf{D}_m$.

Para los espacios duales $\mathbf{D}^*$, $\mathbf{D}_m^*$ (Cfr. Cap. XVII, nota I, c_2) de los funcionales lineales continuos en **D** o en $\mathbf{D}_m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) es:

$$\mathbf{D}_0^*(\leqslant)\mathbf{D}_1^*(\leqslant) \;\ldots\; (\leqslant)\mathbf{D}_m^*(\leqslant) \;\ldots\; (\leqslant)\mathbf{D}^* \quad .$$

Una distribución es un elemento de **D** y se llamará *de orden m* si pertenece a $\mathbf{D}_m$ pero no a $\mathbf{D}_{m-1}$; una función de [L] es una *distribución de orden* 0, y una medida que no sea una función, es una *distribución de orden* 1.

d_3) *Soporte de una función.* — Se llama *soporte* Σ de una función $\varphi(x) \varepsilon \mathbf{C}$ a la clausura (Cap. VI, nota II, d) del conjunto de los puntos donde $\varphi(x) \neq 0$. Entonces un punto x_0 pertenece al conjunto complementario de Σ si y sólo si existe un entorno de x_0 donde $\varphi(x) = 0$.

Supongamos ahora que $\varphi(x) \varepsilon \mathbf{D}_1$ (y por tanto $\varepsilon \mathbf{C}$) y sea x_1 un punto de la frontera (Cap. XVIII, nota I, b) de Σ. Por ser x_1 punto de acumulación del complementario de Σ y por la continuidad de $\varphi'(x)$ es $\varphi(x_1) = \varphi'(x_1) = 0$; por otra parte, $\varphi'(x)$ no puede anularse en todo un entorno de x_1 pues entonces se anularía en él $\varphi(x)$. Por consiguiente x_1 pertenece al soporte Σ_1 de $\varphi'(x)$, y como es punto de acumulación del complementario de Σ_1, pertenece a la frontera de Σ_1. Es decir: fr Σ $(\leqslant)$ fr Σ_1.

d_4) *Soporte de una distribución.* — Diremos que una distribución L es *nula* en un conjunto abierto G, si $L(\varphi) = 0$ toda vez que el soporte Σ de $\varphi \varepsilon \mathbf{D}$ está contenido en G: $\Sigma(\leqslant)G$. Diremos que dos distribuciones L_1 y L_2 son *iguales en* G o *coinciden en* G, si la diferencia $L_1 - L_2$ es nula en G.

Citemos el importante *principio de "reintegración de trozos"* (principe du "recollement des morceaux", ver SCHWARTZ (citado en Cap. XXV, nota IV, 8; vol. 1, pág. 26): Si en cada conjunto G_i de una familia $\{G_i\}$ de conjuntos abiertos está definida una distribución L_i, de tal modo que si la intersección de un par G_i, G_j no es vacía, L_i y L_j coinciden en ella, entonces existe una y sólo una distribución L, definida en la reunión G de los G_i, y que coincide con L_i en G_i.

En base a este principio se puede definir el soporte de una distribución

L. La unión N de todos los conjuntos abiertos donde L es nula, es un abierto donde L es nula, y el más grande con esta propiedad; su complementario S, es decir, el menor conjunto cerrado fuera del cual L es nula, se llama *soporte de* L. Si el soporte de una función $\varphi \varepsilon D$ no tiene puntos comunes con el soporte S de L, es $L(\varphi) = 0$.

e) Convolución de distribuciones. — Apliquemos la distribución L definida por [Ap. III-88] mediante $f(x)$, a la convolución sobre un intervalo infinito (9, *a*) $h(x) = r(x) \circ s(x)$; resulta:

$$L(h) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} r(t) s(x - t) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(t) s(u) f(t + u) dt\, du \quad , \quad (x - t = u).$$

Considerando esta expresión como un funcional sobre la función *f*, la expresión anterior sugiere la siguiente definición:

Llamaremos *convolución* o *producto de composición* $L \circ M$ de dos distribuciones L, M, a la distribución P definida por

$$P(f) = L_x\{M_y[f(x + y)]\} \quad , \quad (f \varepsilon D),$$

donde los subíndices indican que M se aplica a $f(x + y)$ considerada como función de *y*, y dejando *x* como parámetro, respecto del cual se aplica luego L.

El módulo (§ 3-7) del producto de composición, es la medida de DIRAC, es decir: $L \circ \delta = L$. Pues:

$$(L \circ \delta)\ (f) = L_x\{\delta_y[f(x + y)]\} = L_x[f(x)] = L(f) \quad .$$

La derivada de una distribución puede expresarse como convolución por δ', pues:

$$(L \circ \delta')\ (f) = L_x\{\delta'_y[f(x + y)]\} = L_x[-f'(x)] = L'_x[f(x)] = L'(f) \quad ,$$

y análogamente para derivadas sucesivas, es: $L^{(n)} = L \circ \delta^{(n)}$.

Se ve enseguida que la convolución de distribuciones es asociativa y conmutativa, y con la propiedad anterior se demuestra que la derivada de una convolución de distribuciones se obtiene derivando *uno* de sus factores. En efecto:

$$\begin{cases} (L \circ M)' = (L \circ M) \circ \delta' = L \circ (M \circ \delta') = L \circ M' \\ (L \circ M)' = \delta' \circ (L \circ M) = (\delta' \circ L) \circ M = L' \circ M \end{cases} .$$

f) Distribuciones y transformadas de Laplace. — En la transformación de LAPLACE [XXIX-61]:

$$f(p) = L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt \quad ,$$

la función-objeto $F(t)$, supuesta nula para $t < 0$, define una distribución

$$S_F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) F(t) dt = \int_0^{\infty} \varphi(t) F(t) dt \quad ,$$

y se tiene:

$$\text{[Ap. III-108]} \qquad f(p) = L\{F(t)\} = S_F(e^{-pt}) \quad ,$$

es decir, para cada *p*, la transformada de LAPLACE es el valor del funcional S_F para $\varphi(t) = e^{-pt}$. Obsérvese que para que exista la transformada de LAPLACE es necesario que $S_F(\varphi)$ esté definida para funciones $\varphi(t) = e^{-pt}$ no pertenecientes a D.

Tomando para F(t) las *distribuciones* δ, δ', δ'', ..., se tienen los funcionales:

$$S_{\delta}(\varphi) = \varphi(0), \; S_{\delta'}(\varphi) = -\varphi'(0), \; S_{\delta''}(\varphi) = \varphi''(0), \; \ldots ,$$

que para $\varphi(t) = e^{-pt}$ dan:

$$L\{\delta\} = 1, \; L\{\delta'\} = p, \; L\{\delta''\} = p^2, \; \ldots ,$$

y entonces, en el campo de las distribuciones, también las potencias no negativas de p admiten antitransformadas de LAPLACE (cfr. Cap. XXIX, nota VIII, m_3).

La teoría de las distribuciones tiene muchas vinculaciones con las transformaciones de LAPLACE y de FOURIER, y está muy desarrollada la teoría de la transformación de FOURIER para distribuciones.

11. **Bibliografía.** — *a*) Las ideas de HEAVISIDE pueden verse expuestas por su autor en:

O. HEAVISIDE: *Electromagnetic theory* (The Electrician; Londres; 2ª ed., 1922);

pero uno de los primeros estudios sobre operadores simbólicos y su aplicación a las ecuaciones diferenciales (cfr. §§ 108-8 y 9 y §§ 112-3 a 5) se remonta a

B. BRISSON: *Sur l'intégration des équations différentielles partielles* (Journal de l'Éc. Polytech., *7*, 1808, pág. 197).

Este tema está tratado sistemáticamente en VALLÉE POUSSIN (citado en Cap. VI, nota VI, 4), vol. II; INCE (citado en Cap. XXVII, nota IV, 3), y las obras siguientes:

G. BOOLE: *A treatise on differential equations* (Londres; 4ª ed., 1877);

S. PINCHERLE y U. AMALDI: *Operazioni distributive* (Zanichelli, Bolonia, 1901), capítulo XI, y

E. G. C. POOLE: *Introduction on the theory of lineal differential equations* (Oxford, 1936).

Una exposición ilustrada con consideraciones geométricas, de la descomposición en factores de un operador diferencial de coeficientes variables, da:

G. ASCOLI: *Sulla decomposizione degli operatori differenziali lineari in fattori lineari e sopra alcune questioni geometriche che vi si riconnetono* (Rev. de Mat. y Fís. Teór., Tucumán; *1*, 1940, pág. 180-215).

b) Uno de los mejores libros sobre cálculo operacional desde el punto de vista del ingeniero y del físico, es el de CARSLAW y JAEGER (citado en Cap. XXV, nota IV, 6). También son clásicas y siempre actuales las obras:

J. R. CARSON: *Electric circuit theory and the operational calculus* (McGraw- Hill, Nueva York, 1926; reeditado por Chelsea, Nueva York); versión alemana ampliada de F. OLLENDORFF y K. POHLHAUSEN: *Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung* (Springer, Berlín, 1929);

V. BUSH: *Operational circuit analysis* (Wiley, Nueva York, 1929);

H. JEFFREYS: *Operational methods in mathematical physics* (Cambridge Univ. Press; 1ª ed., 1927; 2ª ed., 1931);

E. J. BERG: HEAVISIDE's *operational calculus as applied to engineering and physics* (McGraw-Hill, Nueva York, 2ª ed., 1936).

Logra una presentación matemáticamente inobjetable del cálculo operacional con los mismos métodos de HEAVISIDE convenientemente perfeccionados, la obra comparativamente elemental y claramente escrita:

J. P. DALTON: *Symbolic operators* (Witwatersrand Univ. Press, Johannesburg, 1954).

Tratan con cierta extensión el tema las obras siguientes, de las cuales la primera utliza preferentemente la transformación de CARSON:

L. A. PIPES: *Applied mathematics for engineers and physicists* (McGraw-Hill, Nueva York, 1946);
R. E. DOHERTY y E. G. KELLER: *Matematics of modern engineering*, vol. I (Wiley, Nueva York, 1936).

c) Partiendo de consideraciones independientes de las de HEAVISIDE, elaboró G. GIORGI desde 1904 su llamado cálculo operatorio funcional, inicialmente con el propósito de utilizar métodos simbólicos en el estudio de circuitos recorridos por corrientes variables no periódicas (G. GIORGI: Atti Assoc. Elettr. It., *8*, 1904, pág. 65-141, y *9*, 1905, pág. 651-699; Proc. of the Math. Congress of Toronto, *2*, 1924; Rendic. del Circolo Matem. di Palermo, *52*, 1928, pág. 265-312). Una exposición sucinta de este cálculo funcional puede verse en el vol. II (Cap. X, § 9) de la obra de SANSONE citada en Cap. XXVII, nota IV, 3, y otra más amplia en los capítulos XI, XII y XIV de:
G. GIORGI: *Lezioni di Fisica Matematica tenute nella R. Università di Cagliari*, I (Roma, 1927).

d) En Cap. XXV, nota IV, 4, 5 y especialmente 6, hemos dado la bibliografía referente al cálculo operacional mediante las transformaciones $L \equiv L_I$, L_{II} y de FOURIER. La teoría del cálculo operacional basada en la transformación de LAPLACE, y una breve introducción a la teoría de las distribuciones, da la segunda y más extensa de las dos partes en que se divide la obra de M. JANET citada en Cap. XVII, nota V, 3.

Con numerosos ejemplos y ejercicios, tablas de reglas operatorias, de pares de transformadas de LAPLACE ordenadas de acuerdo con las funciones-imágen y una tabla especial de pares de transformadas de interés en la teoría de circuitos, está la obra de escaso nivel matemático, dirigida a técnicos:
M. DENIS-PAPIN y A. KAUFMANN: *Cours de calcul opérationnel* (*Transformation de* LAPLACE) (Albin Michel, París, 1950).

Presentación sin demostraciones, de resultados consistentes en fórmulas, teoremas y propiedades descriptivas, ordenados atendiendo más a su uso que a sus relaciones lógicas, es la obra siguiente, donde, aunque el autor procura lograr una formulación precisa de los resultados y de sus condiciones de validez, hay algunos enunciados imprecisos y aún incorrectos en el texto, y donde la frecuencia de erratas en tablas como la de transformadas de LAPLACE afecta seriamente su utilidad:
E. LABIN: *Calcul opérationnel* (Masson, París, 1949).

Comienza con un capítulo sobre la forma de HEAVISIDE del cálculo operacional, seguido por otro sobre la transformación de LAPLACE donde se destaca la ventaja de esta forma de presentar el cálculo operacional y sirve de base al resto del libro, la obra dirigida a ingenieros y físicos, con numerosas aplicaciones sobre todo a la teoría de la electricidad, y una tabla de 184 pares de transformadas de LAPLACE, pero a veces sin indicación precisa de las condiciones de validez de resultados contenidos en la parte teórica:
K. W. WAGNER: *Operatorenrechnung und* LAPLACE*sche Transformation nebst Anwendungen in Physik und Technik* (Barth, Leipzig, 2ª ed., 1950).

Trata brevemente las aplicaciones de la transformación de LAPLACE a las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, y a problemas sobre circuitos eléctricos, la valiosa obra con numerosos ejemplos y ejercicios:
J. C. JAEGER: *An introduction to applied mathematics* (Clarendon Press, Oxford, 1951).

Una exposición adecuada de los métodos operacionales y de la aplicación de la transformación de LAPLACE, incluyendo ciertos tipos de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes *variables*, da el capítulo X (vol. II) de la obra de SANSONE citada en Cap. XXVII, nota IV, 3. Para los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de

coeficientes constantes, puede verse GHIZZETTI (citado en Cap. XXV, nota IV, 6), pág. 74-86, y sobre problemas de contorno para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, CHURCHILL (citado en Cap. XXV, nota IV, 6).

Al cálculo operacional con las transformaciones de LAPLACE bilateral y de FOURIER, con aplicaciones eléctricas y mecánicas, se dedican respectivamente la obra de VAN DER POL y BREMMER (citada en Cap. XXV, nota IV, 6), y el Cap. X de:

TH. VON KÁRMÁN y M. A. BIOT: *Mathematical methods in engineering* (McGraw-Hill, Nueva York, 1940).

e) Un estudio sistemático de la aplicación de la transformación de LAPLACE a los circuitos eléctricos de constantes concentradas o uniformemente distribuidas, dan las partes 2ª y 3ª respectivamente, de la obra de GHIZZETTI citada en Cap. XXV, nota IV, 6.

De mucho interés para cultores de la matemática aplicada, físicos, e ingenieros orientados hacia la teoría superior de circuitos, es la obra en dos tomos, de estilo conciso pero lúcido, referencias precisas y gran número de valiosos problemas:

E. WEBER: *Linear transient analysis* (Wiley, Nueva York; vol. I, 1954; vol. II, 1956).

Más elemental es:

M. F. GARDNER y J. L. BARNES: *Transients in linear systems studied by the* LAPLACE *transform* (Wiley, Nueva York, 1945).

f) Un estudio profundo de la transformación por convolución, con demostración rigurosa y delimitación de condiciones de validez de resultados de diversos procedimientos operacionales, han hecho WIDDER y HIRSCHMAN, y sus resultados están sistemáticamente expuestos en:

I. I. HIRSCHMAN y D. V. WIDDER: *The convolution transform* (Princeton Univ. Press, 1955).

g) Las ideas de DIRAC y su cálculo formal con la función δ y sus derivadas están expuestos en:

P. A. M. DIRAC: *Principles of quantum mechanics* (Oxford Univ. Press, 1ª ed., 1930; 3ª ed., 1947, reimpr. 1956).

La teoría de las distribuciones está desarrollada con amplitud y máxima generalidad en la obra en dos tomos, cuidadosamente organizada, de L. SCHWARTZ (citada en Cap. XXV, nota IV, 8).

Una exposición de los métodos de la teoría de distribuciones para introducir y obtener soluciones generalizadas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales puede verse en el capítulo VIII de la obra de S. BOCHNER y W. T. MARTIN citada en Cap. XXIX, nota IX, 17, a cuyo primer autor debe acreditarse la prioridad de muchos conceptos y resultados fundamentales de la teoría de las distribuciones, en diversas publicaciones, entre ellas su obra de 1932 citada en Cap. XXI, nota II, 1.

Mediante hipótesis restrictivas logra una introducción simplificada el folleto de 35 páginas que incluye temas como ecuaciones diferenciales sobre distribuciones, distribuciones en varias variables, convoluciones y series de FOURIER de distribuciones:

I. HALPERIN: *Introduction to the theory of distributions. Based in the lectures given by* LAURENT SCHWARTZ (Univ. of Toronto Press, 1952).

Los siguientes fascículos mimeografiados, números II, III, IV y VI de la serie "Les cours de Sorbonne. Méthodes mathématiques de la physique", dan el primero una introducción elemental a la teoría de las distribuciones, con muchos ejemplos ilustrativos, el segundo un estudio del producto directo y la convolución de distribuciones, con aplicaciones a ecuaciones diferenciales e integrales y al cálculo de HEAVISIDE; el tercero trata su tema desde el punto de vista clásico y con distribuciones, dando una

prueba mediante convolución de distribuciones, de la completidad del espacio de HILBERT de las funciones de cuadrado sumable; el cuarto hace más coherente, en el marco de la teoría de distribuciones, el cálculo usual de transformadas de LAPLACE:

L. SCHWARTZ: *Théorie élémentaire des distributions* (París, 1955);
L. SCHWARTZ: *Convolution* (París, 1955);
L. SCHWARTZ: *Séries de* FOURIER (París, 1955);
L. SCHWARTZ: *Transformations de* LAPLACE (París, 1955).

Introduce la transformación de LAPLACE de distribuciones y desarrolla un cálculo simbólico en varias variables, que luego aplica a las ecuaciones diferenciales hiperbólicas, la obra de J. LERAY citada en Cap. XXVIII, nota XI, 6.

APÉNDICE IV

PROBABILIDADES Y TEORÍA DE ERRORES

1. **Noción de probabilidad. Principios fundamentales.** — *a*) El delicado problema de la definición de probabilidad ha preocupado desde muy antiguo a matemáticos y filósofos, y aún hoy divide a unos y a otros. Para ARISTÓTELES "lo probable es lo que ocurre con frecuencia". A esta "definición" imprecisa (y perfeccionada luego) pero objetiva y empírica, se oponen definiciones de tipo subjetivo, en relación con el grado de nuestro conocimiento respecto de un suceso que pueda verificarse o no. Así, si en una urna tenemos 10 bolillas iguales salvo el color y extraemos una al azar, suponemos que no hay ninguna razón para esperar la aparición de una bolilla con preferencia a otra; diremos entonces que todas las bolillas tienen *la misma probabilidad* de salir, o que las extracciones de las distintas bolillas constituyen acontecimientos *igualmente probables*. Si entre las 10 bolillas hay 3 blancas diremos que la probabilidad de obtener una blanca es $p = 3/10$, y en general:

La probabilidad p de un acontecimiento A *es igual al número f de casos favorables (casos en que se verifica* A*) sobre el número total t de casos posibles*:

[Ap. IV-1] $$p = \frac{f}{t} \quad ,$$

supuestos todos los casos igualmente probables.

Uno de los primeros en expresar una definición clásica de probabilidad, que ya se halla en autores anteriores a él, es P. S. LAPLACE (citado en nº 11, *a*) : "La teoría del azar consiste en reducir todos los acontecimientos del mismo género a un cierto número de casos igualmente posibles, es decir, tales que estemos igualmente inseguros sobre su existencia, y en determinar el número de casos favorables al acontecimiento cuya probabilidad se busca. La relación de este número con el de todos los casos posibles es la medida de esa probabilidad...".

EJEMPLOS: 1. Si en una urna hay *a* bolillas blancas y *b* negras, por lo demás todas iguales, la probabilidad de obtener una blanca es:

[Ap. IV-2] $$p = \frac{a}{a+b} \quad ,$$

y la de obtener una negra:

[Ap. IV-3] $$q = \frac{b}{a+b} \quad .$$

Obsérvese que la suma de estas probabilidades es (cfr. *d*) :

[Ap. IV-4] $$p + q = 1 \quad .$$

2. Se arrojan dos dados, D_1 y D_2, *¿cuál es la probabilidad de obtener suma* 5?

Si no conociéramos nada del dispositivo por el cual aparece la suma, como ésta puede tomar los valores 2, 3, ... 12, podría parecer legítimo

considerar que tenemos 11 casos posibles y uno solo favorable, luego $p = 1/11$. Pero teniendo en cuenta cómo puede formarse la suma obtenida en el juego de dados, resulta que los casos *no son igualmente probables*, por ejemplo, es más fácil obtener suma 7 que suma 2. Tomando como igualmente probables las 36 asociaciones de cada cara de D_1 con cada una de D_2 resulta: $p = 4/36 = 1/9$.

NOTA. La probabilidad de un acontecimiento es por definción un número comprendido entre 0 y 1, tomando estos valores extremos cuando el acontecimiento es imposible o cierto respectivamente. Pero la recíproca no es cierta cuando es infinito el número de casos posibles. Por ejemplo: en un número grande de disparos, la probabilidad de dar en el blanco, considerado como punto matemático es nula. La probabilidad de que el error de una observación sea 0,02 es también nula.

En cambio, es un número finito la probabilidad de que el disparo quede a una distancia del blanco entre 3 cm y 4 cm o que el error de la medición hecha esté comprendido entre 0,02 y 0,03.

Ahora bien, si en vez del intervalo 3 cm a 4 cm consideramos otro de 10 cm a 11 cm de igual magnitud, se observa que el número de disparos contenidos en esa zona es menor que en la otra; y si consideramos un intervalo mucho más lejano, el número de errores en él comprendido es sensiblemente nulo.

b) Según la definición de probabilidad resulta que ésta tiene la *propiedad aditiva*, es decir, en el ejemplo de la nota precedente, la probabilidad en un intervalo suma de dos intervalos, es la suma de las probabilidades de ambos. Esta propiedad permite considerar a la probabilidad como una medida especial (cfr. Cap. XXIV, nota I, *a*) y con lenguaje más usual en Cálculo de probabilidades puede enunciarse así:

PRINCIPIO DE PROBABILIDADES TOTALES: *Cuando un acontecimiento se puede presentar bajo diferentes modalidades incompatibles entre sí, su probabilidad es igual a la suma de las probabilidades de esas modalidades.*

EJEMPLOS: 3. En una urna hay 3 bolillas blancas, 2 negras y 5 de otro color. La probabilidad de extraer una blanca es $p_1 = 3/10$, la de extraer una negra es $p_2 = 2/10$, y la de extraer una blanca o negra será (puesto que entre blancas y negras hay 5) : $p = 5/10 = p_1 + p_2$.

4. Se arrojan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos menor que 5?

El acontecimiento se puede presentar bajo tres modalidades incompatibles: obtener suma 2, o suma 3, o suma 4. Calculando las respectivas probabilidades (cfr. ej. 2) y sumándolas, se obtiene:

$$p = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{1}{6} .$$

c) Una medida de probabilidad (ver *b*) tiene la propiedad de que asigna medida 1 al conjunto total, pero lo que la distingue más especialmente es el concepto de *independencia de acontecimientos*, que en las formulaciones abstractas del Cálculo de probabilidades debe introducirse como concepto primitivo, en relación con el axioma siguiente:

PRINCIPIO DE PROBABILIDADES COMPUESTAS: *La probabilidad de la realización simultánea de varios acontecimientos independientes, es igual al producto de sus respectivas probabilidades.*

EJEMPLOS: 5. Al arrojar dos dados, la probabilidad de obtener doble as será (cfr. ej. 2) : $p = (1/6) \ . \ (1/6) = 1/36$.

6. Al arrojar 5 veces una moneda, la probabilidad de obtener 4 caras

seguidas de una cruz es 1/32; pero al arrojar 5 monedas a la vez, la probabilidad de obtener 4 caras es (por *b*): 5/32.

d) Dos acontecimientos se llaman *complementarios* o *contrarios* cuando se presenta siempre uno y sólo uno. Entonces pueden considerarse como dos modalidades incompatibles de un acontecimiento cierto, y el principio de probabilidades totales (*b*) da para sus respectivas probabilidades p y q la relación [Ap. IV-4], o sea:

[Ap. IV-4'] $$p = 1 - q \quad ,$$

que expresa la probabilidad p de un acontecimiento en base a la de su contrario, la que en muchos casos es más fácil de calcular.

EJEMPLO 7. Se arroja n veces un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos una vez el as?

Es evidentemente erróneo este razonamiento: La probabilidad de obtener un as con un tiro es 1/6, con n tiros $n/6$. En efecto, una probabilidad no puede ser nunca > 1.

El número total de casos que corresponde considerar como igualmente probables (cfr. ej. 2) es el de las variaciones n-arias con repetición de las 6 caras, o sea (§ 11-1, nota 2): 6^n. En lugar de contar los casos favorables (variaciones donde entra al menos una vez el as) es más fácil contar los correspondientes al acontecimiento contrario: variaciones n-arias de las 5 caras 2, 3, ..., 6, o sea 5^n. Entonces es $q = 5^n/6^n$ y por [Ap. IV-4']:

$$p = 1 - (5^n/6^n).$$

Usando el principio de probabilidades compuestas, el razonamiento anterior se simplifica así: La probabilidad de no obtener as en un tiro es 5/6, la de no obtener as en ninguno de los n tiros es $q = (5/6)^n$, etc.

2. **Variables aleatorias. Momentos de una distribución.** — *a*) Una *variable aleatoria* X será una variable que puede tomar determinados valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con determinadas probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente. Por ejemplo, es una variable aleatoria la ganancia en un juego de azar (considerando las pérdidas como ganancias negativas). Para determinar la variable aleatoria hay que dar entonces n pares de números:

[Ap. IV-5] $$X \begin{cases} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{cases} .$$

siendo además:

[Ap. IV-6] $$p_i \geqslant 0 \quad , \quad \Sigma p_i = 1 \quad .$$

EJEMPLO 1. El número de puntos al arrojar un dado simétrico o no tarado (es decir, con igual probabilidad para cada cara) es una variable aleatoria definida así:

[Ap. IV-7] $$X \begin{cases} 1 & 2 & \ldots & 6 \\ 1/6 & 1/6 & \ldots & 1/6 \end{cases} .$$

b) En muchos casos es útil interpretar la variable aleatoria [Ap. IV-5] como una distribución de masas $p_1, p_2, \ldots, p_n$, en los puntos de una recta, de abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Se llama *momento de orden r* de esta distribución (respecto del origen 0) al valor:

[Ap. IV-8] $$m_r = \Sigma p_i x_i^r \quad .$$

El momento de orden 1, también llamado *media* o *valor medio*

[Ap. IV-9] $$m_1 = \Sigma p_i x_i \quad ,$$

es el más importante de los llamados *parámetros de localización* de la variable aleatoria, pues por representar el centro de gravedad de la distribución de las masas, da una idea clara de su ubicación o localización

global. (Otros parámetros de localización son la *moda* o valor al cual corresponde máxima probabilidad [cuando es único, la distribución se llama *unimodal*] y la *mediana*, valor al cual corresponde la probabilidad $\leqslant \frac{1}{2}$ tanto de no ser alcanzado como de no ser superado).

El momento de orden 2:

[Ap. IV-10] $$m_2 = \Sigma p_i x_i^2$$

representa el momento de inercia de las masas respecto del origen.

Con frecuencia conviene tomar como nuevo origen el centro de gravedad m_1 de la distribución, y con respecto a él considerar los llamados *momentos centrados*

[Ap. IV-11] $$\mu_r = \Sigma p_i (x_i - m_1)^r \quad .$$

Será entonces:

[Ap. IV-12] $$\mu_1 = \Sigma p_i (x_i - m_1) = \Sigma p_i x_i - m_1 \Sigma p_i = m_1 - m_1 = 0 \quad ,$$

[Ap. IV-13] $$\mu_2 = \Sigma p_i (x_i - m_1)^2 = \Sigma p_i (x_i^2 - 2m_1 x_i + m_1^2) = \\ = m_2 - 2m_1^2 + m_1^2 = m_2 - m_1^2 \quad .$$

Como μ_2 representa el momento de inercia de las masas respecto de su centro de gravedad, la relación [Ap. IV-13] constituye el conocido teorema de STEINER de la Geometría de masas, y muestra que μ_2 es menor que el momento de inercia respecto de cualquier otro origen. Se le llama también *variancia* V, y es un *parámetro de dispersión* de las masas alrededor de su centro de gravedad, siendo V tanto menor cuanto más concentradas estén esas masas. Para tener una medida homogénea con X (y no con su cuadrado) suele usarse su raíz cuadrada

[Ap. IV-14] $$\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{V} \quad ,$$

que llamaremos *desviación normal* (standard deviation). Cuanto menor es σ, tanto más se agrupan los valores $x_1, \ldots, x_n$ alrededor de uno fijo; si, por ejemplo, $x_1, \ldots, x_n$ son resultados de varias mediciones de una misma magnitud, será tanto mayor la precisión cuanto menor sea σ.

c) Si a la variable aleatoria X corresponde una distribución con centro de gravedad m_1 y desviación normal σ, la llamada variable *normalizada* o *reducida* $(X - m_1)/\sigma$, que se obtiene de la anterior cambiando el origen y la unidad de medida, tendrá centro de gravedad 0 y desviación normal 1.

EJEMPLO 2. Para la variable aleatoria del ejemplo 1 se tiene:

$$m_1 = \frac{1}{6}(1 + 2 + \ldots + 6) = \frac{7}{2} \quad ,$$

$$m_2 = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + \ldots + 6^2) = \frac{91}{6} \quad ,$$

y entonces, por [Ap. IV-13]:

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} = 2{,}9 \quad \therefore \quad \sigma = \sqrt{2{,}9} = 1{,}7 \quad ,$$

con lo que la variable aleatoria normalizada será:

$$Y = \frac{X - 3{,}5}{1{,}7} \begin{cases} -2{,}5/1{,}7 & -1{,}5/1{,}7 & \ldots & 2{,}5/1{,}7 \\ 1/6 & 1/6 & \ldots & 1/6 \end{cases} \quad .$$

3. La distribución binomial. — Consideremos el siguiente problema:

Una moneda asimétrica (con probabilidad p para cara y $q = 1 - p$

para cruz *) *se arroja* n *veces. ¿Cuál es la probabilidad* P_r *de obtener* r *veces cara?*

A cada tiro hagamos corresponder una variable aleatoria X_i que tome los valores 1 ó 0, según que se obtenga cara o cruz:

[Ap. IV-15] $$X_i \begin{cases} 1 & 0 \\ p & q \end{cases} .$$

El número de caras obtenidas será también una variable aleatoria, suma de las anteriores: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$; veremos cuál es su distribución.

La probabilidad de obtener r caras seguidas en los r primeros tiros, será, por el principio de probabilidades compuestas (cfr. 1, *c*): $p \, . \, p \ldots \ldots p = p^r$; la probabilidad de obtener $n - r$ cruces en los $n - r$ tiros restantes será analogamente: q^{n-r}; y, entonces, la probabilidad de *r caras consecutivas, seguidas de* $n - r$ *cruces*, será por el mismo principio de probabilidades compuestas:

[Ap. IV-16] $$p^r \, . \, q^{n-r} \quad .$$

Esta es también la probabilidad de obtener r caras y $n - r$ cruces *en un orden prefijado* cualquiera, y como el número de estos órdenes está dado (§ 11-3 y 4) por el número combinatorio $\binom{n}{r}$, aplicando el principio de probabilidades totales (cfr. 1, *b*) resulta para la probabilidad de obtener r caras y $n - r$ cruces en un orden cualquiera:

[Ap. IV-17] $$P_r = \binom{n}{r} p^r \, . \, q^{n-r} \quad .$$

EJEMPLO: La probabilidad de obtener tres veces as arrojando cuatro veces un dado simétrico es:

$$\binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 . \frac{5}{6} = \frac{4 \, . \, 3 \, . \, 2}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} . \frac{5}{6^4} = \frac{5}{324} \quad .$$

4. Sistemas de variables aleatorias. Momentos de la distribución binomial. — En el caso de la distribución binomial hemos considerado la variable aleatoria X como suma de n variables aleatorias X_i todas con la misma distribución dada por [Ap. IV-15], y veremos ahora cómo este enfoque facilita el cálculo de los momentos, para lo cual demostraremos antes algunos teoremas generales referentes a la consideración simultánea de dos o más variables aleatorias.

a) Consideremos dos variables aleatorias

[Ap. IV-18] $$X \begin{cases} x_1 \ldots x_n \\ p_1 \ldots p_n \end{cases} \quad ; \quad Y \begin{cases} y_1 \ldots y_m \\ q_1 \ldots q_m \end{cases} \quad ;$$

e indiquemos con P_{rs} la probabilidad de que X tome el valor x_r y a la vez Y el valor y_s.

Si los valores tomados por X son iudependientes de los de Y, diremos que X é Y son *variables aleatorias independientes*. En tal caso se tiene, por el principio de probabilidades compuestas (cfr. 1, *c*):

[Ap. IV-19] $$P_{rs} = p_r q_s \quad , \quad (\text{X } \textit{é} \text{ Y } \textit{independientes}) \quad .$$

* En lugar de esta moneda, podría considerarse una urna con a bolillas blancas y b negras: $p = a/(a+b)$, $q = b/(a+b)$. A cada tiro de la moneda corresponde una extracción de esta urna, previa reposición de la bolilla extraída antes, de modo que todas las pruebas se realizan en las mismas condiciones, por lo que el problema, considerado por J. BERNOULLI, se llama *problema de las pruebas repetidas*. Naturalmente en este esquema de urna, p y q son números racionales.

Por otra parte se tiene *en todos los casos* en virtud del principio de probabilidades totales (cfr. 1, *b*):

$$\text{[Ap. IV-20]} \quad \begin{cases} P_{r1} + P_{r2} + \ldots + P_{rm} = p_r \quad , \quad (r = 1, 2, \ldots, n), \\ P_{1s} + P_{2s} + \ldots + P_{ns} = q_s \quad , \quad (s = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

TEOR. 1. *El valor medio de la suma de varias variables aleatorias es igual a la suma de sus valores medios.*

Basta demostrar el teorema para dos variables aleatorias [Ap. IV-18]. Tendremos por [Ap. IV-20]:

$$\begin{aligned} m_1(X + Y) &= P_{11}(x_1 + y_1) + \ldots + P_{1m}(x_1 + y_m) + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ P_{n1}(x_n + y_1) + \ldots + P_{nm}(x_n + y_m) = \\ &= x_1(P_{11} + \ldots + P_{1m}) + \ldots + x_n(P_{n1} + \ldots + P_{nm}) + \\ &+ y_1(P_{11} + \ldots + P_{n1}) + \ldots + y_m(P_{1m} + \ldots + P_{nm}) = \\ &= p_1x_1 + \ldots + p_nx_n + q_1y_1 + \ldots + q_my_m = m_1(X) + m_1(Y) \quad . \end{aligned}$$

TEOR. 2. *El valor medio del producto de varias variables aleatorias* INDEPENDIENTES, *es igual al producto de sus valores medios.*

Se tiene, aplicando [Ap. IV-19]:

$$\begin{aligned} m_1(X \,.\, Y) &= P_{11}x_1y_1 + \ldots + P_{1m}x_1y_m + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ P_{n1}x_ny_1 + \ldots + P_{nm}x_ny_m = \\ &= p_1x_1 \,.\, q_1y_1 + \ldots + p_1x_1 \,.\, q_my_m + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ p_nx_n \,.\, q_1y_1 + \ldots + p_nx_n \,.\, q_my_m = \\ &= (p_1x_1 + \ldots + p_nx_n) \,.\, (q_1y_1 + \ldots + q_my_m) = m_1(X) \,.\, m_1(Y) \quad . \end{aligned}$$

TEOR. 3. *El valor medio del cuadrado de una suma de varias variables aleatorias independientes, y con colores medios nulos, es igual a la suma de los valores medios de sus cuadrados.*

Considerando, por ejemplo, dos variables aleatorias X é Y tales que $m_1(X) = m_1(Y) = 0$, tendremos por los dos teoremas anteriores:

$$\begin{aligned} m_1[(X + Y)^2] &= m_1(X^2) + m_1(Y^2) + 2m_1(XY) = m_1(X^2) + m_1(Y^2) + \\ &+ 2m_1(X)m_1(Y) = m_1(X^2) + m_1(Y^2) \quad . \end{aligned}$$

b) Con estos teoremas generales podemos calcular fácilmente los primeros momentos de la distribución binomial dada por [Ap. IV-17]. Para la variable aleatoria X_i definida por [Ap. IV-15] se tiene $m_1(X_i) = p \,.\, 1 + q \,.\, 0 = p$, y aplicando el teorema 1 resulta:

$$\text{[Ap. IV-21]} \qquad m_1(X) = m_1(\Sigma X_i) = \Sigma m_1(X_i) = n \,.\, m_1(X_i) = np \quad .$$

El momento de orden 2 se calcula aplicando el teorema 3, pero como éste exige que los sumandos sean variables aleatorias con media nula, debemos considerar las variables aleatorias *centradas* $X_i - p$, que resultan de restar a [Ap. IV-15] su propio valor medio:

$$\text{[Ap. IV-22]} \qquad X_i - p \begin{cases} 1 - p & -p \\ p & q \end{cases} \text{ o bien: } \quad X_i - p \begin{cases} q & -p \\ p & q \end{cases} .$$

La suma $\Sigma(X_i - p) = X - np$ es la variable aleatoria centrada correspondiente a X. Por otra parte se tiene

$$m_1[(X_i - p)^2] = p \,.\, q^2 + q \,.\, (-p)^2 = pq(p + q) = pq \quad ,$$

y aplicando el teorema 3 resulta la variancia (cfr. 2, *b*) de la distribución binomial:

$$\begin{aligned} \text{[Ap. IV-23]} \qquad V(X) &= \mu_2(X) = m_2(X - np) = m_1[(X - np)^2] = \\ &= \Sigma m_1[(X_i - p)^2] = npq \quad , \end{aligned}$$

con lo que *la desviación normal*

[Ap. IV-24] $$\sigma(X) = \sqrt{npq} \quad ,$$

aumenta con la raíz cuadrada del número de tiros.

5. **Variables aleatorias continuas. La ley normal.** — *a*) Hasta ahora (salvo en 1, nota), hemos considerado variables aleatorias que pueden tomar sólo un número finito de valores. Entre las que toman infinitos valores, las más importantes son las variables aleatorias *continuas*, que pueden tomar todos los valores de un intervalo, o de toda la recta $-\infty < x < \infty$. Para una tal variable X no es apropiado hablar de la probabilidad de cada punto por separado, sino de la probabilidad $P(a, b)$ de que X tome un valor perteneciente al intervalo (a, b). La función $P(a, b)$ deberá cumplir las tres condiciones siguientes:

[Ap. IV-25] $$\begin{cases} 1^{a}) \ P(a,b) \geqslant 0 \quad , \\ 2^{a}) \ P(-\infty, +\infty) = 1 \quad , \\ 3^{a}) \ P(a,b) = P(a,c) + P(c,b) \quad , \quad (a < c < b) \quad , \end{cases}$$

cuyo significado es inmediato: las dos primeras son las análogas de $p_i \geqslant 0$, $\Sigma p_i = 1$, y la tercera corresponde al principio de probabilidades totales (cfr. 1, *b*).

Una tal variable, en casos muy generales, está caracterizada por una función *densidad de probabilidad* o *función de frecuencia*

[Ap, IV-26] $$y = f(x)$$

tal que la probabilidad de que X tome un valor en un intervalo (a, b) es:

[Ap. IV-27] $$P(a, b) = \int_a^b f(x)\,dx \quad .$$

La condición [Ap. IV-25] 3ª se cumple siempre. Para que se verifiquen las dos primeras debe ser:

[Ap. IV-28] $$f(x) \geqslant 0 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad .$$

La variable aleatoria puede representarse por la curva $y = f(x)$, e interpretarse como una distribución de masas a lo largo de una recta, con densidad lineal $f(x)$. La segunda condición [Ap. IV-28] indica que la masa total es 1.

Se llama *función de distribución* o *de probabilidades totales* $F(x)$ de una variable aleatoria X (continua o no), a la probabilidad de que ésta tome un valor $\leqslant x$:

[Ap. IV-29] $$F(x) = \text{Prob. de } X \leqslant x \quad ;$$

si $F(x)$ tiene derivada $F'(x) = f(x)$, la distribución es continua con densidad $f(x)$. En el caso general, los momentos están dados por integrales de STIELTJES

[Ap. IV-30] $$m_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r dF(x) \quad ,$$

y para variables aleatorias continuas por

[Ap. IV-31] $$m_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\,dx \quad .$$

b) Volvamos a la distribución binomial (nº 3). Podemos representar la ley [Ap. IV-17] por los $n+1$ puntos (r, P_r). $(r = 0, 1, \ldots, n)$, o, como se acostumbra, por la quebrada que los tiene por vértices. Si se representan estas poligonales, asimétricas si $p \neq q$, para valores cada vez mayores de n, pero tomando en cada caso como origen y unidad de medida la media np y la desviación normal $\sqrt{npq}$ (cfr. 2, *c*, y 4, *b*), se observa

que no sólo las poligonales van perdiendo la asimetría inicial, sino que *tienden hacia una misma curva límite*

[Ap. IV-32] $$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

que es la llamada *curva normal* de LAPLACE-GAUSS, de importancia fundamental en el Cálculo de probabilidades y en la teoría de los errores de observación. Esto resulta como caso muy particular del llamado *teorema límite central* del Cálculo de probabilidades, referente al comportamiento asintótico de sumas de variables aleatorias.

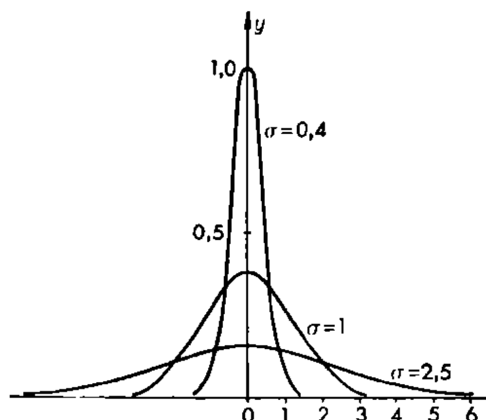


Fig. 453. Curvas normales con $m_1 = 0$ y distintos σ.

Si la densidad $f(x)$ es la función [Ap. IV-32], diremos que la variable aleatoria *sigue la ley normal* (con valor medio 0 y desviación normal 1.

La curva normal *reducida* [Ap. IV-32] tiene un máximo para $x = 0$, es simétrica con respecto al eje y, y además $y \to 0$ para $x \to \pm\infty$. En general, si el valor medio es m_1 y la desviación normal σ, la ley normal está dada por la curva normal *general* (fig. 453):

[Ap. IV-33] $$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m_1)^2/(2\sigma^2)}$$

simétrica respecto de $x = m_1$, donde alcanza su máximo.

6. **Errores sistemáticos y accidentales.** — Al efectuar repetidamente la medida de una magnitud resultan números distintos de la verdadera medida de ésta; unas causas de error son conocidas y actúan en un sentido conocido; tal sucede, por ejemplo, si se mide una distancia llevando reiteradamente una regla, sin estar bien alineados los puntos intermedios, en cuyo caso resulta un error por exceso; o si la regla tiene un error por defecto o por exceso; ... En general, todos los errores debidos a defectos del instrumento, se llaman *sistemáticos* y pueden calcularse aproximadamente; los números obtenidos en las medidas deberán corregirse de estas causas sistemáticas de error; pero aun hechas estas correcciones, los números así corregidos difieren del verdadero, unos por defecto y otros por exceso. Estos errores debidos a causas tan complejas que no es posible conocer ni evaluar, se llaman *errores accidentales*, y cuando el número de observaciones es muy grande tienden a compensarse, verificándose estas condiciones:

1º Los errores son tanto más frecuentes cuanto más pequeños.

2º Su promedio tiende hacia cero al crecer el número de observaciones.

3º El número de errores superiores a cierto número es sensiblemente nulo.

Cuando el promedio de los errores tiende hacia un valor distinto de 0, es preciso buscar alguna causa de error sistemático; y si no tiende hacia ningún valor, se dice que el sistema no es normal.

Estas o análogas condiciones, igualmente insuficientes, suelen to-

marse para caracterizar los errores *accidentales* o *fortuitos*; prescindamos de ellos y después daremos la definición rigurosa (nº 8).

7. **Errores medio y promedio.** — Sea X el valor exacto de la magnitud desconocida y x_r los n valores observados. Llamaremos *errores verdaderos* a los números $\delta_r = x_r - X$, y designaremos por δ el *promedio de los errores*, o sea:

[Ap. IV-34] $$\delta = \sum\delta_r : n = \sum(x_r - X) : n$$

Si formamos la media aritmética M de los valores observados como es $\sum x_r = n M$ resulta:

[Ap. IV-35] $$\delta = (nM - nX) : n = M - X$$

Es decir: *el promedio de los errores verdaderos es igual al error del promedio de los valores observados.*

Llamaremos *errores aparentes* a las diferencias conocidas entre los valores observados y su media M, es decir: $\Delta_r = x_r - M$, de donde:

[Ap. IV-36] $$\sum\Delta_r = \sum x_r - nM = 0$$

Fig. 454.

Este número M está, pues, caracterizado por la condición $\sum(x_r - M) = 0$; pero además tiene la propiedad de hacer mínima la suma de cuadrados de diferencias con los n valores x_r. En efecto, siendo (fig. 454): $\delta_r = \Delta_r - \delta$, al sumar los n cuadrados resulta

[Ap. IV-37] $$\sum\delta_r^2 = \sum\Delta_r^2 + n\delta^2$$

pues el doble producto se anula, por ser $\sum\Delta_r = 0$; luego, cualquiera que sea X, la suma de cuadrados de distancias a los puntos x_r es mayor que para el punto M, y solamente es igual si $\delta = 0$, es decir: si $X = M$.

Distingamos dos problemas: 1º) Conocido el valor exacto X, expresar por un número la precisión de la serie de medidas x_r. 2º) Si se desconoce el valor exacto, acotar el error más probable del promedio M y el grado de precisión de las medidas x_r.

El 1º se resuelve adoptando la medida siguiente:

Se llama *error medio cuadrático* o simplemente *error medio* de un sistema de valores a la raíz cuadrada del promedio de cuadrados de sus errores verdaderos, es decir, pondremos:

$$\mu^2 = \sum\delta_r^2 : n$$

y análogamente

[Ap. IV-38] $$m^2 = \sum\Delta_r^2 : n$$

La relación [Ap. IV-37] adopta así esta forma importante:

[Ap. IV-39] $$\mu^2 = m^2 + \delta^2$$

en la cual es conocido m, promedio cuadrático de los errores aparentes.

Conoceremos, pues, el promedio δ de errores, si conocemos el error medio μ; y recíprocamente. Para poder determinar uno y otro, se precisa otra relación, y ésta resulta de la igualdad,

[Ap. IV-40] $$(\sum\delta_r)^2 = \sum(\delta_r^2) + s$$

que se obtiene desarrollando el cuadrado de la suma $\sum\delta_r$ y designando por $s = 2\sum\delta_r\delta_s$. Dividiendo [Ap. IV-40] por n^2 resulta la relación buscada:

[Ap. IV-41] $$\delta^2 = \frac{\mu^2}{n} + \frac{s}{n^2} .$$

De [Ap. IV-39] y [Ap. IV-41] se despeja inmediatamente:

$$\mu^2 = \frac{nm^2}{n-1} + \frac{s}{n(n-1)} .$$

Hasta aquí no hemos hecho hipótesis ninguna sobre los errores; ni aun haciéndolas podríamos decir nada sobre el número s, pues aun con ellas cabe que la 2ª fracción llegue hasta valer μ^2 (si $m = 0$, o sea $x_r = M$); y es, por tanto, aventurado el despreciarla, como suele hacerse; pero si consideramos, no una serie de medidas de X, sino muchas, los valores de s son unos positivos y otros negativos, y se admite que *su valor más probable es* 0; resultando así las fórmulas fundamentales:

$$\mu_0^2 = \frac{nm^2}{n-1} = \frac{\Sigma\Delta_r^2}{n-1}$$

$$\delta_0^2 = \frac{m^2}{n-1} = \frac{\Sigma\Delta_r^2}{n(n-1)}$$

que expresan el *error absoluto más probable* δ_0 del valor M y el *error cuadrático más probable* μ_0 de la serie de medidas.

EJEMPLOS: 1. En una triangulación geodésica se midieron los ángulos de 9 triángulos, resultando estas discrepancias respecto de 180° para la suma de sus ángulos, que expresamos en segundos, ordenándolos de menor a mayor:

—2,780 ; —2,352 ; —1,349 ; —0,764 ; + 0,009 ; + 1,246 ; +1,613 ; +1,900 ; +2,471 .

Fácilmente se calcula:

$$M = 1{,}609 \quad , \quad \Sigma\delta_r = -0{,}006 \quad , \quad \mu = 1{,}811 \quad .$$

La pequeñez de $|\delta| = 0{,}006 : 9 < 0{,}0007$ indica que están muy compensados, pero ello carece de valor; pues si se prescinde, p. ej., de los dos primeros triángulos aumenta considerablemente. La medida de la precisión la da μ.

2. Las medidas de una longitud (desconocida) expresada en metros, son:

423,35 ; 423,43 ; 423,30 ; 423,30 ; 423,27

El promedio es: M = 423,33.

Errores aparentes (en cm)	+2	+10	—3	—3	—6
Cuadrados (en cm)	4	100	9	9	36

Valores más probables: $\delta_0 = 2{,}81$ cm ; $\mu_0 = 6{,}28$ cm ; $X_0 = 423{,}33 \pm$ $\pm$ 0,03 m.

3. Se han obtenido estas medidas de un segmento:

1,280 ; 1,282 ; 1, 280 ; 1,283 ; 1,280 ; 1,290 ; 1,280 ; 1,290 ; 1,285 ; 1,290 ; 1,280 .

El promedio es M = 1,2836; restando de cada uno y formando la suma de cuadrados es $\Sigma\Delta_r^2 = 0{,}000\,192$; el error medio y el promedio de errores son:

$$\mu_0 = \sqrt{0{,}0000192} = 0{,}0044 \quad ; \quad \delta_0 = 0{,}0044 : \sqrt{11} = 0{,}0013$$

y el valor más probable: $X_0 = 1{,}2836 \pm 0{,}0013$.

8. **Ley de distribución de los errores.** — Si efectuamos numerosas medidas de una magnitud y llevamos como abscisas los números obtenidos x_r, se observa que se condensan hacia un cierto punto, espaciándose tanto más cuanto más se alejan de él. Si todos fueran equidistantes, se llamaría *densidad* por unidad de longitud a la parte alícuota ν/n del número total de puntos contenida en la unidad, o sea, elegido un segmento h, al cociente $\nu/(nh)$, siendo ν el número de puntos contenidos en el segmento h. Como la distribución no es uniforme, este cociente varía con el segmento elegido $(x, x+h)$, y a esta función de x, h, la llamaremos *densidad* o *frecuencia* en dicho intervalo.

Como el cociente ν/n es la probabilidad de que un valor observado esté en el intervalo $(x, x+h)$ resulta (fig. 455):

$$densidad = \text{probabilidad}/h = \Delta P/h$$

La función $\Phi(x) =$ número de valores $x_r \leqslant x$, está representada por una línea escalonada cuyo máximo es el número total n; si dividimos por n, es decir, si adoptamos la ordenada $F(x) =$ probabilidad de los valores $\leqslant x$, la ordenada máxima es 1 y la gráfica se llama de *probabilidades totales* (fig. 456; cfr. nº 5, *a*).

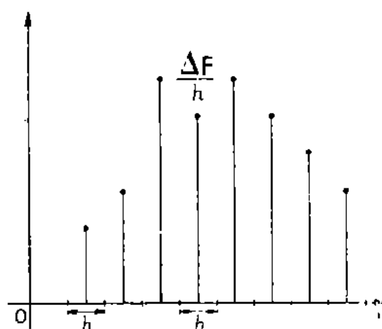


Fig. 455.

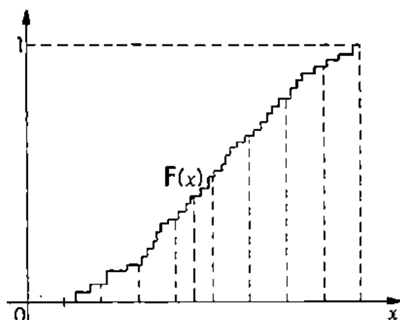


Fig. 456.

Dividida la recta en intervalos h, si en el punto medio de cada uno llevamos como ordenada la densidad $\Delta F/h$, se obtiene una gráfica, que, al decrecer h y aumentar n, se va aproximando a una cierta curva y diremos que los errores son *accidentales*, si esta curva es del tipo que hemos llamado (cfr. 5, *b*) *normal* o de LAPLACE-GAUSS:

[Ap. IV-42] $$\varphi(x) = K \cdot e^{-k^2(x-c)^2}$$

simétrica respecto de la recta $x = c$, y cuyas ordenadas decrecen muy rápidamente a ambos lados del punto c, siendo sensiblemente nulas desde un valor en adelante. Este número c, promedio o baricentro de los x_r es, por tanto, el valor *más probable*, esto es, el de *densidad máxima*. Poniendo $x - c = t$, el número de errores Δ_r contenidos en el intervalo $(t, t+h)$ es igual al de valores x_r en el intervalo $(x, x+h)$, y su densidad viene expresada por la función de LAPLACE-GAUSS [Ap. IV-42] que se reduce a:

[Ap. IV-43] $$\varphi(t) = Ke^{-k^2t^2}$$

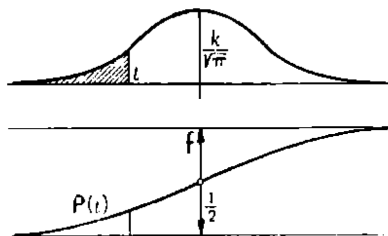


Fig. 457.

Para $n \to \infty$ la probabilidad $F = \nu/n$ en el intervalo $(-\infty, t)$ tiene por hipótesis un límite $F(t)$, que llamaremos la *probabilidad total* (fig. 457); la probabilidad en $(t, t+h)$ es: $\Delta F(t) = F(t+h) - F(t)$ y la densidad en el punto t es:

$$\varphi(t) = \lim \Delta F(t) : h = F'(t)$$

la cual suponemos que viene expresada por la ley exponencial de LAPLACE-GAUSS; siendo, por tanto, la probabilidad de que un error esté comprendido entre a y b:

[Ap. IV-44] $$F(b) - F(a) = \int_a^b \varphi(t)\,dt = K\int_a^b e^{-k^2t^2}dt \quad .$$

Para el intervalo $(-\infty, +\infty)$ la probabilidad es 1, y como la integral, según se calculó en § 53-5, vale $\sqrt{\pi} : k$, resulta $K = k/\sqrt{\pi}$.

Cuanto mayor es k (o sea cuanto menor es σ en [Ap. IV-33]), tanto más se eleva la curva en su parte central (fig. 453), y más rápidamente tiende a 0, estrechándose el intervalo de los errores posibles; es decir, aumenta la frecuencia de los pequeños errores y se hacen prácticamente imposibles los grandes. Por esto se llama k la *medida de la precisión* del sistema considerado de medidas.

La definición basada en la función [Ap. IV-42], que aparece en muchas cuestiones, no es arbitraria y puede justificarse así:

EJEMPLOS: 1. Si se anotan las frecuencias de las sumas 2 hasta 12 logradas lanzando dos dados, se observa que 2 y 12 son las menos frecuentes, porque sólo aparecen en los casos $1 + 1$ y $6 + 6$; mientras que las sumas intermedias se pueden formar de varios modos y este número es máximo para la suma.

$$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1 \quad .$$

La gráfica de estas frecuencias es campaniforme (la figura 458 representa el caso de 3 dados) y al crecer el número de dados tiende, como se puede demostrar, a una curva de LAPLACE-GAUSS.

Este ejemplo es importante, porque señala el camino para *demostrar* que las frecuencias de los errores accidentales obedecen a la ley asintótica de LAPLACE-GAUSS, si se supone que resultan de la superposición de numerosos sumandos, llamados *errores elementales*, que se combinan de todos los modos posibles. Es preferible, sin embargo, desistir de tales demostraciones, siempre basadas en propiedades desconocidas de los errores accidentales y adoptar la ley normal como *definición* de éstos.

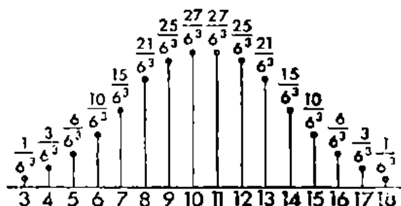


Fig. 458.

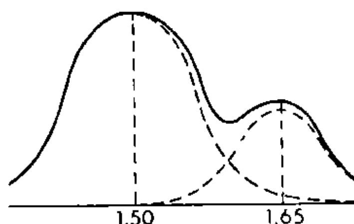


Fig. 459.

2. Si se examinan las tallas de los conscriptos en un país de población homogénea y se divide el eje x en cm llevando en el punto medio de cada uno como ordenada el número de reclutas cuya estatura está comprendida entre ambos números consecutivos, resulta una gráfica con un eje de simetría que corresponde a la estatura media $x = c$. Si se dividiera el eje x en mm (suponiendo que sea posible apreciar el mm en las tallas) las frecuencias serían aproximadamente 10 veces menores; pero si en lugar del número ν llevamos como ordenada $\nu/(mh)$, al dividir ν y h por 10, esta densidad no varía y los puntos de la gráfica tienden a formar una curva; si ésta es del tipo [Ap. IV-42], se dice que la población es *normal*.

En cambio, si en un país hay un núcleo extranjero, la gráfica no será una curva normal o de LAPLACE-GAUSS, sino que presentará una forma como la indicada en la figura 459. Hay métodos para descomponer tal función en suma de funciones normales y la figura indica que en este caso hay dos sumandos. La interpretación es clara: la estatura media de la mayoría del país es 1,50; y la estatura media de la minoría extraña es 1,65, siendo esta minoría aproximadamente $\frac{1}{4}$ de la población total, como se ve comparando las áreas.

9. **Errores de diversos órdenes.** — La determinación de una magnitud por observaciones se puede comparar con un juego en el que solamente hay pérdidas, pues los valores observados siempre difieren del valor exacto, y el error, sea positivo o negativo, puede considerarse como una pérdida; es un juego en que sólo puede aspirarse a perder lo menos posible, y de igual modo que en los juegos de azar se mide el *riesgo* por la *esperanza de pérdida*, es decir, por el producto de la cantidad arriesgada por la probabilidad de perderla, en la teoría de errores se puede definir el *riesgo de error* como suma de los diversos errores posibles δ_i por sus respectivas probabilidades, es decir, por la integral

$$[\text{Ap. IV-45}] \qquad \int |\delta| \varphi(\delta)\, d\delta = \int |\delta| dP \quad ,$$

la cual no es sino el límite del promedio de valores absolutos $\sum|\delta| : n$ *.

Por tanto, la integral [Ap. IV-45] es aproximadamente igual al *promedio absoluto* de los errores, es decir, a la media aritmética de los valores absolutos de los errores.

Esta medida del riesgo de error no es la más satisfactoria, pues la importancia de cada error no debe medirse por su cuantía, sino por una función de esa cuantía, y según cual sea esa función $F(\delta)$ que se elija, resulta una medida distinta del riesgo de error.

Si adoptamos la función δ^2 el riesgo es el promedio de los cuadrados δ^2 de los errores, cuya raíz cuadrada hemos llamado *error medio cuadrático*: μ.

Si se adoptan δ^3 o δ^4 resultan los errores medios cúbico y bicuadrático μ_3 y μ_4 de uso menos frecuente que los anteriores.

Adoptada la ley de LAPLACE-GAUSS resultan relaciones notables entre los errores medios y la precisión k. En efecto, las integrales respectivas se calculan directamente, o se deducen fácilmente ** de la ya calculada:

$$[\text{Ap. IV-46}] \qquad 2\int_0^\infty e^{-k^2x^2} \,.\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{k}$$

y son las siguientes:

$$[\text{Ap. IV-47}] \qquad 2\int_0^\infty x \quad e^{-k^2x^2} \,.\, dx = \frac{1}{k^2} \quad ; \quad \mu_1 = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \quad ;$$

$$[\text{Ap. IV-48}] \qquad 2\int_0^\infty x^2 \,.\, e^{-k^2x^2} \,.\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2k^3} \quad ; \quad \mu_2^2 = \frac{1}{2k^2} \quad ;$$

$$[\text{Ap. IV-49}] \qquad 2\int_0^\infty x^3 \,.\, e^{-k^2x^2} \,.\, dx = \frac{1}{k^4} \quad ; \quad \mu_3^3 = \frac{1}{k^3\sqrt{\pi}} \quad ;$$

$$[\text{Ap. IV-50}] \qquad 2\int_0^\infty x^4 \,.\, e^{-k^2x^2} \,.\, dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4k^5} \quad ; \quad \mu_4^4 = \frac{3}{4k^4} \quad .$$

Multiplicando todas por $K = k/\sqrt{\pi}$, los primeros miembros se transforman en: el error *promedio absoluto* π_1; el cuadrado del error *medio cua-*

---

* *Más general*: cualquiera que sea la función continua $F(x)$ la suma de valores de $F(x)$ en los ν puntos δ_r del intervalo h es igual a ν veces su media aritmética, la cual, por la continuidad, es uno de los valores $F(\xi)$ en el intervalo; luego, para dicho intervalo es $\sum F(x)/n = \nu F(\xi)/n = \Delta P \,.\, F(\xi)$; y como la probabilidad ΔP es la frecuencia por h, en el límite resulta la integral como límite de $\sum F(x)/n$ extendida a todo el campo de variación de x.

** La integral [Ap. IV-47] es inmediata, haciendo $kx = t$; la [Ap. IV-48] resulta derivando [Ap. IV-46] respecto del parámetro k; y derivando la [Ap. IV-48] sale la [Ap. IV-50]; análogamente, derivando la [Ap. IV-47] sale [Ap. IV-49]. La regla de derivación bajo el signo integral es válida por ser las integrales impropias uniformemente convergentes (§ 86-4, teor. 3).

drático μ_2^2 (o π^2 sin subíndice); el cubo del error *medio cúbico* μ_3^3; y el bicuadrado del error *medio cuártico* μ_4^4.

Llamando $\lambda = 1/k$ (puede considerarse como medida de la imprecisión) resultan, por tanto, estas relaciones:

[Ap. IV-51] $\mu_1 \sim \lambda : \sqrt{\pi} \quad \therefore \quad \mu_1 \sim \lambda \,.\, 0{,}564$

[Ap. IV-52] $\mu_2^2 \sim \lambda^2 : 2 \quad \therefore \quad \mu_2 \sim \lambda \,.\, 0{,}707$

[Ap. IV-53] $\mu_3^3 \sim \lambda^3 : \sqrt{\pi} \quad \therefore \quad \mu_3 \sim \lambda \,.\, 0{,}827$

[Ap. IV-54] $\mu_4^4 \sim \frac{3}{4}\lambda^4 \quad \therefore \quad \mu_4 \sim \lambda \,.\, 0{,}930$

He aquí, pues, cuatro procedimientos para calcular la medida k de la precisión del sistema de observaciones, o su recíproco λ; y conviene utilizar los cuatro para juzgar si los errores son efectivamente fortuitos *.

EJEMPLO. — En la serie de medidas indicadas en el ejemplo 3 del nº 7, es:

$$\Sigma|\delta_r| \sim 0{,}0408 \quad \therefore \quad \mu_1 \sim 0{,}0408 : 11 = 0{,}0037$$

Aplicando la primera fórmula [Ap. IV-51] para la precisión resulta $\lambda \sim 0{,}0065$. En cambio, utilizando el valor ya calculado, $\mu_2 \sim 0{,}0044$ resulta $\lambda \sim 0{,}0062$.

NOTA: En Cap. XIX, nota I, dimos ya el método general de cuadrados mínimos para satisfacer un sistema incompatible de gran número de ecuaciones lineales con error cuadrático mínimo.

10. **Error probable de un sistema de observaciones.** — La probabilidad de que un error esté comprendido entre $-x$ y x viene expresada por la integral:

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-k^2x^2} dx$$

la cual tiene las variables x y k; pero si hacemos el cambio de variable $kx = t$, se convierte en esta otra:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{kx} e^{-t^2} \,.\, dt = \Theta(kx)$$

llamando $\Theta(t)$ a la función primitiva de e^{-t^2}, por la constante $2/\sqrt{\pi}$. Esta función se ha tabulado al final y con esa tabla se puede calcular la probabilidad, conocida la precisión k.

Tiene especial interés aquel valor $x = r$ tal que la probabilidad de que sea $|\delta_n| < r$ es igual a la probabilidad de que $|\delta_n| > r$. O sea: la probabilidad para el intervalo $(-r, r)$ debe ser $\frac{1}{2}$, es decir: $\Theta(kr) = \frac{1}{2}$.

Este número r se llama *error probable* o mejor *error mediano*, y mediante la tabla se calcula fácilmente que debe ser:

[Ap. IV-55] $kr = 0{,}477 \quad \therefore \quad r = \lambda \,.\, 0{,}477$

o bien, expresado en función del error medio:

[Ap. IV-56] $r = \mu \,.\, 0{,}675$

He aquí, pues, una nueva medida de la precisión del sistema de observaciones, también proporcional inversamente a la precisión k.

A veces se toma como referencia el error probable. Si éste es, por ejemplo, 0,25, e interesa saber la probabilidad de que el error sea menor

* Dice BERTRAND: "Estas fórmulas singulares merecen tanta confianza, que un calculador que examine una serie de observaciones y encuentre que no satisfacen a estas relaciones, puede tener como seguro que han sido retocados y alterados los resultados de la experiencia."

Tratándose de fórmulas aproximadas, esta afirmación tan rotunda sólo es admisible cuando se excede cierto límite en las alteraciones.

que dos veces éste, podemos calcularla de dos modos: con la tabla de $\Theta(t)$ pondremos $t = k\,2 \,.\, 0{,}25$, y como según [Ap. IV-55] $k \,.\, 0{,}25 = 0{,}477$, buscaremos en la columna de Θ el valor para $t = 2 \,.\, 0{,}477$. Se evita este trabajo con la tabla especial de la última columna, donde para $t = 2$, leemos: 0,823.

TABLA PARA CÁLCULO DE ERRORES

t	$\varphi(t) = \dfrac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$	$\Theta(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$	$\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0{,}477\,t} e^{-t^2}dt$
0,0	0,564	0,000	0,000
0,1	0,559	0,112	0,054
0,2	0,542	0,223	0,107
0,3	0,516	0,329	0,160
0,4	0,481	0,428	0,213
0,5	0,439	0,520	0,264
0,6	0,394	0,604	0.314
0,7	0,346	0,678	0,363
0,8	0,297	0,742	0,411
0,9	0,251	0,797	0,456
1,0	0,208	0,843	0,500
1,1	0,168	0,880	0,542
1,2	0,134	0,910	0,582
1,3	0,104	0,934	0,619
1,4	0,079	0,952	0,655
1,5	0,059	0,966	0,688
1,6	0,044	0,976	0,719
1,7	0,031	0,984	0,748
1,8	0,022	0,989	0,775
1,9	0.010	0,993	0,800
2,0	0,007	0,995	0,823
2,1	0,004	0,997	0,843
2,2	0,003	0,998	0,862
2,3	0,002	0,999	0,879
2,4	0,001	0,999	0,895
2,5	0,001	1,000	0,908
2,6	0,000	1,000	0,921
2,7	0,000	1,000	0,931

11. **Bibliografía.** — *a*) Un detenido estudio de la evolución histórica de la teoría de la probabilidad y de problemas especiales da:

I. TODHUNTER: *A history of the mathematical theory of probability* (Chelsea, Nueva York, 1949).

Entre las obras de más valor histórico citemos la traducida al castellano, publicada originariamente en 1812, y desarrollo de lecciones dadas por su autor en 1795:

P. S. LAPLACE: *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* (Espasa-Calpe Argentina, Buenos Aires, 1947).

b) Una breve discusión no técnica sobre los fundamentos de la probabilidad trae:

E. BOREL: *Probabilité et certitude* (Presses Univ. de France, París, 1950).

Constituye el fascículo III del tomo IV (*Applications diverses et con-*

clusion) del gran "*Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications*" publicado por E. BOREL con la colaboración de varios autores, el estudio que contiene una profunda crítica de diversas concepciones de la probabilidad:

E. BOREL: *Valeur pratique et philosophie des probabilités* (Gauthier-Villars, París, 1939).

Exposición más sencilla trae la obra traducida del francés por W. SCHILLER:

E. BOREL: *El azar. Descubrimiento, aplicación y valor de las leyes del azar* (Ediciones del Tridente, Buenos Aires, 1945).

Exposición elemental de las ideas de su autor trae la obra, traducida del alemán por J. C. GRIMBERG:

R. VON MISES: *Probabilidad, Estadística y Verdad* (Espasa-Calpe Argentina, Buenos Aires, 1946);
pero de esta obra es preferible el original alemán en su 3ª edición muy revisada y con omisión de material polémico hoy superfluo:

R. VON MISES: *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Einführung in die neue Wahrscheinlichkeitslehre und ihre Anwendung* (Springer, Viena, 3ª ed., 1951).

De carácter técnico y mucho más elevado es:

R. VON MISES: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik* (Deuticke, Leipzig, 1931; reimpr.: Rosenberg, Nueva York, 1945).

Da un análisis del razonamiento científico inductivo y una fundamentación de la probabilidad la obra siguiente, donde el autor, apoyándose en que toda aplicación de la teoría de la probabilidad se basa en alguna probabilidad subjetivamente estimada, desarrolla una teoría subjetivista donde la probabilidad se interpreta como grado de creencia:

I. J. GOOD: *Probability and the weighing of evidence* (Hafner, Nueva York, 1950).

Incluye la fundamentación formal de la probabilidad con ayuda de la Lógica y de la Semántica, según lineamiento condicionado por la posición filosófica de su autor:

R. CARNAP: *Logical foundations of probability* (Univ. of Chicago Press; Chicago, Ill., 1950).

Una reimpresión de partes del capítulo IV de esta obra, se publica bajo el título:

R. CARNAP: *The nature and application of inductive Logic* (Univ. of Chicago Press; Chicago, Ill., 1951).

En la misma orientación está:

R. CARNAP y W. STEGMÜLLER: *Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit* (Springer, Viena, 1957).

Un profundo análisis de las dos etapas básicas en la fundamentación de la teoría de la probabilidad: *a*) el establecimeinto de leyes para obtener nuevas probabilidades de otras dadas; *b*) la formulación de reglas explícitas para asignar probabilidades en primer término, en situaciones donde originariamente no se dan probabilidades; dentro del marco del absoluto empirismo del autor, trae la obra:

H. REICHENBACH: *Wahrscheinlichkeitslehre; eine Untersuchung über die logischen und mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Leiden, 1935); traducción inglesa: *The theory of probability. An inquiry into the logical and mathematical foundations of the calculus of probability* (Univ. of California Press; Berkeley y Los Angeles, Calif.; 2ª ed., 1949).

c) Cuidadosas fundamentaciones matemáticas de la teoría de la probabilidad traen:

A. N. KOLMOGOROV: *Foundations of the theory of probability* (Chelsea, Nueva York; 2ª ed. en inglés, 1956); traducción del alemán (*Grundbe-*

griffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung; Springer, Berlín, 1933) con bibliografía adicional, por A. T. BHARUCHA-REID;

H. RICHTER: *Wahrscheinlichkeitstheorie* (Springer, Berlín, 1956).

d) Una sucinta exposición sobre probabilidades, con teoría de errores, trae la breve obra:

A. C. AITKEN: *Statistical mathematics* (Oliver and Boyd, Edimburgo; Interscience, Nueva York; 7ª ed., 1952); con traducción española: ***Estadística matemática*** (Dossat, Madrid-Buenos Aires, sin fecha).

Texto clásico, con teoría de errores y otras aplicaciones en su volumen II, es:

G. CASTELNUOVO: *Calcolo delle Probabilità* (Zanichelli, Bolonia; vol. I, 2ª ed., 1933; vol. II, 2ª ed., 1928).

Numerosos ejemplos, y ejercicios con respuestas, trae la obra de nivel relativamente elemental:

J. V. USPENSKY: *Introduction to mathematical probability* (McGraw, Nueva York, 1937).

También elemental, advirtiendo cuando las pruebas son incompletas, con énfasis en los teoremas límites, es:

M. E. MUNROE: *The theory of probability* (McGraw, Nueva York, 1951).

Limitada a cuestiones donde no interviene más que un conjunto a lo más numerable de eventualidades para evitar así toda noción matemática elevada, como teoría de la medida, etc., pero abordando en este marco restringido los problemas más avanzados del Cálculo de probabilidades, está la obra con valiosos ejemplos y ejercicios:

W. FELLER: *An inroduction to probability theory and its applications* (Vol. I; Wiley, Nueva York, 1950).

Traducida del ruso es la breve y clara exposición:

B. W. GNEDENKO y A. J. CHINTSCHIN: *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1955).

De amplio alcance y rico contenido, con muchas demostraciones omitidas pero con abundantes explicaciones heurísticas y ejemplos ilustrativos, es la obra:

R. FORTET: *Calcul des probabilités* (Centre Nat. de la Recherche Scientifique, París, 1950).

Adecuado para estudiantes con interés primordial en Estadística, con numerosos ejercicios con soluciones, es

H. CRAMÉR: *The elements of probability theory and some of its applications* (Wiley, Nueva York, 1955).

Más completo y con uso de más recursos matemáticos, incluídos en varios capítulos preliminares sobre teoría de la medida, integral de Lebesgue-Stieltjes y otras cuestiones, es:

H. CRAMÉR: *Mathematical methods of Statistics* (Princeton Univ. Press, 1946); traducción española: ***Métodos matemáticos de la Estadística*** (Aguilar, Madrid, 1953).

Texto avanzado y obra de consulta es el libro con enorme contenido limitado a cuestiones puramente matemáticas y sin dar aplicaciones, y con material complementario en forma de ejercicios:

M. LOÈVE: *Probability theory. Foundations. Random sequences* (Van Nostrand, Nueva York, 1955).

Aunque son de nivel elevado, mencionemos por su notoria influencia en el moderno desarrollo de la teoría de la probabilidad y sus relaciones con otros capítulos de la Matemática, las obras de GNEDENKO y KOLMOGOROV y de DOOB (citadas en Cap. XXIV, nota IV, 3).

e) Excelentes exposiciones sobre teoría de errores traen el capítulo IX de la obra de WHITTAKER y ROBINSON (citada en Cap. X, nota V, 4), y los capítulos VI y VII de:

B. L. VAN DER WAERDEN: *Mathematische Statistik* (Springer, Berlín, 1957).

Algo modernizado en su novena edición, pero siguiendo la tradición clásica, es el libro elemental publicado originariamente en 1923:

E. BOREL, R. DELTHEIL y R. HURON: *Probabilités, erreurs* (Armand Colin, París, 9ª ed., 1954).

Al gran "*Traité*" de BOREL citado en *b*, pertenece como fascículo II del tomo I (*Les principies de la théorie des probabilités*):

R. DELTHEIL: *Erreurs et moindres carrés* (Gauthier-Villars, París, 1930).

Escrita para físicos y quienes deban hacer análisis críticos de observaciones instrumentales, está la compacta y práctica exposición:

Y. BEERS: *Introduction to the theory of errors* (Addison-Wesley; Cambridge, Mass.; 1953).

Una presentación detallada de su tema, bien ilustrada con numerosos ejemplos, da:

W. GROSSMANN: *Grundzüge der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendungen in der Geodäsie* (Springer, Berlín, 1953).

f) Sobre Estadística tratan las obras de VON MISES citadas en (*a*); CRAMÉR: *Mathematical Methods of Statistics* (citada en *d*) y VAN DER WAERDEN (citada en *e*). Abarca con amplitud y orientación moderna los métodos de la Estadística, la obra siguiente, cuyo volumen II es de carácter más elevado aunque se omiten algunas de las demostraciones más delicadas:

S. RÍOS: *Introducción a los métodos de la Estadística* (Edic. del autor; Leizarán, 21; vol, I, 2ª ed., 1952; vol. II, 1954).

APÉNDICE V

NOMOGRAFÍA

1. Ábacos cartesianos. — *a) Escalas y módulos.* — La *nomografía* (de "nomos" = ley) es una rama de la matemática de aplicación que tiene por objeto la construcción de tablas gráficas o *nomogramas*, de modo que permitan resolver mediante simples lecturas gráficas toda una serie de problemas en los que pueden variar los parámetros, o datos conocidos, sin necesidad de rehacer para cada caso particular el cálculo gráfico.

El concepto generalizado de escala es fundamental en nomografía. *Escala* es toda sucesión de puntos, acotados, que se han marcado según una cierta ley creciente, sobre una línea cualquiera, llamada *soporte* de la escala. Las de soporte curvilíneo se refieren a las de soporte rectilíneo y de éstas nos ocuparemos primeramente. Los números z, que corresponden a los puntos marcados por trazos de la escala, se llaman *cotas de la escala*. La diferencia h, generalmente constante, entre las cotas $z + h$ y z, de dos puntos consecutivos, se llama *escalón* de la escala, siendo el *paso* o *intervalo* i la distancia que, sobre el papel, separa esos dos puntos sobre el soporte. Si las cotas se suceden en progresión aritmética, la escala es *normal* y si los intervalos son iguales, es decir, si lo son los segmentos que separan cada dos trazos consecutivos, la escala es *métrica* o *natural*. Sin embargo, son más interesantes las escalas *funcionales*, donde, a partir de un origen O se toman segmentos s proporcionales a los valores de una función creciente $f(z)$, cuyos extremos marcan los puntos de la escala, dada mediante

[Ap. V-1] $$s = m\,f(z) \quad ,$$

siendo el factor de proporcionalidad m el *módulo* de la escala. Así, la distancia de un trazo al origen (no necesariamente contenido en el dibujo) tiene por medida el valor de la función cuando se toma el módulo por unidad. Dicho módulo se elige de modo que la parte interesante de la escala esté contenida completamente en su representación gráfica.

El intervalo de una escala funcional, dado (§ 35-1) por:

[Ap. V-2] $$i = m[f(z+h) - f(z)] = m\,h\,f'(z + \theta h), \quad (0 < \theta < 1),$$

no es, en general, constante y para ciertas escalas, tal $1/z^2$, el intervalo disminuye excesivamente cuando las cotas aumentan. De ahí que se recomiende, entonces, un *cambio de escalón* que permita aún interpolaciones precisas, para lo cual el intervalo i no ha de ser inferior al milímetro. La aproximación que se obtiene, dada por el escalón h, puede afinarse, entonces, mediante la *interpolación visual*, hasta un error absoluto de $h/5$.

Las escalas más frecuentemente usadas son las siguientes:

1º) *Escalas métricas* (o *naturales*): $s = m\,z + s_0$, dadas por una función lineal.

2º) *Escalas parabólicas* (o *potenciales*): $s = m\,z^n$, donde n es un número real fijo, cualquiera, dadas por una función potencial (§ 27-4).

3º) *Escalas logarítmicas* $s = m \log z$, dadas por la función logarítmica (§ 8-7) de base cualquiera, en particular, natural o decimal. Son las empleadas en la regla de cálculos y en el papel logarítmico. En el

reverso de la regla de cálculos figuran también escalas de log sen z y log tg z.

4º) *Escalas homográficas*:

$$s = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}\ ,\quad (ad \neq bc),$$

donde la relación entre s y z es bilineal respecto de dichas variables:

$$c\,s\,z + d\,s - a\,z - b = 0.$$

Más generalmente, se llama *escala proyectiva*, la $F(z)$, deducida de una escala conocida $f(z)$, mediante una transformación homográfica:

[Ap. V-3] $$s = m\,F(z) = m\,\frac{a\,f(z) + b}{c\,f(z) + d}\ ,\quad (ad \neq bc),$$

determinada por tres pares de elementos correspondientes (§ 114-4).

Puede pasarse fácilmente de la escala $f(z)$ a la escala $F(z)$ mediante una proyectividad, si los soportes respectivos se cortan en un punto de igual cota en ambas escalas, siendo el centro de perspectividad la intersección de dos alineaciones que unan sendos pares de puntos correspon-

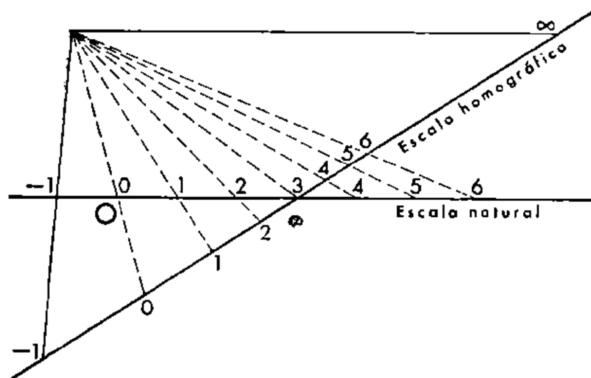


Fig. 460.

dientes con la misma cota en ambas escalas. La figura 460 representa el paso de una escala natural a una homográfica.

La forma más sencilla de construir una escala funcional es llevar sobre el soporte los segmentos s, dados por [Ap. V-1], cuando se conoce una tabla numérica de la función $f(z)$, asignando a cada trazo de la escala, no la medida de dicho segmento s, sino el valor correspondiente de la cota z.

En cambio, si tenemos dibujada la gráfica (§ 23-2) de la función $s = f(z)$, supuesto $m = 1$, (pues se suele tomar para el módulo un número sencillo, preferentemente una potencia de 10), basta llevar sobre el eje s, por sendas paralelas al eje z, los puntos de cota z, asignando a las proyecciones no el valor de s, sino el de z, para tener gráficamente la escala funcional buscada.

Si al otro lado del eje s dibujamos también la escala natural s, tendremos ejemplo de un *ábaco de dos escalas* superpuestas, que suele emplearse muchas veces para expresar una misma magnitud en dos sistemas distintos de unidades, tal la temperatura (°C y °F) o el ángulo (en medidas sexagesimal y radial). La regla de cálculos también nos ofrece un ejemplo de ábaco de escalas superpuestas de los números y de sus

cuadrados, en forma logarítmica, pues la función $\zeta = z^2$ se representa por los segmentos, inferior y superior, $s = m \log z$, $\sigma = (1/2)\, m \log \zeta = s$.

b) *Ábacos cartesianos.* — La representación gráfica de una función de dos variables $z = \mathrm{f}(x, y)$, mediante sus curvas de nivel (§ 64-2, *b*), se llama también *ábaco cartesiano*. Si se suponen trazadas las dos familias de rectas paralelas a los ejes, o más comodamente, se usa papel milimetrado, cada punto del plano, intersección de tres líneas: las dos paralelas a los ejes y la curva de nivel que pasa por él, tendrá asignados tres números, coordenadas del punto correspondiente situado sobre la superficie $z = \mathrm{f}(x, y)$.

Más en general, si suponemos dadas en el plano (x, y) tres familias de líneas:

[Ap. V-4] $$\mathrm{F}_1(x, y, z_1) = 0 \quad , \quad \mathrm{F}_2(x, y, z_2) = 0 \quad , \quad \mathrm{F}_3(x, y, z_3) = 0 \quad ,$$

de modo que por cada punto del plano pase una línea de cada familia, y eliminamos x, y entre las tres [Ap. V-4], obtendremos una relación entre las tres cotas z_1, z_2, z_3, tal como

[Ap. V-5] $$\mathrm{F}(z_1, z_2, z_3) = 0 \quad .$$

Estos ábacos se llaman también de *líneas concurrentes*, porque tres líneas, una de cada familia [Ap. V-4], concurrentes en un punto, tienen como cotas tres números que satisfacen la relación [Ap. V-5]. El caso que hemos tratado inicialmente corresponde a que las dos primeras familias sean haces de rectas paralelas a los ejes que den directamente las coordenadas, con posibles escalas distintas, es decir, las [Ap. V-4] serán ahora:

[Ap. V-6] $$x = m_1 z_1 \quad , \quad y = m_2 z_2 \quad , \quad \mathrm{F}_3(x, y, z_3) = 0 \quad ,$$

y la relación [Ap. V-5] entre las tres cotas es, entonces:

[Ap. V-7] $$\mathrm{F}_3(m_1 z_1, m_2 z_2, z_3) = 0 \quad .$$

Si despejamos $z_3 = z$ de la tercera [Ap. V-6], tendremos la relación que liga las tres variables en forma explícita $z = z_3 = \mathrm{f}(x, y)$.

EJEMPLOS: 1. La función $z = xy$ tiene por representación gráfica el ábaco cartesiano dibujado en la fig. 214 (Vol. II).

2. Para la ecuación de VAN DER WAALS:

[Ap. V-8] $$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \mathrm{R}\mathrm{T},$$

pueden dibujarse fácilmente las curvas correspondientes a distintos $t = \mathrm{T} - 273 =$ constante, sin más que despejar:

[Ap. V-9] $$p = \frac{\mathrm{R}(t + 273)}{v - b} - \frac{a}{v^2} \quad ,$$

donde, si la temperatura t viene dada en grados centígrados, la presión p en atmósferas y v es el volumen, referido al correspondiente a tomar como unidad, el ocupado por la molécula gramo a 0° y una atmósfera de presión, para el anhídrido carbónico, las constantes valen: $\mathrm{R} = 0{,}00366$, $a = 0{,}00717$, $b = 0{,}00191$.

En la figura 461 las cotas de las curvas de nivel (isotermas) correspondientes a distintos valores de t se han señalado en una recta paralela al eje p, para facilitar la lectura. Véase, en ella, el punto correspondiente a la terna $v = 0{,}0132$, $p = 57$, $t = 30$.

c) *Ábacos rectilíneos.* — Inconveniente grave de los ábacos cartesianos es el trazado de numerosas curvas de nivel. Si éstas se convierten en rectas, tanto el trazado como la lectura y la interpolación visual que-

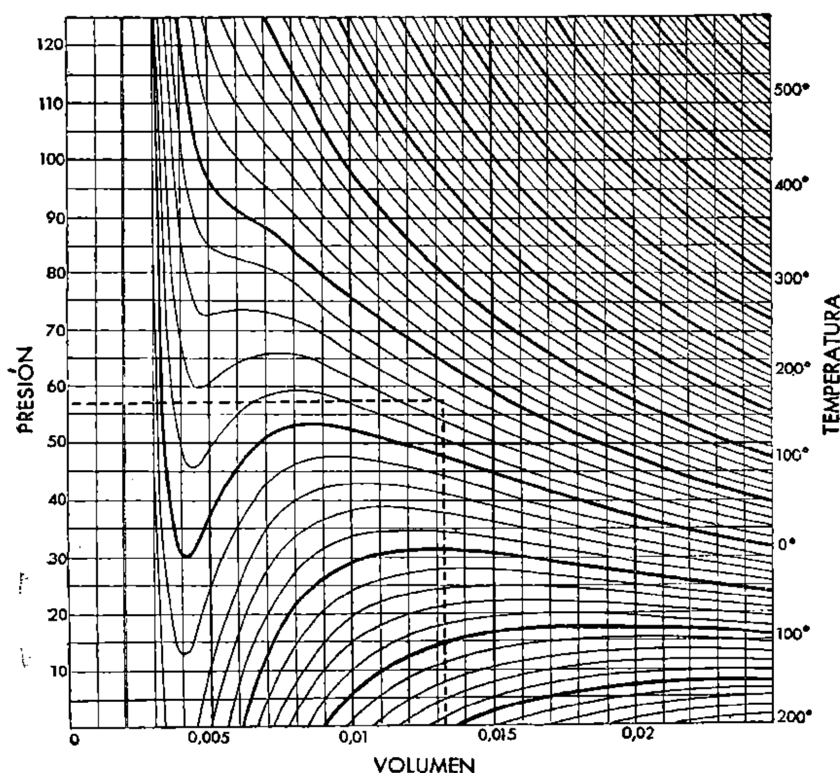


Fig. 461.

darán altamente facilitados. Para lograrlo, basta, a veces, elegir adecuadamente las variables, o bien hacer un cambio de escala funcional que transforme las curvas en rectas, transformación que se llama *anamórfosis analítica*.

EJEMPLOS: 3. Si referimos la ecuación de VAN DER WAALS [Ap. V-9] al plano (p, t), tomando como cotas paramétricas los valores de $v =$ constante, el ábaco correspondiente será rectilíneo (fig. 462).

4. El alcance geográfico de un faro (limitado por la curvatura terrestre) viene dado en km por la distancia $d = 3{,}85\ (\sqrt{H} + \sqrt{h})$, donde H es la altura en metros del foco de luz y h es la altura en metros del observador, ambas sobre el nivel del mar. Si queremos hacer variar $5 \leqslant H \leqslant 100$, $0 \leqslant h \leqslant 20$, tomando $x = \sqrt{H}$, $y = \sqrt{h}$, marcaremos en sendas escalas parabólicas (con módulos distintos y adecuados al tamaño del papel) sobre el eje horizontal H de 0 a 100 y sobre el eje vertical h de 0 a 20, y uniendo un par de puntos de igual cota, situados uno sobre cada

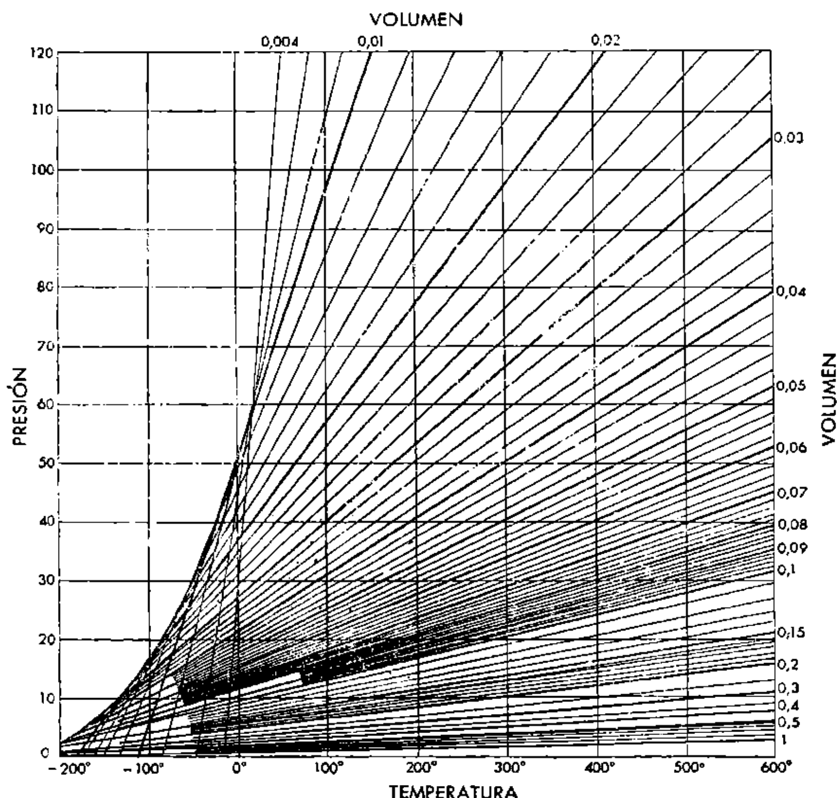


Fig. 462.

eje, obtendremos una recta que, con sus paralelas, corresponderán a cotas d, cuyo valor da la fórmula propuesta. Bastará entonces limitar el gráfico mediante un rectángulo cuya base vaya de 5 a 100 y su altura de 0 a 20, siendo el haz de rectas paralelas, las líneas de nivel $d =$ constante (hágase).

5. El ábaco cartesiano que permite resolver la ecuación:

[Ap. V-10] $$z^n + p\,z^r + q = 0$$

será rectilíneo si en el plano (p, q) trazamos las rectas [Ap. V-10] correspondientes a distintos valores constantes de z. Así, dados p y q, las cotas z de las rectas que pasen por dicho punto (p, q) (varias, una o ninguna) darán gráficamente las raíces de [Ap. V-10]. Particularmente interesantes son los ábacos correspondientes a las ecuaciones de 2º grado $(n = 2, r = 1)$, (fig. 463) y de 3er. grado $(n = 3, r = 1)$ (fig. 464), donde claramente se observan las regiones de puntos que corresponden a ecuaciones que tienen varias, una o ninguna raíz real. También se observan en

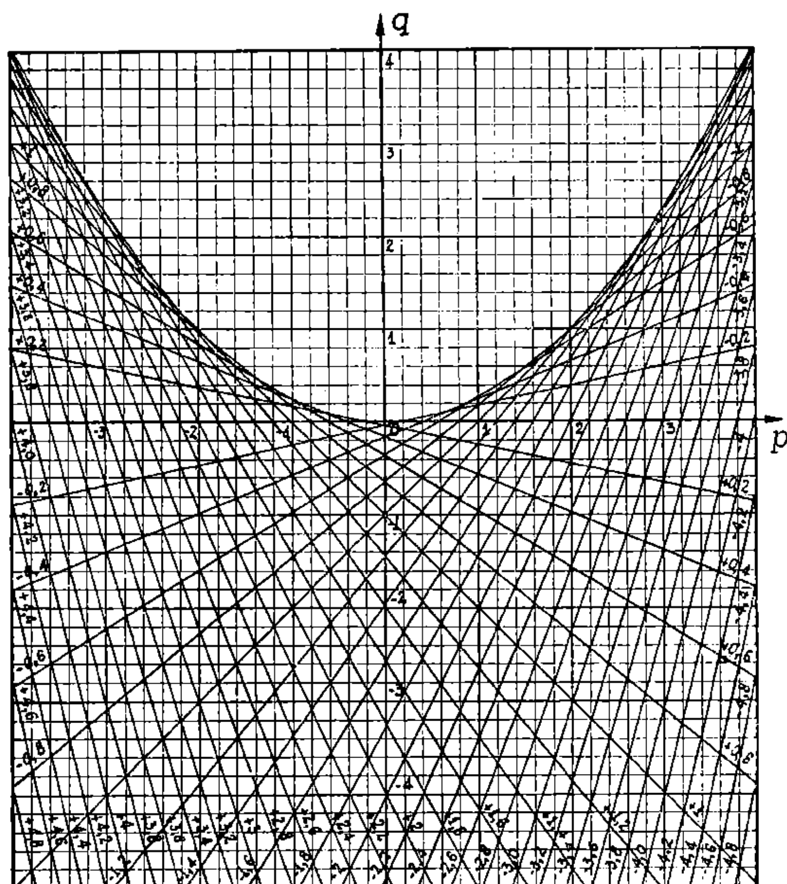


Fig. 463.

ellos las *curvas discriminantes*, que separan dichas regiones y corresponden a ecuaciones con raíces múltiples.

Si los coeficientes p y q no están dentro de los límites del ábaco, basta el *empleo de multiplicadores*, poniendo $z = \lambda Z$ para que [Ap. V-10] se convierta en:

$$Z^n + P Z^r + Q = 0 \quad ,$$

con $P = p\lambda^{r-n}$, $Q = q\lambda^{-n}$, y luego se elige adecuadamente el multiplicador λ para que P y Q están situados dentro del ábaco.

La relación [Ap. V-5] podrá representarse por un ábaco rectilíneo, si por anamórfosis analítica aplicada a los dos primeros parámetros:

[Ap. V-11] $$x = m_1 h_1(z_1) \quad , \quad y = m_2 h_2(z_2) \quad ,$$

se obtenga de [Ap. V-5] y [Ap. V-11] por eliminación de z_1 y z_2, la ecuación lineal:

$$x f_3(z_3) + y g_3(z_3) + h_3(z_3) = 0 \quad ,$$

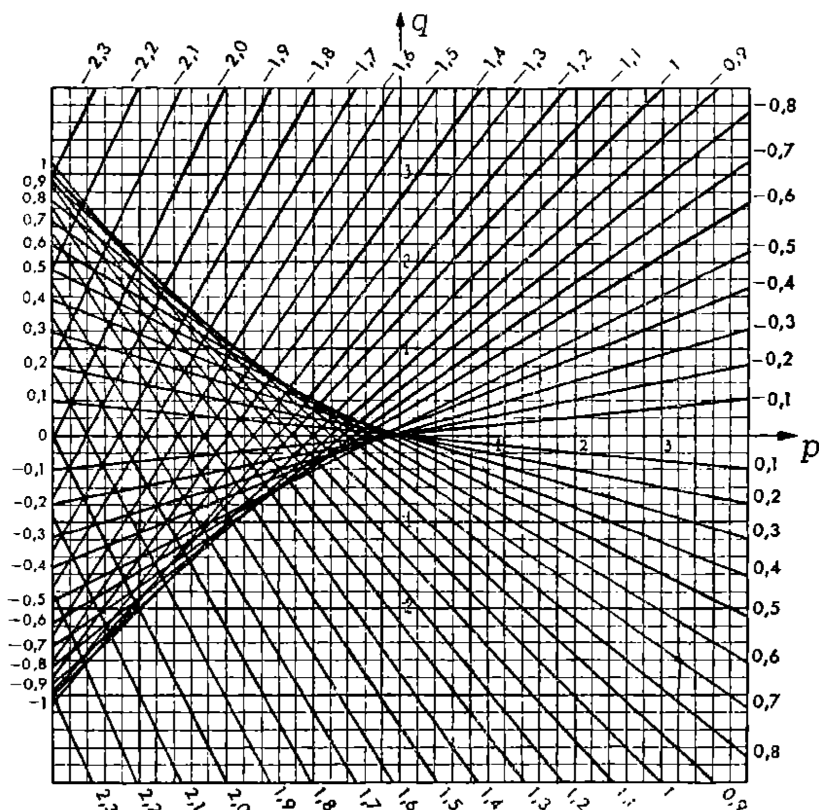


Fig. 464.

es decir, si la relación [Ap. V-5] es de la forma:

[Ap. V-12] $$h_1(z_1)f_3(z_3) + h_2(z_2)g_3(z_3) + h_3(z_3) = 0 \quad ,$$

expresión bastante general y a la que pueden llevarse muchas funciones por adecuadas transformaciones (cfr. Ap. V-2, *c*).

EJEMPLOS: 6. La relación:

$$h_1(z_1)^{f_3(z_3)}\, h_2(z_2)^{g_3(z_3)}\, h_3(z_3)^{k_3(z_3)} = C \quad ,$$

se lleva inmediatamente a la forma [Ap. V-12] tomando logaritmos.

7. La relación:

$$h_3(z_3) = h_1(z_1)\sqrt{1-[h_2(z_2)]^2} + h_2(z_2)\sqrt{1-[h_1(z_1)]^2}$$

puesta bajo la forma:

$$\text{arc sen}\, h_3(z_3) = \text{arc sen}\, h_1(z_1) + \text{arc sen}\, h_2(z_2) \quad ,$$

es del tipo [Ap. V-12].

En general, un ábaco rectilíneo es aquel en que las tres familias de líneas [Ap. V-4] son haces de rectas r_i $(i = 1, 2, 3)$:

[Ap. V-13] $\quad \mathrm{f}_i(z_i) \cdot x + \mathrm{g}_i(z_i) \cdot y + \mathrm{h}_i(z_i) = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \quad ,$

y por tanto, eliminando x, y entre estas tres ecuaciones (§ 15, Ejerc. 9), obtendremos la siguiente importante *forma general de la relación* [Ap. V-5], *que es susceptible de representarse mediante un ábaco rectilíneo:*

[Ap. V-14] $$\mathrm{F}(z_1, z_2, z_3) \equiv \begin{vmatrix} \mathrm{f}_1(z_1) & \mathrm{g}_1(z_1) & \mathrm{h}_1(z_1) \\ \mathrm{f}_2(z_2) & \mathrm{g}_2(z_2) & \mathrm{h}_2(z_2) \\ \mathrm{f}_3(z_3) & \mathrm{g}_3(z_3) & \mathrm{h}_3(z_3) \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Para $\mathrm{f}_1(z_1) \equiv \mathrm{g}_2(z_2) \equiv -1$, $\mathrm{g}_1(z_1) \equiv \mathrm{f}_2(z_2) \equiv 0$, la [Ap. V-14] se convierte en la [Ap. V-12].

d) *Ábacos circulares.* — Para que las tres familias de líneas del ábaco sean circunferencias (o circunferencias y rectas), las ecuaciones [Ap. V-4] deben ser:

[Ap. V-15] $$\mathrm{k}_i(z_i)(x^2 + y^2) + \mathrm{f}_i(z_i) \cdot x + \mathrm{g}_i(z_i) \cdot y + \\ + \mathrm{h}_i(z_i) = 0, \quad (i = 1, 2, 3),$$

de las que eliminando x, y, se obtendrá la forma general de la relación [Ap. X-5] susceptible de representarse por un ábaco circular.

EJEMPLO 8. La fórmula $12\,\mathrm{V} = \pi(\mathrm{D}^2 + d^2 + \mathrm{D}d)$, que da el volumen V del tronco de cono de bases circulares de diámetros D y d y de altura unidad, puede representarse por un ábaco formado por el haz de circunferencias $4\,\mathrm{V} = \pi(x^2 + y^2)$ y los dos haces de rectas $\mathrm{D} = x + \sqrt{3}\,y$, $d = x - \sqrt{3}\,y$.

e) *Ábacos triangulares.* — Se refieren a la utilización de coordenadas triangulares. Dichas coordenadas las introdujo A. F. MOEBIUS en su libro "*Der barycentrische Calcul*" (1827), como coordenadas *homogéneas* referidas a un triángulo *propio* $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ tomado como básico (fig. 465), de alturas h_1, h_2, h_3. Si son d_1, d_2, d_3 las distancias de un punto P a los lados a_i del triángulo básico, Δ el área de éste y Δ_i el área de los triángulos $\mathrm{PA}_j\mathrm{A}_k$ $(i \neq j \neq k \neq i = 1, 2, 3)$, se tendrá $\Delta = \frac{1}{2}a_i h_i$, $\Delta_i = \frac{1}{2}a_i d_i = \Delta d_i/h_i$, $(i = 1, 2, 3)$, dando:

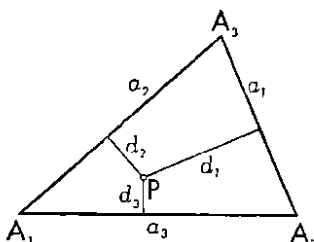


Fig. 465.

$$\frac{\Delta_1}{d_1/h_1} = \frac{\Delta_2}{d_2/h_2} = \frac{\Delta_3}{d_3/h_3} = \Delta$$

y por ser $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \Delta$ se cumple:

[Ap. V-16] $$\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} = 1 \quad .$$

Entonces, se pueden tomar como coordenadas homogéneas (x_1, x_2, x_3) de P, números proporcionales a las áreas Δ_1, Δ_2, Δ_3, es decir, cumpliendo:

[Ap. V-17] $$\frac{x_1}{d_1/h_1} = \frac{x_2}{d_2/h_2} = \frac{x_3}{d_3/h_3} = \frac{1}{\varrho} \; ,$$

de modo que si $\mathrm{A}_i x + \mathrm{B}_i y + \mathrm{C}_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$ son las ecuaciones cartesianas de los lados del triángulo básico (referido a un sistema de ejes rectangulares), dichas coordenadas (x_1, x_2, x_3) de P, llamadas *baricéntricas*,

se podrán expresar respecto de las cartesianas (x, y) mediante (cfr. § 60-8, b_3 y nota 7):

$$\rho x_i = d_i/h_i = A_i x + B_i y + C_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3),$$

donde es no nulo el determinante $|A_i, B_i, C_i| \neq 0$, por ser no concurrentes los tres lados del triángulo. Por tanto, pueden despejarse x, y en función de x_1/x_3 y x_2/x_3, y así la ecuación de la recta en coordenadas baricéntricas, es:

[Ap. V-18] $$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \quad ,$$

donde u_1, u_2, u_3, no simultáneamente nulos, pueden tomarse como coordenadas homogéneas duales de dicha recta. La ecuación $x_i = 0$ es la del lado del triángulo básico opuesto al vértice A_i. El baricentro del triángulo básico tiene coordenadas (1, 1, 1). Si en [Ap. V-17] tomamos $\rho = 1$, es decir, $x_i = d_i/h_i$, la [Ap. V-16] nos dice que entonces se cumplirá:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad .$$

Si tomamos como coordenadas homogéneas valores proporcionales a las distancias d_i, es decir:

[Ap. V-19] $$\frac{x_1}{d_1} = \frac{x_2}{d_2} = \frac{x_3}{d_3} = \frac{1}{\rho} \quad ,$$

se obtendrán las llamadas *coordenadas trilineales*, respecto de las cuales el punto unidad (1,1,1) es el incentro del triángulo básico (centro de su circunferencia inscripta), siendo también la ecuación de la recta de la forma lineal [Ap. V-18].

Si el trángulo básico es *equilátero*, $a_1 = a_2 = a_3 = a$ con $h_1 = h_2 = h_3 = h$, la [Ap. V-16] se convierte en:

[Ap. V-20] $$d_1 + d_2 + d_3 = h \quad .$$

Podremos tomar para coordenadas de P, indistintamente, las distancias d_i o los segmentos p_i paralelos a los lados del triángulo equilátero y comprendidos entre P y estos lados, porque en [Ap. V-19] ello sólo representa variar el factor de proporcionalidad ρ. Obsérvese que se cumple también (fig. 466):

[Ap. V-21] $$p_1 + p_2 + p_3 = a \quad ,$$

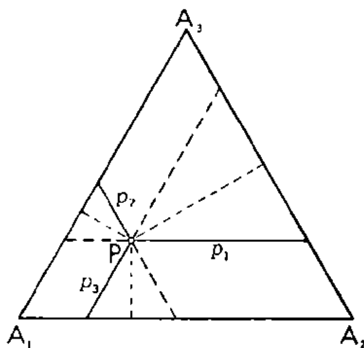


Fig. 466.

de modo que si se hace $a = 100$, el punto P puede ser considerado como representación geométrica de un compuesto ternario, siendo p_1, p_2, p_3, los porcentajes de los tres cuerpos componentes. Los puntos de los lados del triángulo corresponden a compuestos binarios y los vértices a los cuerpos puros. La propiedad fundamental de esta representación triangular de las mezclas ternarias dice que *si varias mezclas ternarias de las mismas tres componentes* A_1, A_2, A_3, *tienen como representación los puntos* P′, P″, ..., $P^{(n)}$ *y formamos la mezcla resultante tomando* masas m', m'', ..., $m^{(n)}$ *de las mezclas respectivamente dadas por* P′, P″, ..., $P^{(n)}$, *el punto* P *de dicha mezcla resultante es el centro de gravedad del sistema, formado por las masas* $m^{(i)}$, *colocadas respectivamente en los puntos* $P^{(i)}$, $(i = 1, 2, ..., n)$. Basta observar que la mezcla resultante de tomar masas m', m'' de las mezclas dadas por P′ y P″ tiene por coordenadas:

$$p_i = (m' p_i' + m'' p_i'')/(m' + m'') \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \quad ,$$

igualdades que representan también las ecuaciones paramétricas de la línea recta en coordenadas triangulares.

Muy empleados son los ábacos triangulares que expresan propiedades importantes de las mezclas ternarias, tal, por ejemplo, el correspondiente a la *superficie de fusibilidad*, que indica la temperatura de fusión de los compuestos que puedan formarse con tres componentes dadas. Las líneas de nivel o *isotermas* de dicha superficie, darán las curvas de fusión cuyos puntos representan las mezclas que se funden a la misma temperatura, como las indicadas (fig. 467) para las mezclas de tres carbonatos.

Por anamórfosis analítica, las relaciones del tipo:

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(z_3) = C \quad ,$$

pueden representarse fácilmente, pues para que se cumpla [Ap. V-21] basta escoger las escalas funcionales:

$$p_1 = m\,f_1(z_1), \quad p_2 = m\,f_2(z_2), \quad p_3 = m\,f_3(z_3)$$

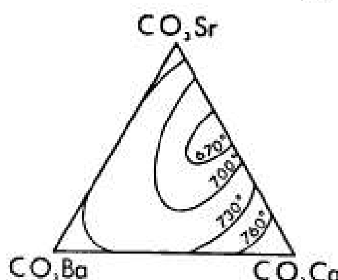
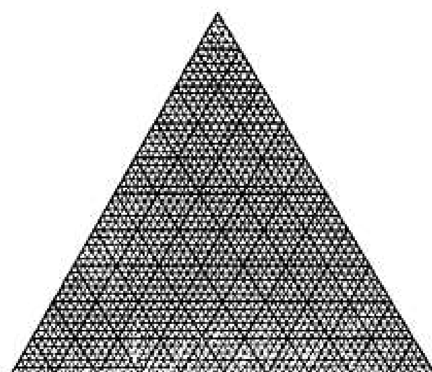


Fig. 467.

con $a = Cm$, y entonces, el ábaco está constituído por tres haces de rectas paralelas a los lados del triángulo básico formando red triangular; existen en el comercio papeles con la red trazada en esta forma (fig. 468).

Si se emplean como coordenadas las distancias d_i, cumpliendo ahora [Ap. V-20] en lugar de [Ap. V-21], las tres escalas funcionales deben ir sobre soportes normales a los tres lados del triángulo equilátero de referencia, escalas que pueden dibujarse sobre tres rectas cualesquiera respectivamene perpendiculares a los lados de dicho triángulo básico, con orígenes situados sobre estos dos lados. Para hallar las cotas que corresponden a cada punto P, bastará trazar por P (fig. 469) paralelas a los lados del triángulo básico, es decir, *normales*


Fig. 468.

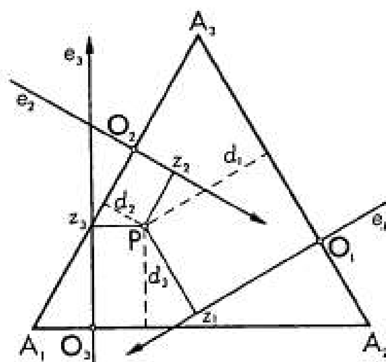


Fig. 469.

a las escalas e_i y su intersección con las escalas dará el valor de dichas cotas. Por tanto, podemos prescindir del triángulo básico, y el procedimiento anterior subsistirá al variar la altura de dicho triángulo, incluyendo el caso degenerado del triángulo de altura nula. En este último caso, la relación a representar adopta la forma:

[Ap. V-22] $$f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(z_3) = 0$$

y las tres escalas funcionales $d_i = m\, f_i(z_i)$, $(i = 1, 2, 3)$ se disponen sobre tres soportes paralelos a los lados de un triángulo equilátero para formar un *ábaco exagonal* (fig. 470), de modo que una terna de rectas concurrentes normales a las escalas determina sobre éstas valores que satisfacen a la relación [Ap. V-22].

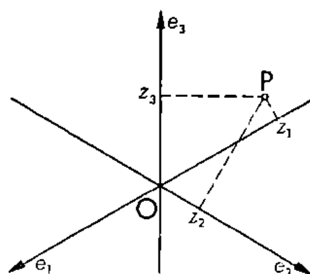


Fig. 470.

Estos ábacos evitan los inconvenientes que se atribuyen a los ábacos cartesianos, pues en ellos no se traza curva alguna, y su lectura se facilita utilizando un papel transparente que lleva grabadas, finas y bien visibles, tres semirrectas concurrentes según esas normales, de dirección que se mantiene, ya dibujando sobre el fondo del ábaco una sucesión de paralelas a una de esas direcciones que sirvan de guía, ya utilizando papel triangular (fig. 468). Tienen la limitación de representar sólo relaciones de la forma [Ap. V-22].

2. **Nomogramas de puntos alineados.** — *a*) *Generalidades.* — Basándose en el principio de dualidad en el plano, M. D'OCAGNE consiguió pasar (1884) de los confusos y complicados, aunque a veces útiles (cfr. Ap. V-4) ábacos cartesianos de rectas concurrentes, a los claros, precisos y fácilmente construibles nomogramas de puntos alineados.

Ahora, en lugar de tener tres haces de rectas con envolventes E_1, E_2, E_3, tendremos tres escalas puntuales e_1, e_2, e_3 (fig. 471), cuyos soportes

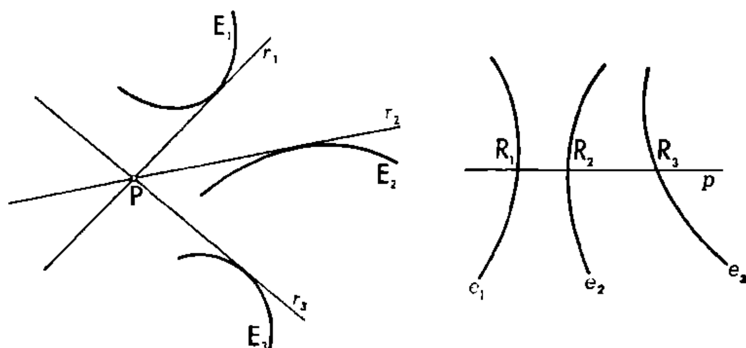


Fig. 471.

sean tres curvas cualesquiera, tales que, en lugar de tener rectas r_i [Ap. V-13], una de cada haz $(i = 1, 2, 3)$, concurrentes en un punto P, tendremos puntos R_i, uno de cada escala e_i $(i = 1, 2, 3)$, alineados sobre una misma recta p, como condición necesaria y suficiente para que sus cotas respectivas z_i cumplan una relación funcional [Ap. V-5]. La misma forma [Ap. V-14] de relación funcional susceptible de representarse por un ábaco rectilíneo, es también susceptible de representarse por un nomograma de puntos alineados, si ahora $[f_i(z_i),\ g_i(z_i),\ h_i(z_i)]$ son las coordenadas homogéneas de los puntos R_i $(i = 1, 2, 3)$, en un sistema triangular o proyectivo cualquiera de coordenadas puntuales.

Podemos pasar a coordenadas cartesianas absolutas, suponiendo que los soportes de las escalas e_i tienen como ecuaciones paramétricas:

[Ap. V-23] $$e_1\begin{cases} x_1 = g_1(z_1) \\ y_1 = f_1(z_1) \end{cases}, \quad e_2\begin{cases} x_2 = g_2(z_2) \\ y_2 = f_2(z_2) \end{cases}, \quad e_3\begin{cases} x_3 = g_3(z_3) \\ y_3 = f_3(z_3) \end{cases},$$

y como la condición necesaria y suficiente para que los puntos R_i (x_i, y_i), $(i = 1, 2, 3)$, estén en línea recta es:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

la relación [Ap. V-5] susceptible de representarse por un nomograma de puntos alineados de escalas [Ap. V-23], será ahora:

[Ap. V-24] $$\begin{vmatrix} g_1(z_1) & f_1(z_1) & 1 \\ g_2(z_2) & f_2(z_2) & 1 \\ g_3(z_3) & f_3(z_3) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Estos nomogramas de puntos alineados se conservan limpios, si cada vez que se emplean, en lugar de trazar sobre ellos líneas de correspondencia, se utiliza un hilo tirante, el borde de una regla biselada, o aun mejor, una tira de papel transparente en la que se ha dibujado una línea recta fina y bien visible.

Veamos los principales tipos particulares de esta clase de nomogramas.

b) Nomogramas con las tres escalas de soportes rectilíneos paralelos. — Si la dirección común de los tres soportes rectilíneos paralelos es la del eje y, en [Ap. V-23] será entonces $x_i = g_i(z_i) = c_i$ $(i = 1, 2, 3)$ y al desarrollar [Ap. V-24] por los elementos de la segunda columna, la relación [Ap. V-5] será de la forma:

[Ap. V-25] $$(c_3 - c_2) f_1(z_1) + (c_1 - c_3) f_2(z_2) + (c_2 - c_1) f_3(z_3) = 0$$

Si en lugar de las segundas ecuaciones [Ap. V-23] $y_i = f_i(z_i)$, consideramos tres escalas paralelas $m_1F_1(z_1)$, $m_2F_2(z_2)$, $m_3F_3(z_3)$ de módulos m_i y colocamos (fig. 472) las escalas e_1, e_2 en los bordes izquierdo y derecho del papel disponible, a distancia A, y la tercera escala e_3 en medio, a distancia a de la escala izquierda e_1, la relación [Ap. V-25], con $a = c_3 - c_1$, $A = c_2 - c_1$, será:

Fig. 472.

$$(a - A) m_1F_1 - a\, m_2F_2 + A\, m_3F_3 = 0 \quad ,$$

y tomando:

[Ap. V-26] $$(a - A) m_1 = -a\, m_2 = -A\, m_3 \quad ,$$

dicha relación se convierte en:

[Ap. V-27] $$F_1(z_1) + F_2(z_2) = F_3(z_3) \quad ,$$

que es esencialmente del mismo tipo [Ap. V-22].

Los módulos m_1, m_2 se determinan de acuerdo a las funciones $F_1(z_1)$, $F_2(z_2)$ de modo que en la altura máxima del papel disponible estén representados los intervalos útiles de las escalas e_1, e_2 en la cuestión que se trate. Entonces, dada también A por la anchura del papel disponible, de [Ap. V-26] se deducen la posición y módulo de la tercera escala e_3 mediante:

[Ap. V-28] $$a = \frac{A m_1}{m_1 + m_2} \quad , \quad m_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad .$$

Dicha escala e_3 se construye a partir de un punto de cota conocida obtenido mediante una alineación particular. De ésta y de las proporciones [Ap. V-26] en la forma:

$$a/(A - a) = m_1/m_2 \quad , \quad m_3/m_2 = a/A \quad ,$$

pueden obtenerse gráficamente la posición, módulo y una cota particular de la escala e_3 (fig. 473).

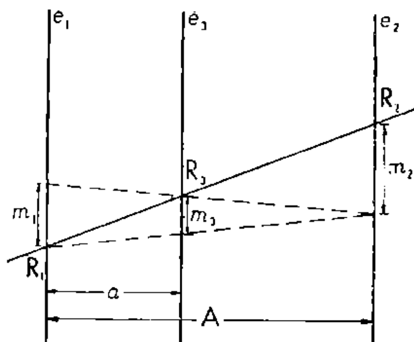


Fig. 473.

Ejemplo 9. Tomemos, como en el ejemplo 4, el alcance geográfico de un faro, dado en km, por $d = 3{,}85(\sqrt{H} + \sqrt{h})$, donde H es la altura, en metros, del foco de luz y h la altura, en metros, del observador, ambas sobre el nivel del mar. Por ser la fórmula anterior del tipo [Ap. V-27], podremos construir su correspondiente nomograma de tres soportes rectilíneos paralelos y supongamos que queremos que sea $A = 10$ cm, con escalas verticales de longitud que no superen los 16 cm, variando $5 \leqslant H \leqslant 100$, $0 \leqslant h \leqslant 20$.

Si colocamos H en la escala e_1, h en la e_2 y d en la e_3, siendo $y_1 = m_1\sqrt{H}$, $y_2 = m_2\sqrt{h}$, $y_3 = m_3 d/3{,}85$, los módulos m_1 y m_2 deberán ser tales que $m_1(\sqrt{100} - \sqrt{5}) \leqslant 16$ cm, $m_2(\sqrt{20} - 0) \leqslant 16$ cm, es decir, $m_1 \leqslant 2{,}06$ cm, $m_2 \leqslant 3{,}58$ cm, pudiendo tomar $m_1 = 2$ cm, $m_2 = 3{,}5$ cm. Las ordenadas, en cm, de ambas escalas serán:

$$y_1 = m_1F_1 = 2(\sqrt{H} - \sqrt{5}) \text{ cm}, \quad (5 \leqslant H \leqslant 100)\, ; \quad y_2 = m_2F_2 = 3{,}5 \sqrt{h}$$

cm, $(0 \leqslant h \leqslant 20)$, colocadas a distancia $A = 10$ cm. Mediante la construcción de la figura 473 esto bastaría para obtener gráficamente a y m_3 y construir la escala e_3 de $y_3 = m_3 d/3{,}85$ a partir de la alineación particular $H = 50$, $h = 18$, $d = 43{,}54$ deducida directamente de la fórmula dada. Numéricamente, mediante [Ap. V-28], se obtiene $a = 3{,}64$ cm; $m_3 = 1{,}27$ cm. Las escalas empiezan $y_i = 0$, en $H = 5$, $h = 0$, $d = 3{,}85(\sqrt{5} - 0) = 8{,}61$ (fig. 474). Si se toma $H = 16$, $h = 0$, se tendrá la cómoda alineación particular $d = 3{,}85 \, . \, 4 = 15{,}4$ para graduar la escala natural d.

c) *Relaciones funcionales reducibles al tipo anterior.* — c_1) Tipo $f_1f_2 = f_3$. — Se lleva al tipo [Ap. V-27] sin más que tomar logaritmos.

Ejemplo 10. Fórmula del interés compuesto $C = (1 + i)^n$, donde $0{,}02 \leqslant i \leqslant 0{,}06$, $1 \leqslant n \leqslant 100$. Es del tipo anterior, tomando logaritmos, y se lleva a la forma [Ap. V-27] tomando logaritmos dos veces:

$$\lg \lg C = \lg n + \lg \lg (1 + i) \quad .$$

Según la observación de R. Soreau, si la terna C, n, i cumple la fórmula $C = (1 + i)^n$, también la cumple la terna C^{10}, 10 n, i, por lo que para mayor comodidad, podemos superponer la escala n de 1 a 10, con la de n variando de 10 a 100. Si m_1 es el módulo de la escala n $(1 \leqslant n \leqslant 10)$ y m_2 es el módulo de la escala i, variando entre el 2 % y el 6 %, para que ésta tenga igual longitud que la escala n, debe ser:

$$m_1 = m_1(\lg 10 - \lg 1) = m_2(\lg \lg 1{,}06 - \lg \lg 1{,}02) = 0{,}47 \, m_2$$

Si se toma $m_3 = 2m_1$, por [Ap. V-28] debe ser $a = \frac{1}{3}$ A, $m_3 = \frac{2}{3} m_1$, con lo que podrá construirse la escala de C que va desde $1{,}02 = (1 + 0{,}02)^1$ a

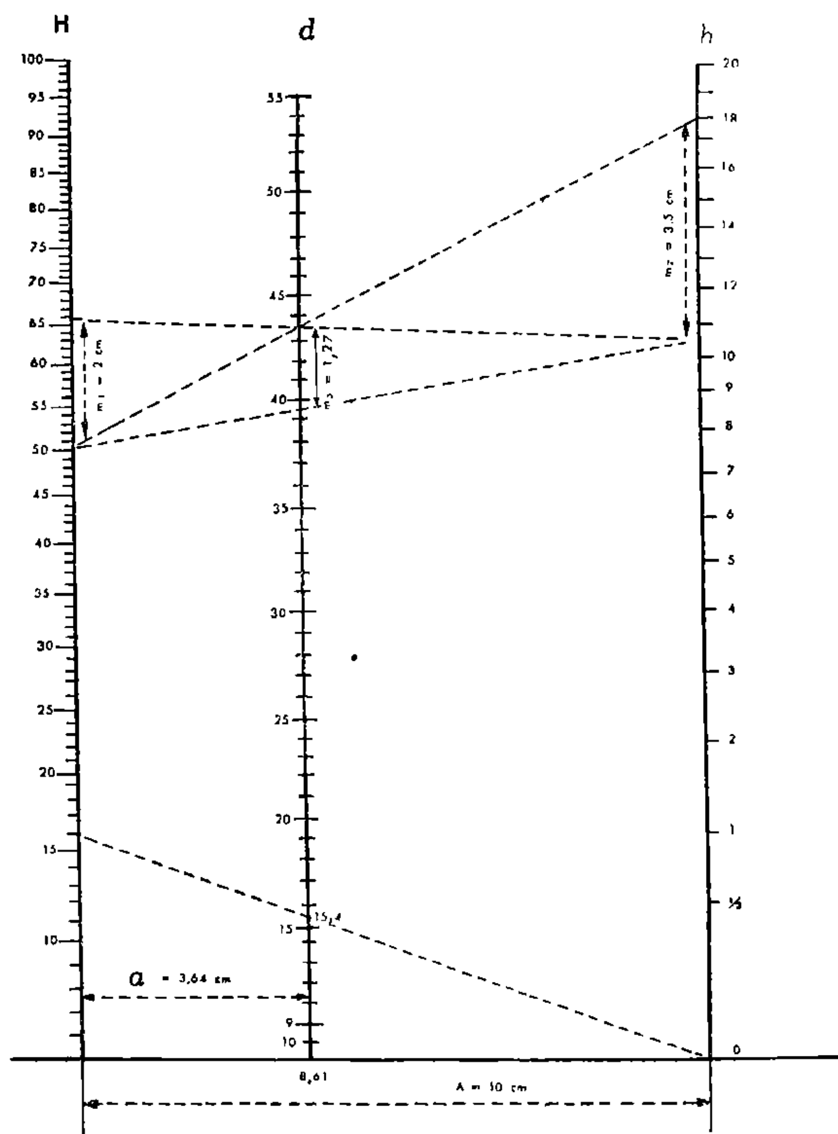

H
d
h
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
55
50
45
40
35
30
25
20
15
9
10
20
18
16
14
12
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
½
0
$m_1 = 2$ cm
$m_3 = 1,27$
$m_2 = 3,5$ cm
15,4
a = 3,64 cm
8,61
A = 10 cm

Fig. 474.

$1{,}06^{10} \cong 1{,}80$ y la superpuesta de C, que va de $1{,}02^{10} \cong 1{,}215$ a $1{,}06^{100} \cong 350$, correspondiente a $10 \leqslant n \leqslant 100$ (fig. 475).

c_2) *Tipo* $f_1f_2f_3 = C$ (*constante*). — Tomando, como antes, logaritmos de $f_1f_2 = C/f_3$ se obtiene $\log f_1 + \log f_2 = \log C - \log f_3$ que es de la forma [Ap. V-27].

c_3) *Tipo* $f_1f_3 + f_2f_3 = f_1f_2$. — Se lleva al tipo [Ap. V-27] sin más que dividir por $f_1f_2f_3$ dando $(1/f_1) + (1/f_2) = 1/f_3$.

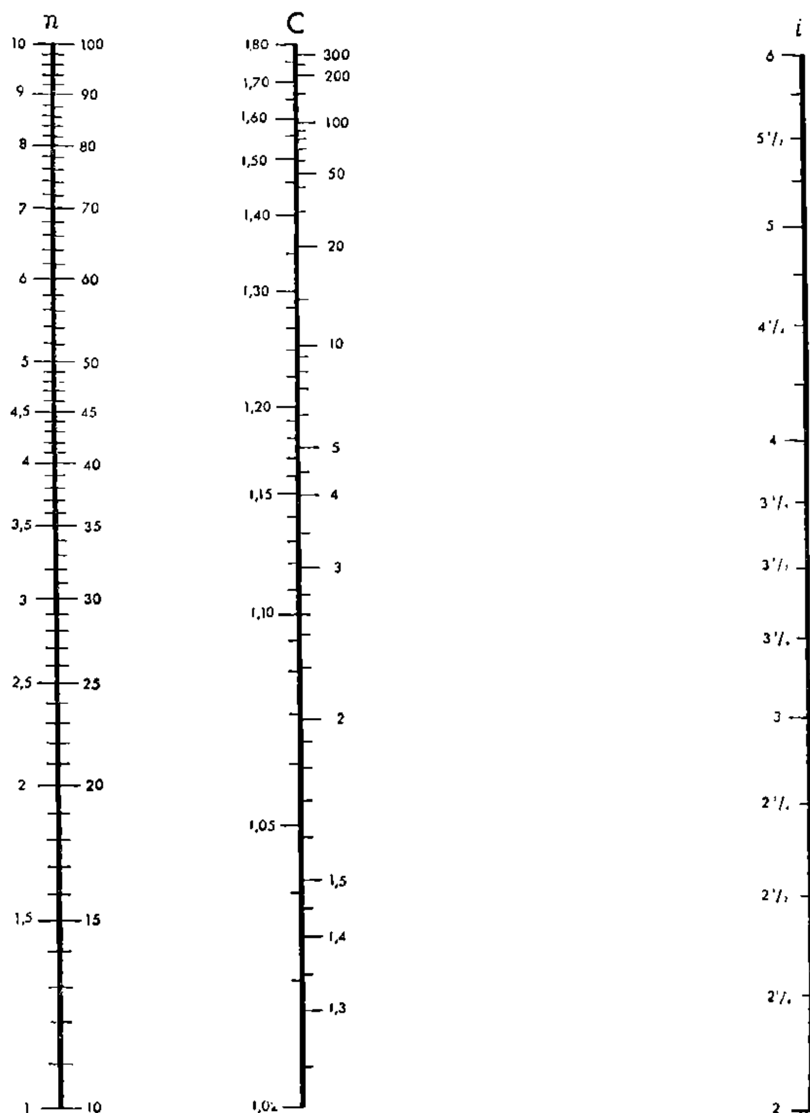


Fig. 475.

c_4) *Tipo* $f_1 + f_2 + f_3 = f_1f_2f_3$. — Despejando $f_3 = -\dfrac{f_1 + f_2}{1 - f_1f_2}$ y cambiando de variables: $f_1(z_1) = \operatorname{tg}\alpha$; $f_2(z_2) = \operatorname{tg}\beta$; $f_3(z_3) = -\operatorname{tg}\gamma$, queda $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, es decir, $\alpha(z_1) + \beta(z_2) = \gamma(z_3) + n\pi$, que es de la forma [Ap. V-27].

c_5) *Tipo* $f_1 + f_2 + f_3 = C\, f_1f_2f_3$ *con* C *constante.* — Si $C > 0$, se reduce al tipo c_4 multiplicando por $\sqrt{C}$, pues entonces queda:

$$(\sqrt{C}\, f_1) + (\sqrt{C}\, f_2) + (\sqrt{C}\, f_3) = (\sqrt{C}\, f_1)(\sqrt{C}\, f_2)(\sqrt{C}\, f_3) \quad .$$

Si $C < 0$, se pone $\sqrt{-C}\, f_1 + \sqrt{-C}\, f_2 + \sqrt{-C}\, f_3 =$

$$= -(\sqrt{-C}\, f_1)(\sqrt{-C}\, f_2)(\sqrt{-C}\, f_3) \quad ,$$

de donde, despejando:

$$-\sqrt{-C}\, f_3 = \frac{\sqrt{-C}\, f_1 + \sqrt{-C}\, f_2}{1 + (\sqrt{-C}\, f_1)(\sqrt{-C}\, f_2)}$$

y haciendo $\sqrt{-C}\, f_1(z_1) = \operatorname{tgh}\alpha$; $\sqrt{-C}\, f_2(z_2) = \operatorname{tgh}\beta$; $\sqrt{-C}\, f_3(z_3) = -\operatorname{tgh}\gamma$, queda $\operatorname{tgh}\gamma = \operatorname{tgh}(\alpha + \beta)$, es decir, $\alpha(z_1) + \beta(z_2) = \gamma(z_3)$, que es de la forma [Ap. V-27].

c_6) *Tipo* $f_1f_2 + f_2f_3 + f_3f_1 = C$ *constante.* — Se reduce al tipo anterior, dividiendo ambos miembros por $f_1f_2f_3$.

Todas estas transformaciones pueden servir también para construir ábacos cartesianos rectilíneos por anamórfosis analítica (cfr. Ap. V-1, *c*).

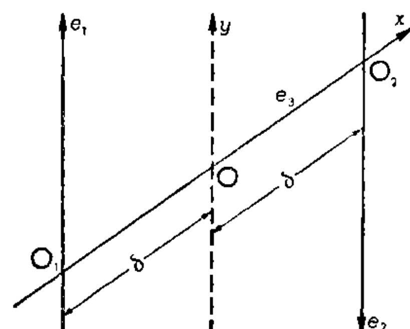


Fig. 476.

d) *Nomogramas en* N *o en* Z. — Si el nomograma tiene tres escalas rectilíneas, dos de ellas de soportes paralelos entre sí, y otra sobre soporte secante a los dos anteriores, se obtendrá un nomograma llamado en N o en Z.

Adoptemos como eje x la escala transversal e_3 y como eje y la mediatriz de la faja de ancho 2δ, en la dirección de x, limitada por las escalas paralelas e_1 y e_2 (fig. 476). Como en coordenadas cartesianas oblicuas subsiste la relación [Ap. V-24], y en [Ap. V-23] es ahora $x_1 = -\delta$, $x_2 = \delta$; $y_3 = 0$, dicha relación [Ap. V-24] toma la forma:

$$\begin{vmatrix} -\delta & f_1(z_1) & 1 \\ \delta & f_2(z_2) & 1 \\ g_3(z_3) & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

es decir,

[Ap. V-29] $$f_2(z_2) = \frac{g_3(z_3) - \delta}{g_3(z_3) + \delta}\, f_1(z_1) \quad ,$$

que puede reducirse a la forma canónica:

[Ap. V-30] $$F_2(z_2) = F_1(z_1)F_3(z_3) \quad ,$$

si en [Ap. V-29] se toma:

[Ap. V-31] $$f_1 = m_1F_1 \quad , \quad f_2 = m_2F_2 \quad , \quad g_3 = \delta\,\frac{m_1 + m_2F_3}{m_1 - m_2F_3} \quad .$$

Así pues, [Ap. V-30] es la forma general de los nomogramas de esta clase, esencialmente la misma que la vista en Ap. V-2, c_1, que era también representable por un nomograma de tres soportes paralelos. Sin embargo, allí había que tomar logaritmos y ahora será más cómodo tomar para escalas e_1 y e_2 las mismas funciones $F_1(z_1)$ y $F_2(z_2)$ multiplicadas por módulos convenientes, siendo proyectiva (Ap. V-1, a) la tercera escala e_3. Esto es especialmente ventajoso si F_1 y F_2 toman valores pequeños, pues entonces es posible, con módulo conveniente, la representación mediante [Ap. V-31], mientras que con escalas logarítmicas se sale rápidamente de los límites del papel disponible. Por otra parte, cuando se adosan dos nomogramas por coincidencia de escalas que se refieren a la misma variable, la escala de ésta habrá de ser la misma en ambos y es más sencillo adoptar entonces, como común, la escala natural (cfr. Ap. V-3, a_2). Estas son las ventajas que justifican el uso de este tipo de nomogramas para representar relaciones de la forma [Ap. V-30].

De acuerdo con las funciones F_1 y F_2 y las dimensiones del dibujo, se determinan los módulos m_1 y m_2, tales que $m_1F_1 > 0$, $m_2F_2 < 0$, dibujando así las escalas paralelas e_1 y e_2 a partir de los respectivos orígenes O_1 y O_2 (fig. 476), intersecciones con la transversal e_3 y en sentidos opuestos, mientras que la graduación de la escala e_3 queda determinada por la tercera de las [Ap. V-31] a partir del origen O, punto medio del segmento O_1O_2 de longitud 2δ. Dicha escala e_3, siendo proyectiva respecto de F_3, puede dibujarse gráficamente por el procedimiento de la figura 460. En este caso, basta tener en cuenta que los tres puntos $(-\delta, k)$, $(\delta, km_2F_3/m_1)$ y $(x_3, 0)$, con $x_3 = \delta(m_1 + m_2F_3)/(m_1 - m_2F_3)$, están alineados, y por tanto, basta proyectar sobre e_3, desde el punto de la escala e_1 que esté a una distancia k arbitraria y conveniente de O_1, la escala funcional de F_3 que a partir de O_2 se haya dibujado sobre e_2 con módulo km_2/m_1.

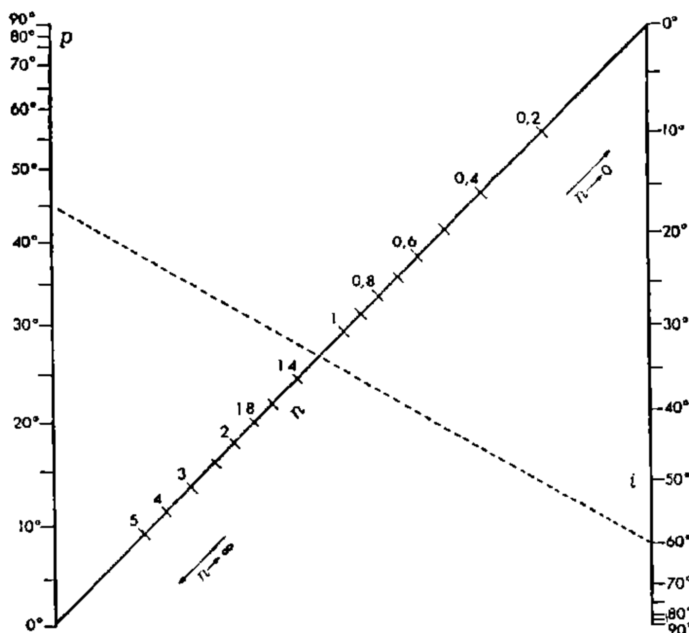


Fig. 477.

EJEMPLO 11. Ley de refracción $\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r$. Tomando logaritmos, sería de la forma [Ap. V-27], representable por un nomograma de tres escalas paralelas, pero aquí $\operatorname{sen} i$ y $\operatorname{sen} r$ suelen tomar valores muy pequeños, correspondientes al entorno de la incidencia normal, y, por tanto, se impone el nomograma en N. Para identificar con [Ap. V-30], tomemos i como escala e_2 y r como escala e_1, variando entre 0° y 90° (fig. 477), con módulos iguales en valor absoluto y de signo contrario, adecuados a los límites del dibujo. Las escalas se dibujan mediante una tabla de valores naturales del seno, o gráficamente, proyectando la línea trigonométrica seno (§ 28, fig. 73). La tercera escala resulta aquí ser $x_3 = \delta(1 - n)/(1 + n)$, es decir, al origen O corresponde el punto $n = 1$, aumentando x_3 al disminuir n; puede dibujarse gráficamente en forma proyectiva, como se ha explicado anteriormente.

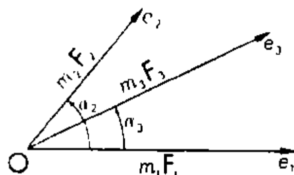


Fig. 478.

c) Nomogramas de tres rectas concurrentes. — Las relaciones funcionales que se reducen (Ap. V-2, *c*) al tipo $(1/F_1) + (1/F_2) = 1/F_3$, pueden representarse por nomogramas de tres soportes paralelos, pero al poner $y_1 = m_1/F_1$, $y_2 = m_2/F_2$, para pequeños valores de F_1 y F_2, las escalas quedarían fuera de los límites del dibujo. Esto puede evitarse empleando tres soportes rectilíneos concurrentes, que a partir del origen O formen con el eje de las abscisas ángulos $\alpha_1 = 0$, α_2, α_3 (fig. 478). Entonces, las ecuaciones [Ap. V-23] serán:

$$e_1 \begin{cases} x_1 = m_1F_1(z_1), \\ y_1 = 0, \end{cases} \quad e_2 \begin{cases} x_2 = m_2F_2(z_2)\cos\alpha_2, \\ y_2 = m_2F_2(z_2)\operatorname{sen}\alpha_2, \end{cases} \quad e_3 \begin{cases} x_3 = m_3F_3(z_3)\cos\alpha_3, \\ y_3 = m_3F_3(z_3)\operatorname{sen}\alpha_3, \end{cases}$$

y la condición de alineación [Ap. V-24] se convierte en:

$$-m_1m_2 \operatorname{sen}\alpha_2 \,.\, F_1F_2 + m_2m_3 \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_3) \,.\, F_2F_3 + m_1m_3 \operatorname{sen}\alpha_3 \,.\, F_1F_3 = 0,$$

que para $m_1 = m_2 = m_3$, $\alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_3 = 60°$, coincide con la $(1/F_1) + (1/F_2) = 1/F_3$. Estos son los llamados *nomogramas exagonales*, que se distinguen de los ábacos exagonales (Ap. V-1, *e*), antes introducidos, por obtenerse la correspondencia entre cotas, ya por alineación, ya por concurrencia de normales a las escalas.

EJEMPLO 12. La fórmula de la resistencia R de un sistema de dos conductores de resistencias R_1 y R_2 colocados en paralelo es $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$.

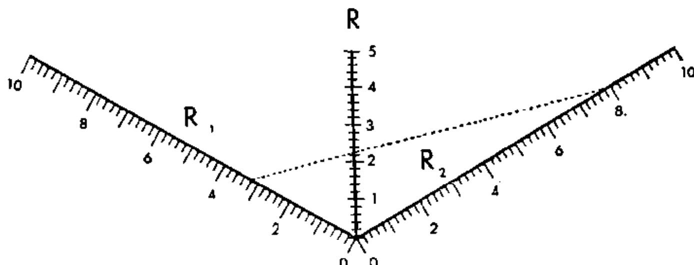


Fig. 479.

Nomograma de esta relación, con módulos iguales y escalas naturales sobre soportes rectilíneos concurrentes que formen con un rayo origen ángulos $\alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 120°$, $\alpha_3 = 60°$ es el de la figura 479.

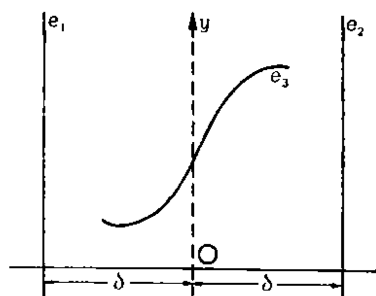


Fig. 480.

f) Nomogramas de dos escalas de soportes paralelos rectilíneos y una de soporte curvilíneo. — Existen relaciones [Ap. V-5] que no pueden representarse mediante nomogramas de tres soportes rectilíneos, tal por ejemplo, la ecuación trinomia [Ap. V-10]. Veamos cuáles son las relaciones representables por nomogramas con dos soportes rectilíneos paralelos e_1 y e_2 (fig. 480), a distancia 2δ, adoptando como eje y la paralela media entre e_1 y e_2. Las ecuaciones paramétricas [Ap. V-23] serán:

$$e_1 \begin{cases} x_1 = -\delta, \\ y_1 = m_1 F_1, \end{cases} \quad e_2 \begin{cases} x_2 = \delta, \\ y_2 = m_2 F_2, \end{cases} \quad e_3 \begin{cases} x_3 = g_3(z_3), \\ y_3 = f_3(z_3) \end{cases}$$

y la [Ap. V-24] se convierte en:

$$m_1 F_1 (g_3 - \delta) + m_2 F_2 (-g_3 - \delta) = -2\delta f_3 \quad ,$$

de la forma general:

[Ap. V-32] $$F_1(z_1)\,G_3(z_3) + F_2(z_2)\,H_3(z_3) = F_3(z_3) \quad ,$$

pues basta hallar $K_3(z_3)$ tal que:

$$\frac{m_1(g_3 - \delta)}{G_3(z_3)} = \frac{m_2(-g_3 - \delta)}{H_3(z_3)} = \frac{-2\delta f_3}{F_3(z_3)} = K_3(z_3) \quad ,$$

de las que despejando:

$$g_3 = \frac{K_3 G_3}{m_1} + \delta = -\frac{K_3 H_3}{m_2} - \delta$$

se deduce es:

$$K_3(z_3) = \frac{-2\delta m_1 m_2}{m_1 H_3 + m_2 G_3} \quad ,$$

por lo que toda expresión del tipo [Ap. V-32] tendrá un nomograma de puntos alineados con escalas de ecuaciones paramétricas:

$$e_1 \begin{cases} x_1 = -\delta, \\ y_1 = m_1 F_1, \end{cases} \quad e_2 \begin{cases} x_2 = \delta, \\ y_2 = m_2 F_2, \end{cases} \quad e_3 \begin{cases} x_3 = \delta \dfrac{m_1 H_3 - m_2 G_3}{m_1 H_3 + m_2 G_3} , \\ y_3 = \dfrac{m_1 m_2 F_3}{m_1 H_3 + m_2 G_3} \end{cases}$$

Método geométrico para construir, por puntos, la escala curvilínea e_3 es dar a z_3 el valor de cada punto buscado, tal $z_3 = 15$, y determinar en la relación [Ap. V-32] dos pares de valores (z_1, z_2) que la verifiquen, para que las respectivas rectas de alineación se corten en dicho punto buscado de cota $z_3 = 15$.

Dividiendo [Ap. V-32] por G_3, la forma general de las relaciones susceptibles de representarse por estos nomogramas puede también expresarse así:

[Ap. V-33] $$F_1(z_1) + F_2(z_2)\,J_3(z_3) = F_3(z_3) \quad ,$$

respecto de la cual, las escalas serán:

$$e_1 \begin{cases} x_1 = -\delta, \\ y_1 = m_1 F_1, \end{cases} \quad e_2 \begin{cases} x_2 = \delta, \\ y_2 = m_2 F_2, \end{cases} \quad e_3 \begin{cases} x_3 = \delta \dfrac{m_1 J_3 - m_2}{m_1 J_3 + m_2} , \\ y_3 = \dfrac{m_1 m_2 F_3}{m_1 J_3 + m_2} . \end{cases}$$

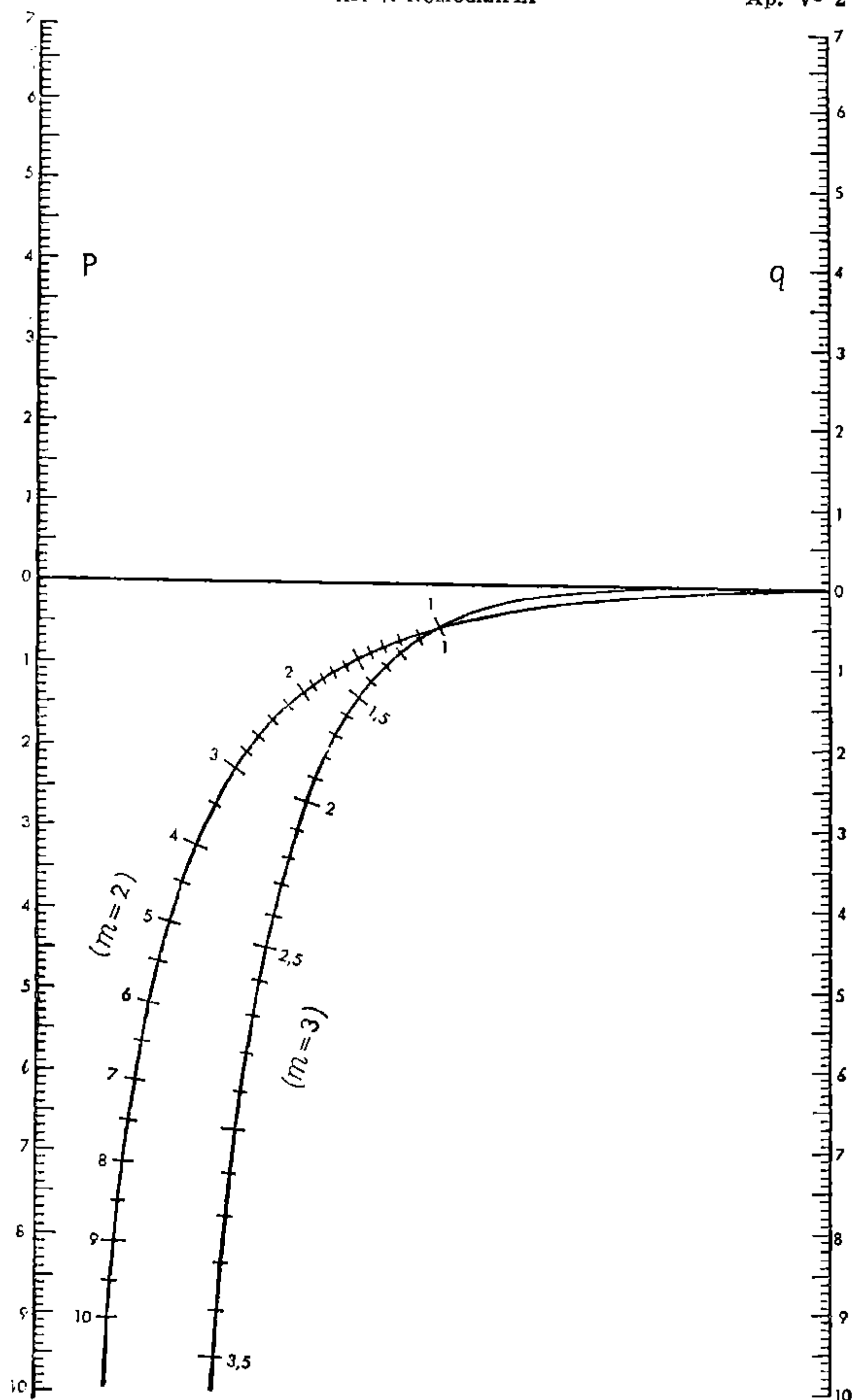


Fig. 481.

EJEMPLO 13. La ecuación trinomia

[Ap. V-10] $$z^n + p z^r + q = 0$$

del ejemplo 5 es de la forma [Ap. V-32] para $F_1 = p$, $F_2 = q$, $F_3 = - z^n$, $G_3 = z^r$, $H_3 = 1$, con escalas dadas por

$$e_1 \begin{cases} x_1 = -\delta, \\ y_1 = m_1 p, \end{cases} \quad e_2 \begin{cases} x_2 = \delta, \\ y_2 = m_2 q, \end{cases} \quad e_3 \begin{cases} x_3 = \delta \dfrac{m_1 - m_2 z^r}{m_1 + m_2 z^r}, \\ y_3 = -\dfrac{m_1 m_2 z^n}{m_1 + m_2 z^r}. \end{cases}$$

Si escogemos $m_1 = m_2 = 1$, para la ecuación cúbica $(r = 1,\ n = 3)$, las escalas serán:

$$e_1 \begin{cases} x_1 = -\delta, \\ y_1 = p, \end{cases} \quad e_2 \begin{cases} x_2 = \delta, \\ y_2 = q, \end{cases} \quad e_3 \begin{cases} x_3 = \delta \dfrac{1 - z}{1 + z}, \\ y_3 = -\dfrac{z^3}{1 + z}. \end{cases}$$

Caso particular de [Ap. V-10] es la ecuación trinomia $z^m + pz + q = 0$, de la cual en la figura 481 se ha representado el nomograma para los casos $m = 2$ y $m = 3$, es decir, para las ecuaciones de 2º y 3er grado. Comparando estos nomogramas con los de rectas concurrentes para las mismas ecuaciones (figs. 463 y 464), vemos que los de puntos alineados son más claros y cómodos, con interpolación visual fácil, pudiendo superponer en la misma hoja los casos $m = 2$, $m = 3$ y hasta un haz de ellos, sin que las escalas se molesten entre sí, lo que era imposible en los ábacos cartesianos.

EJEMPLO 14. La ecuación de VAN DER WAALS [Ap. V-8] tratada en los ejemplos 2 y 3 en el caso del anhídrido carbónico $R = 0{,}00366$, $a = 0{,}00717$, $b = 0{,}00191$ con temperatura $t = T - 273$ en grados centígrados, presión p en atmósferas y volumen v referido al de la molécula gramo a 0° y a una atmósfera de presión, será de la forma [Ap. V-33] con

$$F_1(p) = p,\ F_2(t) = t,\ J_3(v) = -\frac{R}{v - b},\quad F_3(v) = \frac{273\,R}{v - b} - \frac{a}{v^2}.$$

Si queremos construir el nomograma de puntos alineados correspondiente para los intervalos $0 \leqslant p \leqslant 50$, $-100° \leqslant t \leqslant 100°$, $0 \leqslant v \leqslant 0{,}1$, tomaremos p sobre la escala métrica rectilínea e_1 (fig. 482) de módulo m_1 adecuado al tamaño del papel, dividida entre 0 y 50, de abajo para arriba, y t sobre la escala métrica rectilínea e_2 de módulo m_2, adecuado para que vaya de -100 a 100, pero de arriba a abajo $(m_2 < 0)$, para que e_3 caiga entre e_1 y e_2. Esta escala e_3 se construye, ya por sus ecuaciones paramétricas:

$$x_3(v) = \delta \frac{m_1 R + m_2 (v - b)}{m_1 R - m_2 (v - b)};$$

$$y_3(v) = \frac{-273\, m_1 m_2 R + m_1 m_2 a (v - b)/v^2}{m_1 R - m_2 (v - b)},$$

ya por el método geométrico antes explicado, determinando cada punto de parámetro v por el cruce de dos alineaciones que verifiquen [Ap. V-9]. En la fig. 482 se ha determinado para $v = 0{,}03$, que convierte [Ap. V-9] en $p = 27{,}61 + 0{,}1303\, t$, el cruce de las alineaciones $t = -100$, $p = 14{,}58$ y $t = +100$, $p = 40{,}64$.

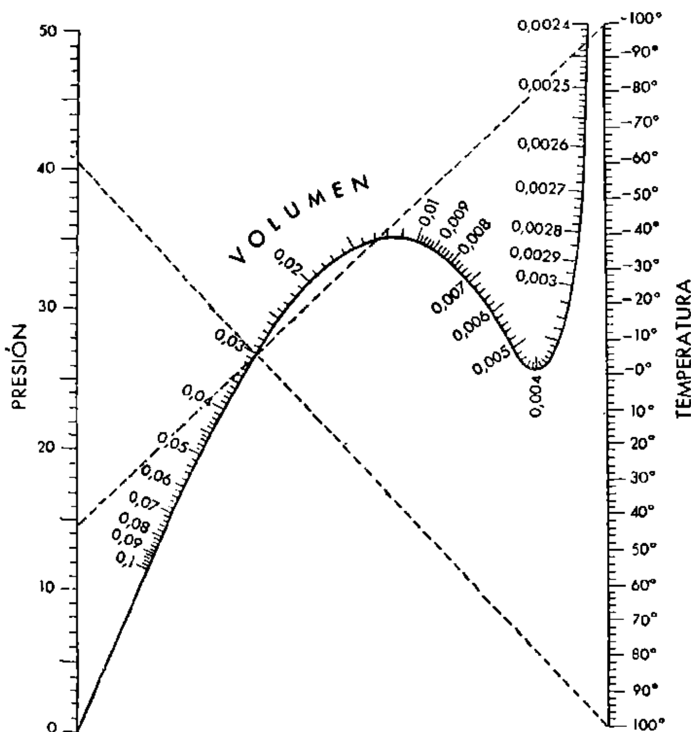


Fig. 482.

3. **Ábacos y nomogramas para relaciones con más de tres variables.** — *a) Relaciones entre cuatro variables.* — El tipo de relación que se presenta más en las aplicaciones técnicas es:

[Ap. V-34] $$f_{12}(z_1, z_2) = g_{34}(z_3, z_4) \quad ,$$

y el método de reducirlo al caso de tres variables, es el de introducir una variable auxiliar t, poniendo:

[Ap. V-35] $$f_{12}(z_1, z_2) = t \quad , \quad g_{34}(z_3, z_4) = t \quad ,$$

cada una de cuyas relaciones sabemos representar. Obsérvese que es cómoda la notación empleada ya anteriormente, e introducida por M. D'OCAGNE, de afectar a la característica de la función con los índices correspondientes a las variables de que depende.

a_1) Ábacos cartesianos para funciones f_{12} *y* g_{34} *cualesquiera.* — Bastará adosar los dos ábacos cartesianos correspondientes a cada una de las relaciones [Ap. V-35], adoptando para t, en ambos ábacos, un soporte común Ot (fig. 483). En el primer ábaco, las líneas de nivel corresponderán a $z_2 =$ constante, llevando la variable z_1 sobre la escala del eje vertical hacia arriba, y la variable t sobre el eje horizontal que no necesitamos acotar; en el segundo ábaco, las líneas de nivel corresponderán a $z_4 =$ constante, llevando la variable z_3 sobre la escala del eje vertical hacia abajo. Si queremos hallar el valor z_4 que corresponde en [Ap. V-34] a $z_1 = z_1'$, $z_2 = z_2'''$, $z_3 = z_3'$, utilizando primero el ábaco superior, buscaremos el punto de cota z_1' en el eje vertical superior, mediante una horizontal

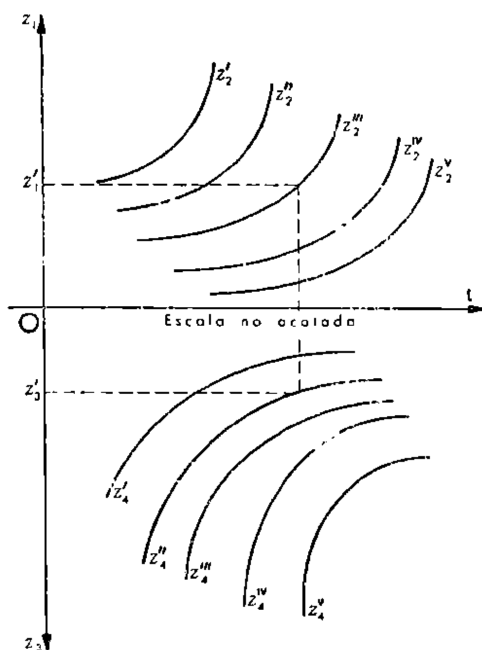


Fig. 483.

hallaremos el punto que le corresponde en la línea de nivel $z_2 = z_2'''$ y la intersección en el ábaco inferior de la vertical por este último punto, con la horizontal trazada por el punto de cota z_3' del eje vertical inferior, dará un punto cuya curva de nivel correspondiente $z_4 = z_4''$ es el valor buscado de z_4 (fig. 483).

a_2) *Nomogramas de puntos alineados, a los que sean reducibles las funciones* f_{12} *y* g_{34}. — Dibujados los dos nomogramos de ambas relaciones

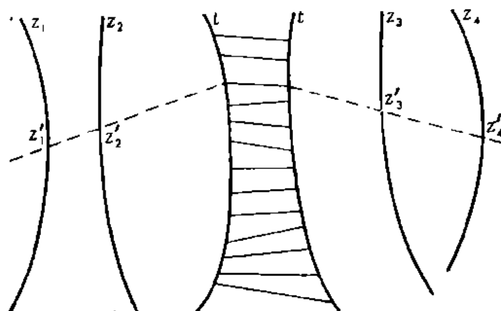


Fig. 484.

[Ap. V-35], uno al lado del otro (fig. 484), no es necesario acotar en ellos las escalas de los soportes en t, sino tan sólo hacer corresponder por

segmentos de rectas, los puntos de igual cota en ambas escalas t. Entonces, para encontrar el valor $z_4 = z_4'$, que corresponde en [Ap. V-34] a $z_1 = z_1'$, $z_2 = z_2'$ $z_3 = z_3'$, en el primer nomograma, la alineación $z_1'z_2'$ da el punto de la primera escala t, que llevado a la segunda escala t (sin necesidad de conocer su cota), determina con z_3' la alineación que sobre la escala de z_4 da el valor buscado z_4' (fig. 484).

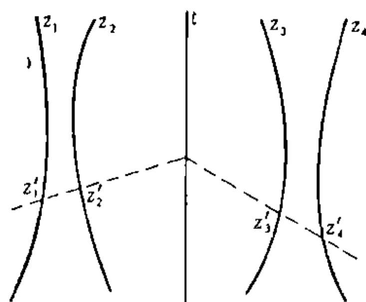


Fig. 485.

Para ciertas formas de funciones f_{12} y g_{34} (cfr. Ap. V-2) puede ser posible adoptar para t en ambos nomogramas una misma escala rectilínea, que entonces superpondremos, haciéndola coincidir (fig. 485). Este tipo se llama *nomograma de doble alineación.*

EJEMPLO 15. La velocidad v del agua, en metros por segundo, discurriendo por un canal descubierto de radio r, en metros, y pendiente p, viene dada por la fórmula de BAZIN:

$$v = \frac{87\sqrt{rp}}{1 + \gamma/\sqrt{r}} \quad ,$$

donde γ es un coeficiente que depende de la naturaleza de la pared.

Si la fórmula anterior se pone en la forma:

$$\frac{\gamma}{r} + \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{87\sqrt{p}}{v} \quad ,$$

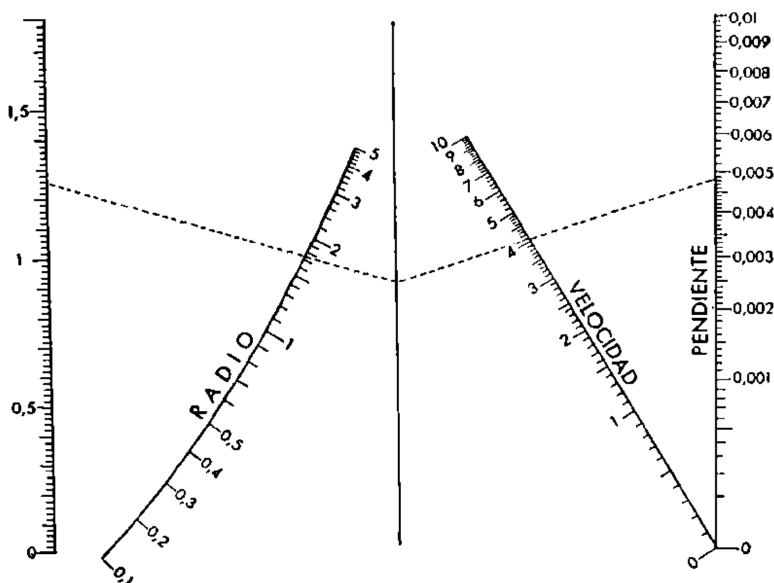


Fig. 486.

igualando ambos miembros a la variable auxiliar t, queda:

$$\frac{\gamma}{r} + \frac{1}{\sqrt{r}} = t \quad , \quad \frac{87\sqrt{p}}{v} = t \quad .$$

La primera ecuación, para $F_1(\gamma) = \gamma$, $F_2(t) = t$, $G_3(r) = 1/r$, $H_3(r) = -1$, $F_3(r) = -1/\sqrt{r}$, es de la forma [Ap. V-32] y por tanto (Ap. V-2, *f*) representable por dos escalas rectilíneas paralelas y naturales de las variables γ y t y una escala curvilínea para la variable r. La segunda ecuación, para $F_1(t) = t$, $F_2(p) = 87\sqrt{p}$, $F_3(v) = v$, es de la forma [Ap. V-30] y por tanto (Ap. V-2, *d*) representable por un nomograma en N, en el que también t puede venir dado en escala natural y que, por tanto, podremos hacer coincidir con la escala t del primer nomograma. Si los límites del nomograma compuesto han de ser $0 \leqslant r \leqslant 5$, $0 \leqslant p \leqslant 0{,}01$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1{,}8$, $0 \leqslant v \leqslant 10$, obtendremos el nomograma de la fig. 486, donde para $\gamma = 1{,}26$, $r = 1{,}75$, $p = 0{,}0048$, se ha obtenido $v = 4{,}08$.

a_3) *Nomogramas correspondientes a las relaciones del tipo* $f_1(z_1) + f_2(z_2) = f_3(z_3) + f_4(z_4)$. — Mediante la variable auxiliar t, se pondrá: $f_1 + f_2 = t$, $f_3 + f_4 = t$, siendo ambas ecuaciones representables por nomogramas de puntos alineados de tres soportes rectilíneos paralelos (Ap. V-2, *b*). Además las dos escalas de t serán superponibles coincidentes, pues se pueden adoptar, para ambas, escalas naturales del mismo origen y módulo. Entonces, se pueden dar, con separación arbitraria y adecuada, los soportes de las escalas e_1 y e_4 de módulos arbitrarios y convenientes al problema estudiado, quedando entonces (Ap. V-2, *b*) determinados por e_1 y t la posición y módulo de la escala e_2, y por t y e_4, la posición y módulo de la escala e_3. Así se obtiene el llamado *nomograma de doble alineación concurrente* (fig. 487).

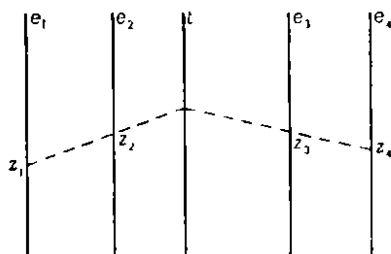


Fig. 487.

Otro método de representación se obtiene cuando la relación dada se lleva a la forma:

$$\frac{m_2 f_2(z_2) - m_1 f_1(z_1)}{a} = \frac{m_4 f_4(z_4) - m_3 f_3(z_3)}{b} ,$$

pues, entonces, esta ecuación expresará la condición de perpendicularidad:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_4 - x_3}{y_4 - y_3}$$

de las alineaciones que unan los puntos R_1R_2 y R_3R_4 (fig. 488) de coordenadas $R_i(x_i, y_i)$, si dichos puntos se toman sobre las rectas:

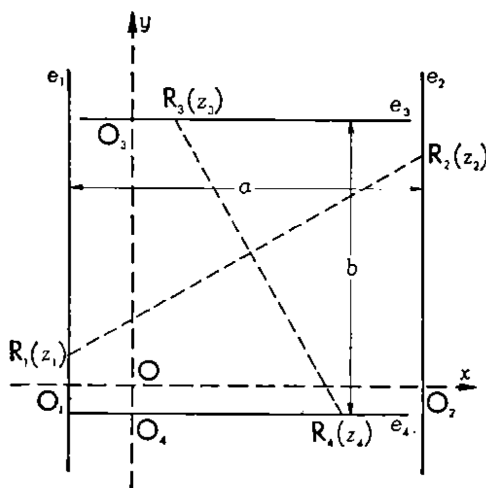


Fig. 488.

$$e_1\begin{cases}x_1 = a_1,\\ y_1 = m_1\mathrm{f}_1(z_1),\end{cases}\qquad e_2\begin{cases}x_2 = a_2,\\ y_2 = m_2\mathrm{f}_2(z_2),\end{cases}$$

$$e_3\begin{cases}x_3 = m_3\mathrm{f}_3(z_3),\\ y_3 = b_3,\end{cases}\qquad e_4\begin{cases}x_4 = m_4\mathrm{f}_4(z_4),\\ y_4 = b_4,\end{cases}$$

con $a = a_2 - a_1$ y $b = b_3 - b_4$.

Por tanto, si sobre dos ejes verticales e_1 y e_2 (fig. 486) a distancia a y dos ejes horizontales e_3 y e_4 a distancia b, llevamos a partir de los respectivos orígenes O_i, tales que O_1O_2 sea perpendicular a O_3O_4, las respectivas escalas funcionales $m_i\mathrm{f}_i\,(z_i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ obtendremos un *nomograma de pares de escalas paralelas y alineaciones perpendiculares,* donde a los valores z_1, z_2, z_3, z_4 que verifican la relación dada, corresponden puntos R_i tales que la alineación R_1R_2 es perpendicular a la R_3R_4. La lectura de este nomograma se facilita por el empleo de un papel transparente, donde se han dibujado dos rectas perpendiculares, muy finas y bien visibles.

a_4) *Nomogramas correspondientes a las relaciones del tipo* $\mathrm{f}_1(z_1)\,.\,\mathrm{f}_2(z_2) = \mathrm{f}_3(z_3)\,.\,\mathrm{f}_4(z_4)$. — Esta ecuación puede reducirse al tipo ya estudiado (a_3), tomando logaritmos, pero, si figuran valores funcionales pequeños se presentarán inconvenientes (cfr. Ap. V-2, *d*). Si mediante la variable auxiliar t se pone $\mathrm{f}_1(z_1)/\mathrm{f}_4(z_4) = t$, $\mathrm{f}_3(z_3)/\mathrm{f}_2(z_2) = t$, de las que, por eliminación de t, se obtiene $\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2 = \mathrm{f}_3\mathrm{f}_4$, entonces, cada una de las relaciones anteriores es representable por un nomograma en N (Ap. V-2, *d*). Veamos las condiciones que se han de cumplir para que las dos N sean superponibles (fig. 489) de modo que en el eje vertical izquierdo figuren las escalas superpuestas e_1 y e_3 (en general no coincidentes), y en el eje vertical derecho figuren las escalas superpuestas e_2 y e_4 (en general no coincidentes) y el eje transversal corresponda a la escala t que no hay necesidad de acotar y que determina en las demás escalas los respectivos orígenes. Si hemos de buscar el valor z_4 que corresponda a los z_1, z_2, z_3 dados por los puntos R_1, R_2, R_3 (fig. 489), la alineación R_2R_3 debe determinar el punto T en la recta t, que unido a R_1 dará el punto R_4 que corresponda al valor z_4 buscado. Entonces, por semejanza de triángulos será $O_1R_1/O_1R_3 = O_2R_4/O_2R_2$ equivalente a la condición $(m_1\mathrm{f}_1)/(m_3\mathrm{f}_3) = (m_4\mathrm{f}_4)/(m_2\mathrm{f}_2)$, si m_i son los módulos con que se han construído las respectivas escalas e_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Esta condición es equivalente a la relación dada $\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2 = \mathrm{f}_3\mathrm{f}_4$ cuando y sólo cuando los módulos respectivos cumplan también: $m_1m_2 = m_3m_4$. Así, pueden tomarse arbitrarios tres módulos m_1, m_2, m_3 y determinar el cuarto módulo m_4 por dicha condición.

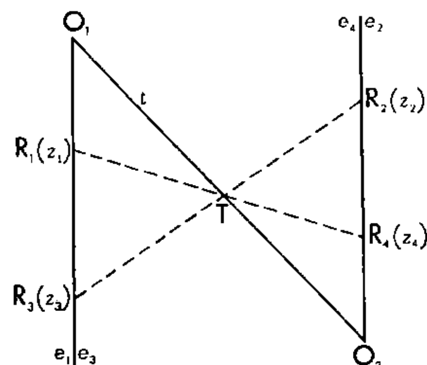


Fig. 489.

Un segundo método para representar la relación $\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2 = \mathrm{f}_3\mathrm{f}_4$ es el de utilizar un nomograma de alineaciones perpendiculares. Sea el par de ejes horizontal y vertical Ox, Oy (fig. 490), dando sobre el semieje positivo Ox, a partir de O, la escala e_1, sobre el semieje negativo Ox, a partir de O y en sentido opuesto al anterior (ahora de derecha a izquierda) la escala e_2 y superpuestas de abajo a arriba sobre el eje positivo Oy, a partir de O, las escalas e_3 y e_4 (en general no coincidentes). Si se consideran los puntos R_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, ligados por las alineaciones R_1R_3 perpendicular a R_2R_4, se tendrá que los triángulos OR_1R_3 y OR_4R_2 son semejantes, cum-

pliéndose $OR_1/OR_3 = OR_4/OR_2$ equivalente a la condición $(m_1 f_1)/(m_3 f_3) = (m_4 f_4)/(m_2 f_2)$, es decir, a la relación $f_1(z_1) f_2(z_2) = f_3(z_3) f_4(z_4)$, si los respectivos módulos m_i ($i = 1, 2, 3, 4$) cumplen la condición $m_1 m_2 = m_3 m_4$. Aquí también pueden tomarse tres módulos arbitrarios y determinar el cuarto por esta última condición.

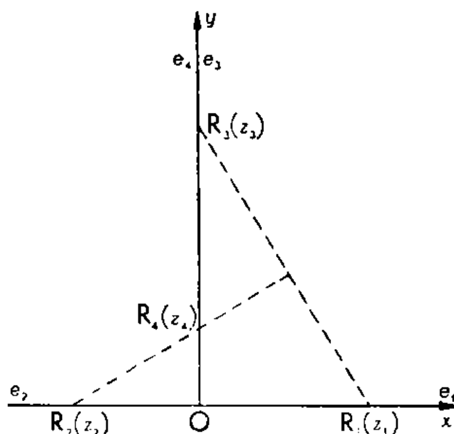


Fig. 490.

EJEMPLO 16. La fórmula del seno para resolución de triángulos $a/b = \operatorname{sen} \alpha / \operatorname{sen} \beta$, puede representarse por el nomograma de la figura 491 donde se ha tomado $f_1(\beta) = \operatorname{sen} \beta$, $f_2(a) = a$, $f_3(\alpha) = \operatorname{sen} \alpha$, $f_4(b) = b$, con escalas naturales para los lados a y b ($m_2 = m_4$) y escalas sinusoidales de igual módulo ($m_3 = m_1$) para α y β.

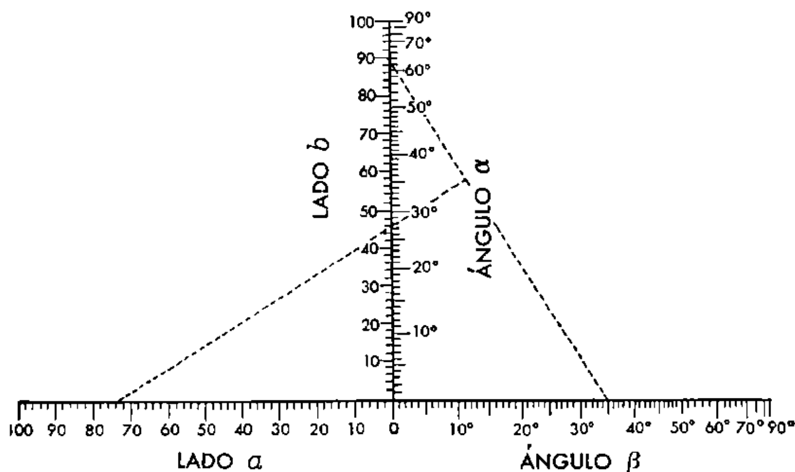


Fig. 491.

b) *Relaciones entre n variables.* — Las relaciones entre n variables ($n > 3$) se representan mediante $n - 2$ nomogramas de relaciones de tres variables que se obtienen añadiendo a las dadas, otras $n - 3$ variables auxiliares que vinculan dichos nomogramas de dos en dos.

Concretándonos al caso más sencillo y usual, para la relación:

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) + \ldots + f_{n-1}(z_{n-1}) = f_n(z_n),$$

tomaremos $f_1 + f_2 = t_1$, $t_1 + f_3 = t_2$, $\ldots$, $t_{n-3} + f_{n-1} = f_n$ con $t_1, t_2, \ldots, t_{n-3}$ nuevas variables auxiliares. Si cada una de las $n - 2$ relaciones anteriores

se representa por un nomograma de puntos alineados de tres soportes rectilíneos paralelos (Ap. V-2, *b*), de modo que vayan coincidiendo según escalas naturales las correspondientes a una misma variable auxiliar t_i $(i = 1, 2, \ldots, n-3)$, se obtendrá así un *nomograma de soportes paralelos y alineaciones múltiples* (fig. 492). Obsérvese que dados los módulos de e_1 y t_1, quedan determinados la posición y módulo de e_2 (Ap. V-2, *b*), dados t_1 y t_2, quedan determinados la posición y módulo de e_3, y así, mediante la posición y módulo de las escalas naturales de $t_3, t_4, \ldots, t_{n-3}$ y la posición y módulo de la escala funcional e_n, se determinan las restantes posiciones y módulos de las escalas funcionales $e_4, e_5, \ldots, e_{n-1}$.

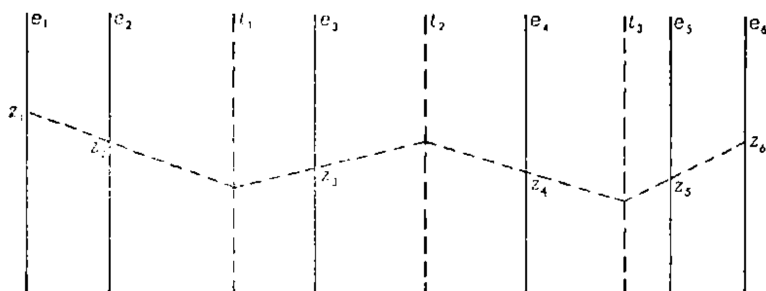


Fig. 492.

Las relaciones del tipo $f_1^{a_1} f_2^{a_2} \ldots f_{n-1}^{a_{n-1}} = f_n^{a_n}$ se reducen al caso anterior, tomando logaritmos.

Otro método para representar la relación:

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) + \ldots + f_{n-1}(z_{n-1}) + f_n(z_n) = 0$$

es el de utilizar $n-2$ ábacos exagonales (Ap. V-1, *e*) mediante la introducción de $n-3$ variables auxiliares t_i $(i = 1, 2, \ldots, n-3)$ que dan lugar a las $n-2$ relaciones de la forma [Ap. V-22] siguientes:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 + t_1 &= 0 \quad , \\ t_2 - f_3 + t_1 &= 0 \quad , \\ t_2 + f_4 + t_3 &= 0 \quad , \\ t_4 - f_5 + t_3 &= 0 \quad , \end{aligned}$$

....

$$t_{n-4} + f_{n-2} + t_{n-3} = 0 \quad \text{ó} \quad t_{n-3} - f_{n-2} + t_{n-4} = 0 \quad ,$$
$$-f_n - f_{n-1} + t_{n-3} = 0 \quad \text{ó} \quad t_{n-3} + f_{n-1} + f_n = 0 \quad ,$$

según sea n par o impar. En las relaciones anteriores, las funciones que corresponden a una misma columna, se representan sobre soportes paralelos, aunque de las t_i $(i = 1, 2, \ldots, n-3)$ no es necesario ni tan sólo dibujar el soporte, pues sus direcciones están dadas por el índice del transparente (Ap. V-1, *e*) que, partiendo de la posición fijada por z_1 y z_2, se desplaza paralelamente a la dirección normal al eje de la variable común entre dos ecuaciones sucesivas hasta la posición, sucesivamente, determinada por los valores de $z_3, \ldots, z_{n-1}$, para obtener, en la última escala, el valor buscado de z_n. Así, por ejemplo, para $n = 7$, sobre la escala e_1 (fig. 470) se representarán por f_1 y sin acotar t_2, t_3, sobre e_2 irán superpuestas f_2, $-f_3$, f_4, $-f_5$, f_6 (que pueden dibujarse desplazadas paralelamente, para mayor claridad) y sobre e_3 irá la escala f_7 y sin acotar las t_1 y t_3.

4. **Conclusión.** — Los nomogramas de puntos alineados tienen, sobre los ábacos cartesianos, las ventajas de su trazado más fácil, de ocupar menos sitio, de sus lecturas más rápidas y exactas, de su mayor precisión

en la subdivisión de escalas respecto del trazado de curvas de nivel, de su posible fraccionamiento, de poder superponer en el mismo nomograma un haz de relaciones diferentes en número cualesquiera y de la representación de relaciones de n variables para n bastante grande, mientras que, en los ábacos cartesianos, es apenas posible sobrepasar prácticamente el valor $n = 4$.

En cambio, los ábacos cartesianos tienen sobre los nomogramas de puntos alineados las ventajas de aplicarse a relaciones cualesquiera (tales como se presentan en las cartas meteorológicas), de ser más intuitivos y de comprensión inmediata, de dar una imagen viva de la marcha del fenómeno que corresponde a la relación representada, de no necesitar transparentes de uso engorroso fuera del gabinete de trabajo, y sobre todo, de permitir lecturas exactas aun cuando el gráfico se haya deformado por una circunstancia cualquiera, de las que se presentan en el taller o en campaña, con condiciones higrométricas variables que afecten el papel del dibujo.

Bibliografía sobre nomografía se ha dado en nota V-7 del capítulo X. A ella añadiremos la excelente y completa introducción con numerosos ejercicios:

M. FRÉCHET y H. ROULLET: *Nomographie* (4ª ed., Col. Colin, nº 103, Paris, 1952),

el gran tratado con resultados originales

R. SOREAU: *Nomographie ou Traité des Abaques* (2 vols., Chiron, Paris, 1924),

el manual de base teórica muy elemental, con numerosas aplicaciones técnicas

A. GIET: *Abaques et nomogrammes* (Dunod, Paris, 1954),

el moderno texto en castellano

J. C. BELGRANO, A. LÓPEZ NIETO y J. M. URCELAY: *Tratado de Nomografía* (Dossat, Madrid, 1953),

y la didáctica exposición contenida en el volumen II de la obra dedicada a estudiantes de física, química e ingeniería:

J. Mª ÍÑIGUEZ ALMECH: *Curso de matemáticas*: *Vol.* I (6ª ed., 1954); *Vol.* II (3ª ed., 1952); *Vol.* III (1943), (Librería general, Zaragoza).

De esta obra, así como de las de SADOSKY (cit. en Cap. V, nota IV-3) y de REY PASTOR, SANTALÓ y BALANZAT (cit. en Cap. XVII, nota V-4) hemos tomado muchas de las ilustraciones de este Apéndice V.

RESPUESTAS A EJERCICIOS

§ 94. Pág. 30.

1. *a* y *b*) De $X = Y \cup (X - Y)$ se deduce $\sigma(X) = \sigma(Y) + \sigma(X - Y)$;
c) Si coexistiesen $\sigma(X) = +\infty$, $\sigma(Y) = -\infty$, **debería ser** $\sigma(X \cap Y)$ finito y por tanto $\sigma(X - Y) = +\infty, \sigma(Y - X) = -\infty$, absurdo por no poder sumarse, a pesar de ser $X - Y$, $Y - X$ disjuntos.

2. Con $X_0 = 0$, es $\sigma(\lim_n X_n) = \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n - X_{n-1})) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n - X_{n-1}) = \lim_N \sum_{n=1}^{N} \sigma(X_n - X_{n-1}) = \lim_N \sigma(\bigcup_{n=1}^{N} (X_n - X_{n-1})) = \lim_N \sigma(X_N)$.

4. Para $X (\geqq) Y$, aplíquese $\sigma(X) = \sigma(Y) + \sigma(X - Y)$.

5. Con $P = \{0\} (\leqq) X$, para la monotonía aplíquese ejercicio 4. Si X_1 y X_2 son disjuntos y $P (\leqq) X_1 \cup X_2$, de $\sigma(P) = \sigma(P \cap X_1) + \sigma(P \cap X_2) \leqslant \overline{V}(\sigma, X_1) + \overline{V}(\sigma, X_2)$, se deduce $\overline{V}(\sigma, X_1 \cup X_2) \leqslant \overline{V}(\sigma, X_1) + \overline{V}(\sigma, X_2)$. Si las $\overline{V}(\sigma, X_i)$ son finitas (en otro caso resulta inmediato) existen $P_i (\leqq) X_i$ tales que $\sigma(P_i) \geqslant \overline{V}(\sigma, X_i) - \delta/2$, $(i = 1, 2)$, de donde $\overline{V}(\sigma, X_1 \cup X_2) \geqslant \sigma(X_1 \cup X_2) = \sigma(X_1) + \sigma(X_2) \geqslant \overline{V}(\sigma, X_1) + \overline{V}(\sigma, X_2) - \delta$, con δ arbitrario. Análogamente para aditividad infinita, tomando $\delta/2^n$ en lugar de $\delta/2$.

6. Para $P (\leqq) X$ aplíquese $\sigma(P) = \sigma(X) - \sigma(X - P) \leqslant \sigma(X) - \underline{V}(\sigma, X)$, $(\geqslant \sigma(X) - \overline{V}(\sigma, X))$, de donde $\overline{V}(\sigma, X) \leqslant \sigma(X) - \underline{V}(\sigma, X)$, $(\underline{V}(\sigma, X) \geqslant \sigma(X) - \overline{V}(\sigma, X))$.

8. Si $0 < a \leqslant b < 2a$, o bien $0 < a < b = 2a$ con E distinto a dos puntos, sólo los conjuntos vacío y total son medibles. En otro caso ($0 = a = b$, o bien $0 < a < b = 2a$ constando E de sólo dos puntos) todo conjunto es medible. Para E_1 euclídeo, es μ métrica sólo si $0 = a = b$.

9. Para X_k disjuntos $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ es $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k) \geqslant \mu(\bigcup_1^n X_k) = \sum_1^n \mu(X_k)$ de donde $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k)$, junto con § 94-3, M_3.

10. Es regular sólo en los casos en que todo conjunto es medible.

11. Los conjuntos medibles (L) de E_n transformados desde E_1 por la inversa de f determinan una clase de conjuntos de E_1 infinitamente aditiva que por tanto contiene los conjuntos (B) de E_1.

13. La función inversa de la $f(x)$ transforma H_0 en H. La función

característica $\varphi(y)$ de H_0 es medible, siendo $\varphi[f(x)]$, función característica de H, no medible.

14. Aplíquense los ejercicios 1 y 12.

§ 95. Pág. 60.

1. Por [95-6] es $\lim K|X_K| = 0$ para $K \to \infty$.
2. Puntos singulares de no-acotación son los del conjunto ternario de CANTOR que tiene la potencia del continuo, es perfecto y de medida nula. La función no es integrable (R - C), pero sí (H) y (L) con valor de la integral igual a $3 = \frac{1}{3} \sum_{p=1}^{\infty} p\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}$.
3. Aplíquese § 94-8, teor. 4, *e* y § 95-2, teors. 4 y 3.
4. a) La existencia de $\int_X f\,dx$ implica por el teorema del valor medio (§ 95-2, teor. 5) y aditividad respecto de X (§ 95-2, teor. 8), la acotación $\sum_{r=1}^{n} e_r|X_r| \leqslant \int_X f\,dx$, de donde existe y es (S) $\int_X f\,dx \leqslant \int_X f\,dx$. Inversamente, para $|X|$ finita, la existencia de (S) $\int_X f\,dx$, por ser las particiones de §95-1, *d*, caso particular de las γ, implica que $\int_X f_K\,dx \leqslant$ (S) $\int_X f\,dx$, de donde existe y es $\int_X f\,dx \leqslant$ (S) $\int_X f\,dx$. Para $|X| = +\infty$ se aplica § 95-2, nota 1, *b*). Supuesta $|X|$ finita, la existencia de (C) $\int_X f\,dx$ implica en § 95-1, *d*, que $s = \Sigma y_{r-1}\,\delta_r \leqslant C \int_X f\,dx$ de donde $\int_X f_K\,dx \leqslant$ (C) $\int_X f\,dx$ y por tanto existe y es $\int_X f\,dx \leqslant$ (C) $\int_X f\,dx$. Inversamente, la existencia de $\int_X f\,dx$ implica en § 95-1, *d*, que $S = \Sigma y_r \delta_r \geqslant$ (C) $\int_X f_K\,dx$ de donde $\int_X f_K\,dx \geqslant$ (C) $\int_X f_K\,dx$ y por tanto existe y es (C) $\int_X f\,dx \leqslant$ $\leqslant \int_X f\,dx$. Para $|X| = +\infty$ se aplica § 95-2, nota 1.
5. Para $f(x)$ integrable según [95-1] tómese $E_j(x)$ de escalones y_{r-1} $(r = 1, 2, \ldots, j\,2^j)$ tales que $y_{r-1} = (r-1)/2^j \leqslant f(x) \leqslant$ $\leqslant y_r$ con $E_j(x) = j$ para $f(x) \geqslant j$, siendo así $0 \leqslant f(x) -$ $- E_j(x) \leqslant 1/2^j$. Por § 95-1, *e*, y § 95-4, teor. 4, existe y es (E) $\int_X f\,dx = \int_X f\,dx$. Además, si $E(x)$ es escalonada finita, la definición (E) $\int_X E(x)\,dx$ es consistente con la inicial (demostración delicada), de donde la existencia de (E) $\int_X f\,dx$ es independiente de la sucesión E_j. Inversamente, de esta existencia se deduce la [95-1] por aplicación de § 95-1, *d*.
6. Aplíquese § 95-2, teor. 4, corol., § 94, ejercicio 6, y la unicidad de toda $\sigma(X)$ que cumpla las condiciones dadas.
7. Defínase el conjunto X_r' como en la demostración del lema de EGOROFF y al ser $g_n = |f - f_n| \leqq |G - g|$ en c.t. X, resulta que en $(X - X_0) - X_r'$ es $|G - g| \geqq 1/s$ y por tanto

$|(X - X_0) - X_r^s|$ es finita. Como X_r^s es monótona en r con $|\bigcap_r[(X - X_0) - X_r^s]| = 0$, resulta que para cada s es $\lim_r |(X - X_0) - X_r^s| = 0$ y se sigue como en el lema de EGOROFF.

8. Se aplica § 95-4, teor. 2 de LEBESGUE con $G = f_1$, $g = 0$.

9. Se aplica § 95-4, teor. 2 de LEBESGUE tomando como funciones cotas G y g las $\pm M|\Phi(x)|$.

11. Probar previamente que si $f_n(x)$ tiende en medida a 0 sobre X de medida finita y $g(x)$ es medible, entonces $f_n(x) \cdot g(x)$ tiende en medida a 0 sobre X.

12. Aplíquese el lema de EGOROFF (§ 95-4, teor. 1).

13. Aplíquese el ejercicio 7.

14. Aplíquense § 94-8 y § 95-2, teors. 8 y 7.

15. Si $|f(x)| \leqq M$ en $[a, b]$, es $||f(x+h)|^p - |f(x)|^p| \leqq$
$\leqq ||f(x+h)| - |f(x)||pM^p$.

16. Por § 95-5, teor. 6, en c.t. $[a, b]$ es

$$\lim \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - \alpha| dt = |f(x) - \alpha|$$

para $h \to 0$, y se toma $\alpha = f(x)$.

17. Aplíquese § 95-5, teor. 6, a la integral de la función característica de X.

18. Es $I_1 > 0 > I_2$.

19. Porque dicho teorema se refiere a $|f|$.

20. Porque por ejemplo no existen

$$\int_0^1 dy \int_{(\ln 2)/y}^{\infty} f\,dx, \text{ ni } \int_1^{\infty} dx \int_0^{(\ln 2)/x} f\,dy.$$

§ 96. Pág. 93.

2. No se cumple la ley asociativa, siendo por tanto incorrectos el primer y tercer signos de igualdad.

3. 1º) $\cos(x^m, x^n) = \sqrt{(2m+1)(2n+1)}/(m+n+1) \leqslant 1$ (§ 6-9, a); 2º) En $(0, 2\pi)$ es $\cos(\cos mx, \operatorname{sen} nx) = 0$; $\cos(\cos mx, \cos nx) = \cos(\operatorname{sen} mx, \operatorname{sen} nx) = 0$ si $m \neq n$; $\cos(\cos mx, \cos mx) = \cos(\operatorname{sen} mx, \operatorname{sen} mx) = 1$; En $(0, \pi)$ es $\cos(\cos mx, \cos nx) = \cos(\operatorname{sen} mx, \operatorname{sen} nx) = 0$ si $m \neq n$; $\cos(\cos mx, \cos mx) = \cos(\operatorname{sen} mx, \operatorname{sen} mx) = 1$; $\cos(\cos mx, \operatorname{sen} nx) = 0$ si $m+n$ es par; $\cos(\cos mx, \operatorname{sen} nx) = n/\pi(m^2 - n^2)$ si $m+n$ es impar; 3º) $\cos(x^6, \cos 3x) = \dfrac{5\sqrt{11}}{9\sqrt{8}\,\pi^2}\left(1 - \dfrac{1}{3\pi^2}\right)$.

4. Dada una sucesión de "puntos" $x_p = (x_{p,1}, x_{p,2}, \ldots, x_{p,i}, \ldots)$ de H, es decir, con $\sum_i |x_{p,i}|^2$ convergente, tal que la distancia cuadrática $\rho(x_p, x_q) \to 0$ para $p, q \to \infty$, por ser $|x_{p,i} - x_{q,i}| \leqslant \rho(x_p, x_q)$, existirán (§ 20-6) componentes $x_{0,i} = \lim_p x_{p,i}$ para cada i. Por propiedad triangular (§ 90-2, nota) es

$$[\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_{p,i}|^2]^{\frac{1}{2}} \leqslant [\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_{p,i} - x_{P,i}|^2]^{\frac{1}{2}} + [\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_{P,i}|^2]^{\frac{1}{2}},$$

y para $\delta > 0$ arbitrario, existe $P = P(\delta)$ tal que para $p > P$ y todo N es el primer sumando del segundo miembro $< \delta/6$ y para un cierto $N = N(P) = N(P(\delta))$ es el segundo sumando $< \delta/6$. Haciendo en el primer miembro $p \to \infty$, resulta $[\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_{0,i}|^2]^{\frac{1}{2}} < \delta/3$ y es $x_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,i}, \ldots)$ punto de

H. Por propiedad triangular es

$$\varrho(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_0) \leqslant [\sum_{i=1}^{N} |x_{p,i} - x_{0,i}|^2]^{\frac{1}{2}} + $$
$$+ [\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_{p,i}|^2]^{\frac{1}{2}} + [\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_{0,i}|^2]^{\frac{1}{2}} ,$$

donde para $p > P(\delta)$ y $N = N(P(\delta))$, cada uno de los dos últimos sumandos es $< \delta/3$. El primer sumando es $\leqslant \sum_{i=1}^{N} |x_{p,i} - x_{0,i}|$ y para $p > P_i(\delta)$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$, puede hacerse $|x_{p,i} - x_{0,i}| < \delta/(3N)$. Así para $p >$ máx $(P, P_1, \ldots, P_N)$ es $\varrho(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_0) < \delta$, como queríamos demostrar.

5. Si $f_n(x)$ es una sucesión de CAUCHY en C, también lo es en E_1 para cada x fijo de $[0, 1]$ y por § 20-6 existe $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Basta ver que esta convergencia es *uniforme* respecto de $x \varepsilon [0, 1]$. A $\delta > 0$ corresponde $N = N(\delta)$ tal que si $m > N$ es $|f_N(x) - f_m(x)| < \delta/2$ para todo $x \varepsilon [0, 1]$ y haciendo $m \to \infty$, también $|f_N(x) - f(x)| < \delta/2$. Así para $n > N$ y todo $x \varepsilon [0, 1]$ es $|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| < \delta$ siendo $f(x) \varepsilon C$ por § 43-3, *b*.

6. Dado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ tal que $\sum_n x_n^2$ sea convergente, para $\delta > 0$, existe un número natural N tal que $[\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n^2]^{\frac{1}{2}} < \delta/2$. Tomemos números racionales $r_1, r_2, \ldots, r_N$ tales que $|x_m - r_m| < \delta/(2N)$, $(m = 1, 2, \ldots N)$, por lo que para $\mathbf{r}_N = (r_1, r_2, \ldots, r_N, 0, 0, \ldots)$ es la distancia cuadrática $||\mathbf{x} - \mathbf{r}_N|| \leqslant \sum_{m=1}^{N} |x_m - r_m| + (\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n^2)^{\frac{1}{2}} < \delta$.

7. Se aproximan las funciones continuas (puntos de C) mediante poligonales (§ 26-6, ejercicio 7) cuyos vértices tienen coordenadas racionales, aplicando la continuidad *uniforme* (§ 26-6) en $[0, 1]$.

8. Es completo por demostración análoga a la del ejercicio 5. Para cada número *real* $s \varepsilon [0, 1]$ sea la función $f_s(x) \varepsilon A$ tal que valga 1 en $0 \leqslant x \leqslant s$ y sea nula en $s < x \leqslant 1$. Si $s \neq t$ es $\varrho(f_s, f_t) = 1$ y cualquier conjunto denso en A debe tener un subconjunto coordinable con el de $s \varepsilon [0, 1]$; por tanto, ningún conjunto numerable puede ser denso en A (Cap. II, nota II, teor. 1).

§ 97. Pág. 105.

1. Los valores absolutos son para las dos primeras: en métrica lineal $2/\pi$, en métrica cuadrática $1/\sqrt{2}$, en métrica uniforme 1. Para la tercera, introdúzcase α mediante $\cos n\pi\alpha = a/\sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{sen} n\alpha\pi = b/\sqrt{a^2 + b^2}$ y se obtiene respectivamente: $2\sqrt{a^2 + b^2}/\pi$, $\sqrt{(a^2 + b^2)/2}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Si $\sigma_n(x)$ es la suma parcial de $\sum a_n \varphi_n$, se aplica la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ (§ 96, ejercicio 1) a $(\sigma_n - f) \cdot \varphi_r$ para probar que $a_r = c_r$, y se sigue con [97-4].

3. *a*) Obsérvese que $\varphi_n(x)$ toma alternativamente los valores $+1$ y -1 en los intervalos $(0; 2^{-n})$, $(2^{-n}; 2.2^{-n})$, ...; *b*) Puede adjuntarse al sistema la función $\varphi(x) \equiv 1$.

4. Para la completidad, probar que si para todo x y todo n es $\int_0^1 f(t) \prod_{k=0}^{n} [1 + \varphi_k(x) \varphi_k(t)] dt = 0$, y si $F(x)$ es una función integral de $f(x)$, es $F'(x) = 0$ para casi todo x.

5. Es $\int_a^b P_n(x)x^m\,dx = 0$ (determinante con dos filas iguales) si $m < n$; 1º) Quedan normalizados por

$$1 = \int_a^b P_n^2\,dx = k_n^2 \begin{vmatrix} \mu_0 & \dots & \mu_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \dots & \mu_{2n-2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mu_0 & \dots & \mu_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_n & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix};$$

2º) Para $P_n(1) = 1$, ha de ser $k_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \end{vmatrix} = 1$.

6. Se integra por partes sucesivamente

$$\int_a^b P_n(x)x^m\,dx =$$
$$= (-1)^m \cdot m! \int_a^b c_n D^{n-m}\{(x-a)^n (x-b)^n\}dx = 0 \text{ si } m < n;$$

1º) Si es $u(x) = (x-a)^n(x-b)^n$ quedan normalizadas por

$$1 = \int_a^b P_n^2\,dx = c_n^2 \int_a^b \{u^{(n)}\}^2 dx = -c_n^2 \int_a^b u^{(n-1)}\,u^{(n+1)}\,dx$$

y se sigue integrando por partes hasta obtener $u^{(2n)} = (2n)!$, y luego hasta llegar a $\int_a^b (x-a)^{2n}\,dx$, dando

$$1 = c_n^2(n!)^2(b-a)^{2n+1}/(2n+1);$$

2º) $P_n(b) = c_n(b-a)^n \cdot n! = 1$.

7. Legendre (Cap. XVI, nota, III, c); Chebichev (1ª especie): $T_{n+1} - xT_n + \frac{1}{4}T_{n-1} = 0$ si $n \geqslant 2$, $T_2 - xT_1 + \frac{1}{2}T_0 = -\frac{1}{4}$, $T_1 - xT_0 = 0$; Chebichev (2ª especie): $U_{n+1} - 2x\,U_n + U_{n-1} = 0$ si $n \geqslant 1$, $U_1 - 2xU_0 = 0$; Gauss-Jacobi: $(p+n)(q+n)(p+2n-1)G_{n+1} + (p+2n)[(p+2n-1)(p+2n+1)x - 2n(p+n) - q(p-1)]G_n + n(p+2n+1)(p-q+n)G_{n-1} = 0$ si $n \geqslant 1$, $qG_1 + [(p+1)x - q]G_0 = 0$; Laguerre: $L_{n+1} - (2n+1-x)L_n + n^2L_{n-1} = 0$ si $n \geqslant 1$, $L_1 - (1-x)L_0 = 0$; Hermite: $H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$ si $n \geqslant 1$, $H_1 - 2xH_0 = 0$.

10. Se integra por partes, rebajando parejamente m y n; si es $m < n$ desaparece la potencia y queda la derivada cuya integral es nula.

11. Legendre: $\sqrt{(2n+1)/2}\,P_n$; Chebichev (1ª especie): $(2^{2n-1}/\pi(1-x^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}T_n$; Chebichev (2ª especie): $\sqrt{2/\pi}\,U_n$; Gauss-Jacobi: $\{[(p+2n)\Gamma(p+n)\Gamma(q+n)x^{q-1}(1-x)^{p-q}]/[n!\,\Gamma^2(q)\Gamma(p+n-q+1)]\}^{\frac{1}{2}}G_n$, donde $\Gamma(x)$ es la función Gamma (§ 53, ejercicio 8; Cap. XXIX, nota VII); Laguerre: $e^{-\frac{1}{2}x}L_n/n!$; Hermite: $e^{-\frac{1}{2}x^2}H_n/(2^n \cdot n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}$.

§ 98. Pág. 121.

1. $a)$ $$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\text{sen}\,x}{1} + \frac{\text{sen}\,2x}{2} + \frac{\text{sen}\,3x}{3} + \dots\right);$$
$$(x \neq 2n\pi);$$

$b)$ $$f(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\text{sen}\,x}{1} - \frac{\text{sen}\,2x}{2} + \frac{\text{sen}\,3x}{3} - + \dots\right);$$
$$[x \neq (2n+1)\pi].$$

Puede deducirse de (a) por $f(x) + \dfrac{1}{2} =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n(x+\pi)}{n} \quad ;$$

c) $$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \dots\right) \; ;$$

d) $$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos 2nx}{4n^2 - 1} =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3} - \frac{\cos 4x}{15} + \dots\right) \; ;$$

Puede deducirse de (c) mediante $|\cos x| = |\operatorname{sen}(x + \frac{1}{2}\pi)|$;

e) Por $t = 2\pi(x - a)/(b - a)$ se reduce a § 98-4, ejemplo 1:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((4n-2)\pi(x-a)/(b-a))}{2n-1} \; .$$

2. Para todo $x \neq (2n+1)\pi$ para la primera y todo $x \neq 2n\pi$ para la segunda.

3. Para $|r| < 1$ y todo θ vale $\dfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} =$

$$= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta.$$

4. Aplíquese § 97-5.

5. Aplicando la descomposición de (a, b) o ampliando con valores nulos para cubrir $(0, 2\pi)$ (§ 98-1, teor.) es (§ 98-3): $g(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \operatorname{sen} nx)$, que por § 95-4 (teor. 2 de convergencia acotada) puede multiplicarse por la función integrable $f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$, e integrar en $(0, 2\pi)$ dando $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) g(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$, coincidente en multiplicar formalmente la s.F. de $f(x)$ por $g(x)$ e integrar.

6. Serie uniformemente convergente (§ 43-3, *c* y § 22-2, *b*) integrable término a término (§ 85-1, teor. 1) que coincide con la s.F. de su suma; los c.F. decrecen en orden arbitrario por ser los k_n arbitrarios.

7. Es $$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[f(x) - f\left(\frac{\pi}{n} + x\right)\right] \cos nx\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} O(1/n^p)\,dx = O(n^{-p}),$$ y análogamente para b_n.

8. Para $f(x)$ positiva y creciente (§ 55-9, *d*) es (§ 79-2):

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,dx = f(2\pi) \int_\xi^{2\pi} \cos nx\,dx = O(1/n),$$

y análogamente para la integral del seno.

9. Para (§ 95-5, teor. 4) $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)\,dx$, $(x \geqslant 0)$ es $\pi b_n = [-f(x)(\cos nx)/n]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx\,dx$, con el término integrado nulo por ser $f(0) = f(2\pi)$, y se aplica a la última integral, § 98-1, teor. de RIEMANN. Análogamente para a_n.

§ 99. Pág. 134.

1-2. Aplíquese § 98-5, ejemplos y nota 2.

3. En [99-25] tómese $f(t) = \sqrt{2\pi}\,F(t)e^{-\sigma t}$ si $t > 0$ y $f(t) = 0$ si $t < 0$.

4. En [99-25] y [99-26] tómese $g(u) = e^{cu}\,\Phi(e^u)$; $f(t) = \varphi(c + it)/\sqrt{2\pi}$; $s = c + it$; $y = e^u$.

5.

f_1 á f_6		3042	2134	1273	788	395	370
f_{12} á f_7	2714	767	—437	—357	191	540	
(+) s_0 á s_6	2714	3809	1697	916	979	1035	370
(—) d_1 á d_5		2275	2571	1630	597	—45	

s_0 á s_3	2714	3809	1697	916	d_1 á d_3	2275	2571	1630
s_6 á s_4	370	1035	979		d_5 á d_4	—45	597	
(+) σ_0 á σ_3	3084	4844	2676	916	(+) σ'_1 á σ'_3	2230	3168	1630
(—) δ_0 á δ_2	2344	2774	718		(—) δ'_1 á δ'_2	2320	1974	

	I	II	I	II	I	II	I	II
Coef. 0,500			718		–2676	4844		
Coef. 0,866				2774				
Coef. 1,000	5760	5760	2344		3084	–916	2344	718
(+)	5760	5760	2703	2402	1746	1506	2344	718
I + II	$12.\frac{1}{2}a_0 = 11520$		$6a_1 = 5105$		$6a_2 = 3252$			
I — II	$12a_6 = 0$		$6a_5 = 301$		$6a_4 = 240$		$6a_3 = 1626$	

	I	II	I	II	I	II
Coef. 0,500	2230					
Coef. 0,866		3168	2320	1974		
Coef. 1,000	1630				2230	1630
(+)	2745	2743	2009	1709	2230	1630
I + II	$6b_1 = 5488$		$6b_2 = 3718$			
I — II	$6b_5 = 2$		$6b_4 = 300$		$6b_3 = 600$	

$f(x) \sim 0{,}960 + 0{,}851 \cos x + 0{,}542 \cos 2x + 0{,}271 \cos 3x + 0{,}04 \cos 4x + 0{,}05 \cos 5x + 0{,}915 \operatorname{sen} x + 0{,}62 \operatorname{sen} 2x + 0{,}1 \operatorname{sen} 3x + 0{,}05 \operatorname{sen} 5x$.

6. $f(x) \sim 0{,}977 \operatorname{sen} x - 0{,}453 \operatorname{sen} 2x + 0{,}262 \operatorname{sen} 3x - 0{,}151 \operatorname{sen} 4x + 0{,}070 \operatorname{sen} 5x$.

§ 100. Pág. 152.

1. *b*) $C = -1 \pm \sqrt{27}$; $y = x^{3/2} - 4{,}2$; $y = x^{3/2} + 6{,}2$.
2. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = C^2$.
3. *a*) $(x^4/4) + (1/y) - C$; *b*) $y = Ce^{x^2}$; *c*) $1 - y^2 = C \cdot e^{-x^2}$.
4. Por rotación de coordenadas se consigue que las isoclinas sean paralelas al eje y, y entonces $y' = g(x)$.
7. $y' = \pm\, y/x$; $(xy - C)(y - Cx) = 0$.

§ 101. Pág. 164.

1. *a*) $\sqrt{1-x^2} = \ln[Cxy/(1-\sqrt{1-x^2})]$;
   b) $x - \sqrt{1-y^2} + \ln[(1+\sqrt{1-y^2})/y] = C$;
   c) Hipérbolas $u = (v + C)/(1 - Cv)$.
2. 1º) $y - \sqrt{ax - a^2} = C(a^2 + y\sqrt{ax - a^2})$;
   2º) $\sqrt{1+y^2}\,(y + \sqrt{1+y^2}) = C \cdot e^{x/\sqrt{1+x^2}}$.
3. *a*) Parábolas $\frac{1}{2}y^2 = kx + C$; *b*) $16x^3 - 9(y^2 + C)^2 = 0$.
4. *a*) $2x/(x-y) = \ln Cx$; *b*) Parábolas de eje vertical con el foco en el origen $x^2 = C(2y + C)$; *c*) Circunferencias $y = C(x^2 + y^2)$.
5. 1º) $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = C$; 2º) Si $|m| > 1$; $(y - ax)^a = C(y - bx)^b$, siendo $a = m + \sqrt{m^2 - 1}$, $b = m - \sqrt{m^2 - 1}$; si $m = \pm 1$, $y \mp x = Ce^{-x/(x \mp y)}$; si $|m| < 1$;
   $$\tfrac{1}{2}\ln(y^2 - 2mxy + x^2) + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{y - mx}{x\sqrt{1-m^2}} = C.$$
6. *a*) $(2 + y - 3x)/(1 + y - 2x)^2 = C$;
   b) $C \cdot e^{4x-8y} = 4x + 8y + 5$.
7. $y = -x + 2 \operatorname{arc\,tg}(x + C)$.
8. 1º) $y = (x+1)^2(e^x + C)$;
   2º) $y = Ce^{-\operatorname{arc\,tg} x} + \operatorname{arc\,tg} x - 1$;
   3º) Si $|x| < 1$, $y = \sqrt{1-x^2}(C + a \operatorname{arc\,sen} x)$; si $|x| > 1$, $y = \sqrt{x^2-1}[C + a\ln(x + \sqrt{x^2-1})]$.
9. $(x^2 - x)y' + (1 - 2x)y + x^2 = 0$. INDIC.: Es $x^2 - x$ solución de la ecuación incompleta.
11. *a*) Aplicar 101-4, nota 4; *b*) Hacer $x_2 \to x_1$ en *a*).
12. *a*) $I = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$; *b*) $I = \dfrac{E}{R} e^{-Rt/L}$.
13. *a*) $y = \sqrt{(e^x + Ce^{-x})/(2x)}$; *b*) $y^2 = x^3/(Cx + 2)$;
   c) $(a + 1/y)^2 = C(1 - x^2)$;
   d) Si $|x| < 1$, $y = [C\sqrt[4]{1-x^2} - (2/3)(1-x^2)]^2$; si $|x| > 1$, $y = [C\sqrt[4]{x^2-1} + (2/3)(x^2-1)]^2$.
14. Resulta $f(z) + g(z)\left(x\dfrac{dz}{dx} + z\right) + ke^{x+z}\dfrac{dz}{dx} = 0$, que es de BERNOULLI, considerando x como función de z.
15. Una solución particular es $y_1 = x$, por la que se obtiene la integral general $y = x - 1/(\frac{1}{2}x^2 + C)$.
16. Aplicar [101-20].
17. *a*) $x^2 - xy + y^2 = C$; *b*) $\operatorname{sen} x(e^y + 1) = C$;
   c) $y^2 = C(C - 2x)$.
18. Se aplica § 101-7; *a*) $\mu = \cos^{-2}x$, $y \operatorname{tg} x - x \operatorname{tg} y = C$;
   b) $\mu = y^{-2}$, $x^2 + (x/y) + \ln y = C$.

20. 1º) $x^3 - 6x^2y - 6xy^2 + y^3 = C$; 2º) $(x-y)^2 - (x^2+y^2) = C$.

21. *a*) La ecuación [101-23] se verifica pues se escribe $Q(xP_x + yP_y) = P(xQ_x + yQ_y)$ y ambos miembros se reducen a rPQ siendo r el grado de homogeneidad de P y de Q; *b*) De la igualdad anterior se obtiene $x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{Q}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{Q}\right) = 0$, o sea P/Q homogénea de grado cero.

22. $\ln x + \operatorname{arc\,tg}(y/x) = C$.

23. *a*) $\frac{xP + yQ}{x^2(Q_x - P_y)} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$; *b*) $\frac{xQ - yP}{P_y - Q_x} = \varphi(x^2 + y^2)$;

c) $\frac{aQ - bP}{P_y - Q_x} = \varphi(ax + by)$.

24. Resulta el factor integrante $x^{-9/23}\, y^{-44/23}$ dando integral general

$$\frac{23}{7}x^{14/23}\, y^{-21/23} + \frac{23}{12}x^{60/23}\, y^{48/23} = C.$$

25. $2ayy' + 4ax = y^2 \therefore y^2 = Ce^{x/a} + 4a(x+a)$.

26. $\rho' = \rho \operatorname{tg}\varphi + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{a}\rho^2 \therefore \rho = \frac{a}{1 + C\cos\varphi}$.

§ 102. Pág. 171.

1. $(y - Cx^2)(y - Cx^4) = 0$, solución singular (nota I): $xy = 0$.

2. Parábolas $(x-y)^2 - 2C(x+y) + C^2 = 0$; solución singular (nota I): $xy = 0$, envolvente de las parábolas.

5. *a*) $x = Ce^{-p} + 2(1-p)$, $y = Ce^{-p}(1+p) + 2 - p^2$;

b) $x = \frac{C}{p^2} + \frac{1}{2p^2}\ln(p + \sqrt{1+p^2}) - \frac{\sqrt{1+p^2}}{2p}$,

$$y = \frac{2C}{p} + \frac{1}{p}\ln(p + \sqrt{1+p^2}).$$

6. *a*) Solución general $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$, solución singular $x^2 + y^2 = 1$;

b) $4y = (x+1)^2$; *c*) $y = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2+1}}$.

7. *a*) $e^{(y-C)/x} = 2\left(\frac{y-C}{x}\right)^2 + 5$; *b*) $f\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$.

§ 103. Pág. 176.

1. *a*) Hipérbolas $xy = C$; *b*) Elipses $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = C$.

2. *a*) $y = Cx^4$; *b*) $x^2 + y^2 - \ln x^2 = C$.

3. Tractrices $y = \ln \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x) + \sqrt{1-x^2} + C$.

5. Tómese $r = \sqrt{\rho^2 - 1}$.

6. De § 102-3, ej. 2, se deduce la ecuación diferencial de las evolventes $y = -xp^{-1} - k(1+p^2)^{-\frac{1}{2}}$. Su integral general (§ 102-3, *b*) es:

$$x = \frac{-kp}{2(1+p^2)^{3/2}} + \frac{Cp}{\sqrt{1+p^2}};$$

$$y = -k\frac{1 + 2p^2}{2(1+p^2)^{3/2}} - \frac{C}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Para $p = \operatorname{cotg} t$ se obtiene:

$x = -\frac{1}{2}k \cos t \operatorname{sen}^2 t + C \cos t;$
$y = -\frac{1}{2}k(\operatorname{sen}^3 t + 2 \operatorname{sen} t \cos^2 t) - C \operatorname{sen} t.$
Cambiando C en $-C - k(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)$ y luego t en $t + \pi$, resulta la solución del ejercicio 14 de § 55 empleando la forma paramétrica de la astroide: $x = k \cos^3 t$, $y = k \operatorname{sen}^3 t$.

7. $y'(x - m_0 y) = y + m_0 x$, espirales logarítmicas $\rho = a e^{\theta/m_0}$.

8. Póngase el haz en la forma $x = a(\lambda) + R(\lambda) \cos t$, $y = b(\lambda) + R(\lambda) \operatorname{sen} t$; para determinar t en función de λ de modo que la curva así definida corte a las circunferencias bajo ángulo $\theta = \operatorname{arc tg} m_0$, se tiene: $\cos t\, dy - \operatorname{sen} t\, dx = m_0(\cos t\, dx + \operatorname{sen} t\, dy)$, donde dx y dy se obtienen del haz. Haciendo $\operatorname{tg} \frac{1}{2}t = u$ se llega a una ecuación de RICCATI.

9. $U = \ln[(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2]$; $V = 2xy/(x^2 - y^2 - a^2) = C_1$ son las líneas de fuerza, dando hipérbolas equiláteras que forman haz ortogonal a la familia de óvalos.

§ 104. Pág. 188.

1. *a*) $y = e^{x^2/2}$; *b*) $y = 2e^x - 2x - 2$.

2. $y = \operatorname{tg} x = x + (x^3/3) + (2x^5/5) + (17x^7/135) + \ldots$.

4. $y_1 = 0{,}751\,21$; $y_2 = 0{,}578\,62$.

6. Se determina ε por § 104-4 *d* y luego la máxima longitud de un lado por § 104-4 c_1.

§ 105. Pág. 197.

1. *a*) $y''' = 0$; *b*) $y'y''' = 3y''^2$.

2. $(1 + y'^2)^{3/2}/y'' = 1$; radio de curvatura $= 1$.

3. 1º) $(1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0$;
2º) $y'^2 + 1 + \dfrac{x^2 - y^2 - a^2 + b^2}{xy} y' = 0.$

4. INDIC.: Fórmese $y''^{-2/3}$ y obsérvese que salvo un factor constante es $px^2 + 2qx + r$.

§ 106. Pág. 207.

1. *a*) $y = \ln[C_2/(x + C_1)]$; *b*) $y = \ln \operatorname{tg}(\frac{1}{2}x + C_1) + C_2$.

2. La ecuación en $p = y'$ es de BERNOULLI (§ 101-5, *a*).

3. $me'' = mg - ke'^2$; $v = \sqrt{g/h} \operatorname{tgh}[\sqrt{gh}(t + C_1)]$;
$e = (1/h) \ln \operatorname{ch}[\sqrt{gh}(t + C_1)] + C_2$, con $h = k/m$.

4. $me'' = f(e, v)$ da la ecuación de primer orden en e y v: $mv(dv/de) = f(e, v)$, que si puede integrarse da $v = G(e, C_1)$ y luego $t = \displaystyle\int \frac{de}{G(e, C_1)} + C_2$.

5. $R \operatorname{sen} \varphi = 1/k$, $y'' = ky'(1 + y'^2)$; $Ce^{kx} = \operatorname{sen} k(y + C_1)$.

6. $x_1 = a$, $y_1 - y = (dy/dx)(x_1 - x)$, $dx^2 + dy^2 = dx_1^2 + dy_1^2$, o sea $y_1 - y = (dy/dx)(a - x)$, $1 + y'^2 = (dy/dx)^2 = [y''(a - x)]^2$,
$$y = \frac{a}{2} \ln \frac{a}{a - x} + \frac{x - 2a}{4a} x.$$

7. *a*) $y = (4/15)\, x^2\sqrt{x} + (x/3) + (2/5)$;
b) $y = -4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x + \sqrt{2}\, x + \frac{1}{2}\sqrt{2}(4 - \pi)$;
c) $y = -x \operatorname{arc tg} x + \ln\sqrt{1 + x^2} + 2x + 1$;
d) $y = \dfrac{1}{4!}\left(\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^8}{280}\right) + C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4.$

8. $a)\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,(x-\xi)^{-\frac{1}{2}}\,d\xi$; $\quad b)\ k/\sqrt{\pi x}$.

10. $a)\ y = 6/(x - \sqrt{6})^2$; $\quad b)\ y = \operatorname{sh}(C_1 x + C_2)$.

11. $y = \ln\{2C_1^2/[1 - e^{C_1(x+C_2)}]^2\} + C_1(x + C_2)$.

12. Las ecuaciosnes en $y' = p$ son lineales en p y p^2 respectivamente.

13. Si $k = 2$, $y = (1/C_1) + (C_1/4)(x - C_2)^2$; si $k = -2$, con $C_1 = 2r$, $y = r(1 - \cos t)$ resulta $x - C_2 = \pm r(t - \operatorname{sen} t)$ (cicloide, § 34-6, ej. 2).

14. Curvatura 1; $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1$.

15. $y = [(x - C_1)^6/240] + C_2 + C_3 x + C_4 x^2$.

16. Con $y = e^z$, la ecuación en $z' = u$ es $u' - (\operatorname{sen} u)/x = 0$, $u = 2 \operatorname{arc\,tg}(x/C_1)$; $y = C_2(x^2 + C_1^2)^{-C_1} e^{g(x)}$ con $g(x) = 2x \operatorname{arc\,tg}(x/C_1)$.

17. $y^2 = C_1 x^2 + C_2/x$.

18. $y \cos x - \frac{1}{2}C_1(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x) = C_2$.

§ 107. Pág. 217.

1. $a)\ W(x; u_1, u_2) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$.

2. $b)\ W(x; u_1, u_2, u_3) = -2$.

3. De $C_1 x + C_2 e^x = 0$ resulta derivando $C_1 + C_2 e^x = 0$ de donde $C_2 = 0$ (pues sino $e^x = \text{const.}$), y de aquí $C_1 = 0$.

4. Son soluciones de $y^{(n+1)} = 0$, y el wronskiano vale $n!$

5. $a)$ Derivando y reemplazando en la ecuación, se ve que x^r es solución para r raíz de $[r]^n + a_1[r]^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0$, ($[r]^k$: factorial, § 47-4); $\quad b)\ y = C_1\sqrt[3]{x^4} + C_2\sqrt{x}$. INDIC.: Con $\sqrt[6]{x} = t$, son $\sqrt[3]{x^4} = t^8$ y $\sqrt{x} = t^3$ linealmente independientes por ejercicio 4.

6. $y = C_1 x^2 + C_2 x + \frac{1}{2}q + (x^2 - px)\ln x$. INDIC.: Es $y = C_1 x^2 + C_2 x$ la solución general de la ecuación homogénea (ejercicios 5, a y 4). Luego se aplica el método de variación de los parámetros (§ 107-4 a).

7. $y = C_1 x^4 + C_2 x^5 + C_3 x^6 + x^6 \ln x$.

8. $y = -(2C + 3x)/[x^3(C + x)]$.

9. $y = C_1 x \displaystyle\int_a^x [e^{-\frac{1}{2}t^2}/t^2]\,dt + C_2 x$.

10. $b)\ [(x^2 + 2).y' + x^3 y]' = 1$ da $(x^2 + 2)y' + x^3 y = x + C$, lineal de primer orden, etc.

11. $y = a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x$.

12. Debe ser $\mu = 0$, $\mu = b + 1$, de donde $y = A$

$$\left\{1 - \frac{c}{b}x + \frac{c(c+a)}{2b(b-1)}x^2 - \frac{c(c+a)(c+2.\overline{a+1})}{3!b(b-1)(b-2)}x^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{c(c+a)(c+2.\overline{a+1})(c+3.\overline{a+2})}{4!b(b-1)(b-2)(b-3)}x^4 - \ldots\right\} + Bx^{b+1}$$

$$\left\{1 + \frac{c+(b+1)(a+b)}{b+2}x + \right.$$

$$\left. + \frac{[c+(b+1)(a+b)][c+(b+2)(a+b+1)]}{2!(b+2)(b+3)}x^2 + \ldots\right\}.$$

§ 108. Pág. 229.

1. *a*) $y = -2e^{4x} + 3e^{3x}$;
b) $y = e^{3x} + 2e^{-2x}$;
c) $s = (4/3)e^{3t} - (1/3)$.

2. *a*) $y = \cos \frac{1}{2}x + 4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$;
b) $y = e^{(3/2)x} [\cos 2x + (1/4) \operatorname{sen} 2x]$;
c) $y = e^{2x} \cos x$.

3. $y = (1 + x) \,.\, e^{-2x}$.

4. 1º) $y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$ con r_1 y r_2 reales; 2º) $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ complejos, $y = x^{\alpha}[A \cos(\beta \ln x) + B \operatorname{sen}(\beta \ln x)]$; 3º) Raíces $r_1 = r_2$ coincidentes; como $\ln x = t$ conduce a coeficientes constantes, es

$$y = C_1 e^{r_1 \ln x} + C_2 \ln x \, e^{r_1 \ln x} = (C_1 + C_2 \ln x) \,.\, x^{r_1}.$$

5. *a*) $y = C_1 \sqrt{x} + C_2 x \,.\, \sqrt[3]{x}$; *b*) $y = (C_1/x) + (C_2 \ln x)/x$.

6. *a*) $y = 5 \cos x + 2 \operatorname{sen} x + 3x^2 - 4$; *b*) $y = -e^{3x} + 2 + x^2$;
c) $y = \frac{1}{2}[x^2 + 3x + (7/2)]e^x + Ae^{2x} + Be^{3x}$;
d) $y = e^{-4x}(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x) + (e^{2x}/45)$.

7. *a*) $x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t} - (6/85) \operatorname{sen} t + (7/85) \cos t$;
b) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} 2x$;
c) $y = \cos x + 3 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x \cos x$.

8. *a*) $$y = (Ax + B)e^{-6x} + \frac{x}{50} - \frac{2}{250} - \left(\frac{10x}{841} - \frac{142}{29^3}\right) \operatorname{sen} 2x - \left(\frac{21x}{1682} - \frac{65}{29^3}\right) \cos 2x;$$
b) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + (e^{-x}/6) + (x^2/2) + (3x/2) + (7/4)$.

9. 1º) $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + A \cos ax + B \operatorname{sen} ax$;
2º) $y = C_1 e^{ax} \cos(ax + C_2) + C_3 e^{-ax} \cos(ax + C_4)$.

10. 1º) $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{3ax} + C_3 e^{-3ax} + (1/6a^3)[x^2 + (7x/3a) + (49/18a^2)]$;
2º) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + e^{x/2}(A \cos \frac{1}{2}\sqrt{3}\, x + B \operatorname{sen} \frac{1}{2}\sqrt{3}\, x) + (x^6/6)$;
3º) $y = (C_1 + C_2 x) \cos ax + (C_3 + C_4 x) \operatorname{sen} ax - (x^2 \cos ax)/(8a^2)$.

§ 109. Pág. 241.

1. $a + by' + cz' = 0$, $x + yy' + zz' = 0$, o bien

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay} \,.$$

2. 1º) $z'x = z'y/y' = 2z$;
2º) $(dx)/(x - x_0) = (dy)/(y - y_0) = (dz)/(z - z_0)$.

3. b_1) $(dx)/x = (dy)/y = (dz)/z$;
b_2) $(dx)/(2x) = (y\, dy)/[2(z - x^2)] = (dz)/(-1)$.
b_3) $(dx)/\sqrt{1 - x^2 - y^2} = (dy)/y = (dz)/z$.

4. *a*) $x^2 + y^2 = C_1^2$, $z = 3 \operatorname{arc\,sen}(x/C_1) + C_2$;
b) $y = C_1 x$, $z = [4C_1 x^2 + C_2]^{\frac{1}{2}}$;
c) $y = C_1 - x$, $z = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} C_1 + C_2$.

5. $8(x^2 - y^2) + 2(2y^2 - \frac{1}{2}z^2) = 1$. Indic.: Curvas integrales: $x^2 - y^2 = C_1$, $2y^2 - \frac{1}{2}z^2 = C_2$; condición de apoyo: $8C_1 + 2C_2 = 1$.

6. $y = (1/2) - (1/5)e^{-x} - (3/10)e^{-6x/11}$. $z = (e^{-x} - e^{-6x/11})/6$.

7. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + 3e^{3x}$, $z = -3C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 8e^{3x}$.

8. $y = (6/17) - (2/13)e^{x} - e^{-4x}[(A + B)\cos x + (B - A)\operatorname{sen} x]$;
$z = (-93/17) - (31/26)e^{x} + e^{-4x}(A\cos x + B\operatorname{sen} x)$.

9. $z' = 0$, $y'''(1 + y'^2) = 3y'y''^2$; cfr. § 109-3, ej. 2.

10. $y = 3e^{2x} + \operatorname{sen} x + 2\cos x$; $z = 2e^{2x} - \operatorname{sen} x - 2\cos x$.

11. $y = Ae^{-2x} + Be^{x} + Ce^{x/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{7}x + De^{x/2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\sqrt{7}x$;
$z = Ae^{-2x} + Be^{x} - Ce^{x/2}\cos\frac{1}{2}\sqrt{7}x - De^{x/2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\sqrt{7}x$.

12. $y = (A + Bx)\cos 2x + (C + Dx)\operatorname{sen} 2x + (x^2/32)\cos 2x$;
$z = -[A + 4D + Bx - (15/16) + (x^2/32)]\cos 2x +$
$+ [4B - C - Dx + (x/4)]\operatorname{sen} 2x$.

13. $v\sqrt{2h/g}$.

14. $h = \frac{1}{2}(v_0^2/g)\operatorname{sen}^2\alpha$, $OH = (v_0^2/g)\operatorname{sen} 2\alpha$, $(OH)_{máx} = v_0^2/g$.

15. *a*) $y - \frac{1}{2}(v_0^2/g) = -\frac{1}{2}(g/v_0^2)x^2$; *b*) $x^2 + 4y^2 = 4ay$.

16. $v = \sqrt{(2a/d)^2 + (2kM/r)}$. INDIC.: Calcúlese la energía total de la unidad de masa del cometa, a partir de un nivel r_0, en el infinito y en un punto cualquiera.

§ 110. Pág. 270.

1. *a*) $z = x^2y^2 + \varphi(y)$;
b) $z = xy^3 + \varphi(x)y + \Psi(x)$.

2. *a*) $\varphi(z, y/x) = 0$; *b*) $xp + yq = 0$.

3. *a*) En los tres casos la misma ecuación diferencial $q = -y/z$, lo que se explica por *b*).

4. $p = -2z/x$.

6. *a*) $\varphi[z, \ln(x/y) - x] = 0$; *b*) $\varphi[(x/y) + e^{x^2}, z] = 0$.

5. $z = e^{x}\,\varphi(y - x)$, o lo mismo $z = e^{y}\,\Psi(y - x)$.

7. *a*) $\varphi(xy, yz) = 0$;
b) $\varphi(x^2 + y^2, xz) = 0$;
c) $\varphi(z, x^2 - y^2) = 0$;
d) $\varphi[y/x, z - (y^2/x)] = 0$;
e) $\varphi(xz - x^2, xy) = 0$.

8. *a*) $\varphi[y/x, (x^2 + y^2 + z^2)/x] = 0$;
b) $y^3(x^2 + y^2 + z^2)^2 - z(y^2 + z^2)^2 = 0$.

9. *a*) $xp + yq = 2z$; *b*) $\varphi(x^2/z, y^2/z) = 0$;
c) Paraboloide hiperbólico $x^2 - y^2 = z$.

10. *a*) $\varphi[x^2 + y^2, z - h\operatorname{arc\,tg}(y/x)] = 0$. INDIC.: Combinaciones integrables de las ecuaciones de las características:
$x\,dx + y\,dy = 0$; $dz - [h(x\,dy - y\,dx)/(x^2 + y^2)] = 0$.
b) Características: circunferencias; superficies integrales: de revolución alrededor del eje z.

11. *a*) $F_xp + F_yq - F_z = 0$; *b*) $dx/F_x = dy/F_y = dz/F_z$; tangente a la característica = normal a la superficie del haz $F(x, y, z) = C$, es decir, las características son trayectorias ortogonales de las superficies del haz $F = C$.

12. *a*) $x/y = \alpha$, $x^2 + y^2 + 2z^2 = \beta$. INDIC.: De las ecuaciones diferenciales de la congruencia resulta la combinación integrable $x\,dx + y\,dy = -2z\,dz$. *b*) $\varphi(x/y, x^2 + y^2 + 2z^2) = 0$.

§ 111. Pág. 291.

1. $z = 2\sqrt{xy} + 1$; § 111-3, ejemplo 2.

2. $z = (x - ky)^2/(4k)$, $k = \pm 2\sqrt{2} - 3$, dos soluciones.

3. *a*) $xp + yq = 2z$.

4. *a*) $z = -(x+y)^2/4$; $z = -(x+2y)^2/8$;
b) $z = 4(1+\sqrt{xy})$.

5. *a*) La condición para que el elemento plano contenga a la tangente a la curva: $dz = p dx + q dy$, se satisface idénticamente por [111-37];
b) Reemplazando en $df/dt = (\partial f/\partial x)(dx/dt) + \ldots + (\partial f/\partial q)(dq/dt)$ las derivadas $dx/dt, \ldots, dq/dt$ por los segundos miembros de [111-37] y los primeros de [111-39] resulta $df/dt = 0$.

6. $z = x(Cy+1)$.

7. $z = (x+\alpha)(y+\beta)$, paraboloides tangentes al plano xy. INDIC.: Una integral primera del sistema característico es $q = x + \alpha$.

8. $z = \alpha x + \beta e^y/(2\alpha + y)^{2\alpha}$.

9. $z = \alpha y + (x+\beta)^2/4$.

10. *a*) Una integral del sistema característico es $p = \alpha_1$.

11. *a*) Del sistema característico resulta $q = \alpha p$, y por la ecuación dada $p = g(z)$, $q = \alpha g(z)$, de donde $dz/g(z) = dx + \alpha dy$;
b) Poniendo $z = h(x+\alpha y) = h(u)$ resulta
$$f(z, dz/du, \alpha\, dz/du) = 0.$$

12. Del sistema característico resulta $df(x,p) = 0$, de donde $f(x,p) = \alpha$ y $g(y,q) = \alpha$, de donde se despejan p y q obteniéndose: $p = h(x,\alpha)$, $q = k(y,\alpha)$.

13. *a*) $z = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{2}(y^2/\alpha) + \beta$;
b) $z = \sqrt{\alpha(1-x^2)} - \frac{1}{2}\alpha y^2 + \beta$.

14. *a*) $z = \alpha x + \beta y + \alpha^2 - \beta^2$, § 111-8, ej. 3;
b) $y^2 - x^2 = 4z$;
c) $x^2 + 4z = 0$, envolvente del haz de *a*) para $\beta = 0$.

§ 112. Pág. 304.

1. *a*) $z = \frac{1}{2}yx^2 + \varphi(y)x + \Psi(y)$.
b) $z = \varphi(y) + \Psi(2x - 3y)$. INDIC.: Una integral primera es $3p + 2q = \varrho(y)$, ϱ función arbitraria.

2. *a*) $r - (t/c^2) = 0$; *b*) $3r + s - 2t = 0$; *c*) $s - p - q + z = 0$.

3. De $z = \alpha x + \varphi(\alpha)y + \Psi(\alpha)$ resulta $q = \varphi(p)$ y de aquí se elimina φ derivando nuevamente respecto de x y respecto de y.

4. *a*) $z = \varphi(y)e^{-2x} + 2x^2y - 2xy + \Psi(y)$. INDIC.: Resolver primero la ecuación en $q = z_y$.
b) $z = e^x\ \varphi(y-x) + \Psi(y)$. INDIC.: $p_x + p_y = p$, y § 110, ejercicio 6.

5. $z = \varphi(y) + e^x\,\Psi(y-x) + e^{2y}\,\varrho(x)$.

7. De $(D_x + hD_y + k)(D_x + hD_y + k)z = 0$ (°), poniendo $(D_x + hD_y + k)z = u$ (°°) resulta $(D_x + hD_y + k)u = 0$ de donde (§ 112-3, a_1) $u = e^{-kx}\varphi(y - hx)$ y entonces por (°°) $p + hq = e^{-kx}\varphi(y-hx) - kz$. El sistema característico
$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{h} = \frac{dz}{e^{-kx}\varphi(y-hx) - kz},$$
da $y - hx = \alpha$ (°°°), y entonces: $(dz/dx) + kz = e^{-kx}\varphi(\alpha)$ cuya solución es $z = e^{-kx}[x\varphi(\alpha) + \beta]$. Poniendo aquí (§ 111-3) $\beta = \Psi(\alpha)$ y reemplazando α por (°°°) se llega al resultado.

8. *a*) $z(x,y,0) = 1$, $z_h(x,y,0) = x$, $z_{hh}(x,y,0) = x^2 + 2y$, $z_{hhh}(x,y,0) = x^3 + 6xy$;
b) Calcúlese $(\partial^n z/\partial h^n)_0$ mediante desarrollo en serie de potencias de h y comparación con la serie de MAC-LAURIN.

9. *a*) La ecuación $P(h, k) = 0$ (§ 112-3, a_2) es $(Lh + R)(Ch + G) = k^2$; para cada h hay dos valores opuestos de k, reales para los h indicados;
b) Resulta $k = \pm(\beta + i\nu)$, y ondas de la forma:
$$z = A\, e^{-\alpha t \pm \beta x} \operatorname{sen}(\omega t \pm \nu x + \varphi).$$

10. *a*) $z = \varphi(x + y) + \Psi(x + 2y)$;
b) $z = \varphi(y + x) + \Psi(y - x) + x\chi(y - x)$;
c) $z = \varphi(y + x + 2ix) + \Psi(y + x - 2ix)$.

13. $z = \varphi(y + x) + \Psi(y - x) + [(x^3 y - xy^3 - y^4)/12]$.

14. $z = \varphi(y + 2x) + e^{-y}\Psi(y + x) - (xy + \frac{1}{2}y^2)e^{-y}$.

15. $z = \cos(x + 2y) - \operatorname{sen}(x + 2y)$.

16. $z = \varphi(y)e^{yx} + \Psi(y)e^{2yx} + [e^{2x-y}/(y - 1)]$.

17. *a*) $z = e^{-sx-ty}[\varphi(x) + \Psi(y)]$;
b) $z = e^{-sx}\varphi(y) + e^{-ty}\Psi(x)$, equivalente a la anterior;
c) $(D_1^2 + 2D_2^2 + 1)^{-1} x^2 y = (1 - D_1^2 - 2D_2^2 + \ldots)x^2 y =$
$= x^2 y - 2y$; $(D_1^2 + 2D_2^2 + 1)^{-1} e^{2x-y} . xy =$
$= e^{2x-y}[(D_1 + 2)^2 + 2(D_2 - 1)^2 + 1]^{-1} xy =$
$= e^{2x-y}(7 + 4D_1 - 4D_2 + \ldots)^{-1} xy =$
$$= e^{2x-y}\left(\frac{1}{7} - \frac{4}{49}D_1 + \frac{4}{49}D_2 - \frac{32}{343}D_1D_2 + \ldots\right)xy =$$
$$= e^{2x-y}\left(\frac{xy}{7} - \frac{4y}{49} + \frac{4x}{49} - \frac{32}{343}\right);$$
la suma es una solución particular.

18. Si $z = T(t) . R(r)$ resulta $T''/(c^2T) = [R'' + (R'/R)]/R = -\mu^2$, que da (Cap. XXVII, nota I):
$$T = A\cos\mu ct + B\operatorname{sen}\mu ct;$$
$$R = C\,J_0(\mu r) + D\,Y_0(\mu r),$$
y es $B = 0$ por la segunda condición inicial, $D = 0$ por la singularidad de Y_0 en el origen, y μ un cero α_n de J_0, por la condición de contorno. Entonces: $z = C_n \cos\alpha_n ct.\ J_0(\alpha_n r)$, y la primera condición inicial se cumple por la solución en serie
$$u = \sum C_n \cos\alpha_n ct\, .\, J_0(\alpha_n r)$$
si los coeficientes C_n son tales que $\sum C_n\, .\, J_0(\alpha_n r) = f(r)$.

§ 113. Pág. 322.

Derívese sucesivamente la ecuación de la catenoide y verifíquese idénticamente en y, z, la ecuación de Euler.

§ 113. Pág. 326.

1. $y'/\sqrt{1 + y'^2} = C$, $y' = C\sqrt{1 - C^2} = m$ (constante);
recta $(y - b_1)/(b_2 - b_1) = (x - a_1)/(a_2 - a_1)$.

3. *a*) $\left(\int_{a_1}^{a_2} y' \mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_{a_1}^{a_2} y' g\, .\, g^{-1}\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant I[y]\, .\int_{a_1}^{a_2} g^{-2}(x)\,\mathrm{d}x.$

4. *a*) $y = C_1(x^{1-n} - a_1^{1-n}) + C_2$, si $n \neq 1$;
$y = C_1(\ln x - \ln a_1) + C_2$, si $n = 1$;
b) Diverge la integral [113-30] para C_2.

5. $y = C_1(x - C_2)^{p/(p+q)}$ si $p + q \neq 0$;
$\ln y = C_1 x + C_2$ si $p + q = 0$.

6. Por el principio de Fermat (§ 113-5, *c*), $T = \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)}\,\mathrm{d}x =$

$=$ extremo, $[\mathrm{v}(x,y)y''/(1+y'^2)] - \mathrm{v}_x(x,y)\,.\,y' + \mathrm{v}_y(x,y) = 0$.

7. Es $\mathrm{U} = \mathrm{const.}$ y puede tomarse $\mathrm{U} = 0$; por el principio de conservación de la energía es $\mathrm{L} + \mathrm{U} = \mathrm{L} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)^2 = \mathrm{const.}$, de donde $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \mathit{const.} = v_0$ (velocidad inicial). Entonces el principio de HAMILTON conduce a las extremales de

$$\int_{t_0}^{t_1}(\mathrm{L}-\mathrm{U})\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{L}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\,v_0^2\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,v_0\int_{t_0}^{t_1}v_0\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\,v_0\int_{s_0}^{s_1}ds,$$

que son las geodésicas.

8. Como la partícula que describe la geodésica tiene velocidad de módulo constante, su aceleración α sólo tiene componente centrípeta $\parallel$ n; por otra parte es a $\parallel$ fuerza (única) de vínculo $\parallel$ **m** por no haber rozamiento en la superficie.

C. XXVIII-V, pág. 354.

1. Basta integrar por partes dos veces.

§ 114. Pág. 415.

1. Si $\mathrm{f}(z) = u + iv$ es analítica y $u = \mathrm{const.}$, de las ecuaciones características [114-7] sigue $v = \mathrm{const.}$ de donde $\mathrm{f}(z) = \mathrm{const.}$ Si $\mathrm{f}(z)$ tiene módulo constante, la función analítica $\varphi(z) = \ln \mathrm{f}(z) = \ln|\mathrm{f}(z)| + i\arg \mathrm{f}(z)$ tendrá parte real constante, con lo que se reduce a una constante y lo mismo ocurre entonces con $\mathrm{f}(z)$.

2. Si $\mathrm{f}(z) = u + iv$, $\mathrm{g}(z) = \mathrm{U} + i\mathrm{V}$, $\mathrm{f}\,.\,\mathrm{g} = p + iq$, es $p = u\mathrm{U} - v\mathrm{V}$, $q = u\mathrm{V} + v\mathrm{U}$, y se verifica que si los pares u, v y U, V satisfacen [114-7], lo mismo ocurre con el par p, q. De $\mathrm{f}[\mathrm{g}(z)] = \mathrm{u}(\mathrm{U},\mathrm{V}) + i\mathrm{v}(\mathrm{U},\mathrm{V})$ sigue

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \mathrm{U}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \mathrm{V}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \mathrm{U}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \mathrm{V}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\;;\ \text{etc.}$$

5. 1º) Si $z = x + iy$, $\beta = b_1 + ib_2$, (°) se escribe $p(x^2+y^2) + b_1x - b_2x + q = 0$; 2º) Reemplazando en (°) la expresión $z = (-dw + b)/(cw - a)$ que resulta de [114-14], se obtiene una ecuación de forma anóloga a (°) $2p_1w\overline{w} + \beta_1 w + \overline{\beta}_1\overline{w} + 2q_1 = 0$, donde p_1, q_1 son reales y si $\beta\overline{\beta} > 4pq$, es $\beta_1\overline{\beta}_1 > 4p_1q_1$.

6. Si z y z_1 son inversos respecto de la circunferencia (°) (ejercicio 5), es $2\,p\,z_1\overline{z}_1 + \beta z + \beta_1\overline{z}_1 + 2\,q = 0$. También se obtiene la propiedad enunciada de la conservación de los ángulos y de las circunferencias, observando que dos puntos inversos (simétricos) respecto de una circunferencia (recta) son puntos base de un haz de circunferencias ortogonales a esta circunferencia (recta).

7. 1º) La transformación que hace corresponder a los puntos a y $1/\overline{a}$ inversos respecto de $|z| = 1$, los puntos 0, ∞, inversos respecto de $|w| = 1$, es $w = \lambda(z - a)/[z - (1/\overline{a})] = \lambda\overline{a}(z - a)/(\overline{a}z - 1)$ y como para $|z| = 1$ es $|z - a| = |-\overline{z}|\,.\,|z - a| = |a\overline{z} - 1| = |\overline{a}z - 1|$, para que sea entonces $|w| = 1$ debe ser $|\lambda\overline{a}| = 1$.

8. A los puntos simétricos a y $\overline{a}$ deben corresponder los inversos 0, ∞; entonces: $w = \lambda(z - a)/(z - \overline{a})$, y como para z real es $|z - a| = |z - \overline{a}|$ debe ser $|\lambda| = 1$.

10. *b*) $w = i(1 - z)/(1 + z)$.

12. 1º) Raíces, finitas o no, de la ecuación $cz^2 + (d - a)z - b = 0$; 2º) $(z_1, z_2, z_3, z) = (z_1, z_2, w_3, w)$; 3º) $\varphi(z) = (z - z_1)/(z - z_2)$, o bien $\varphi(z) = z - z_1$ si $z_2 = \infty$; 4º) $\Psi(z) = 1/(z - z_1)$.

14. Considérese en los transformados de $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, (x, y) la distancia del último a los anteriores.

16. Se tiene (fig. 493, con $OR = 1$): $OP_1/OR = OP_1/ON = \operatorname{tg}\varphi = ON/OP'_1 = OR/OP'_1$ de donde $OP_1 . OP'_1 = OR^2 = 1$.

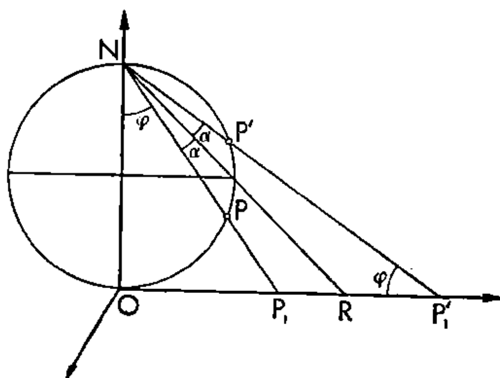


Fig. 493.

§ 115. Pág. 436.

1. Las integrales sobre las semicircunferencias de radios ϱ y R tienden a $-\pi i$ y a 0 para $\varrho \to 0$, $R \to \infty$. En la primera descompóngase al integrando en $(1/z) + (e^{iz} - 1)/z$ donde el segundo término tiene límite i para $z \to 0$ y por tanto está acotado; en la segunda integral acótese el módulo de la integral por la integral del módulo (§ 115-5, *b*).

2. La integral sobre el arco $Re^{i\varphi}$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha)$ tiende a cero para $R \to \infty$. En la integral sobre el rayo de argumento α se separan partes real e imaginaria.

4. Hay que probar, en base a la relación $|e^t| = e^{R(t)}$, que las integrales sobre los lados verticales tienden a cero para $p \to \infty$.

6. Aplíquese § 115-6, *b*, a la integral sobre el contorno de $|z| < R$, $y > 0$ donde la semicircunferencia $|z| = R$, $y > 0$ no pasa por ninguna singularidad, y obsérvese que la integral sobre ella tiende a 0 cuando $R \to \infty$ por la acotación de $|f(z)|$.

7. *b*) $a^2 I = J = \pi\sqrt{2}/2$; $K = (\pi/4^n)[(2n)!/(n!)^2]$.

10. La serie converge uniformemente en todo semiplano $x > 1 + \delta$, $(\delta > 0)$.

§ 117. Pág. 453.

3. Poniendo $\varphi(z)/f(z) = h(z)$, se tiene:

$$N_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z) + \varphi'(z)}{f(z) + \varphi(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f' + f'h + fh'}{f(1 + h)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{f'}{f} + \frac{h'}{1 + h}\right) dz = N_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{h'dz}{1 + h} = N_1.$$

5. Sea $|z - z_0| \leqslant r$ un círculo Γ contenido en G y tal que $f(z)$ no tenga ceros en su contorno C: $|z - z_0| = r$. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y un entero n_0 tales que $|f(z)| \geqslant \varepsilon$ en C, $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para $n > n_0$, en C, y se aplica el teorema de ROUCHÉ a $f_n(z) = f(z) + \{f_n - f\}$.

6. De lo contrario habría en G dos puntos $z_1 \neq z_2$ con $f(z_1) = f(z_2) = \alpha$ y se aplica a la sucesión $f_n(z) - \alpha$ el teorema de HURWITZ.

§ 118. Pág. 465.

1. 2º) Polos $z = \pm ik$ con residuos $(1/2)e^{\pm k}$ respectivamente.

3. Si $z = R$ no fuera singular, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\tfrac{1}{2} R)(z - \tfrac{1}{2} R)^n$$

tendría radio de convergencia $R' > \frac{1}{2} R$; por (°) la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\tfrac{1}{2} Re^{i\varphi})(z - \tfrac{1}{2} Re^{i\varphi})^n$$

tiene radio $\geqslant R'$. Como esto vale para todo φ, $f(z)$ no tendría singularidades en $|z| = R$.

4. $$f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^{n+1}} = z + \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^{2^n} = z + f(z^2) =$$

$= z + z^2 + f(z^4) = \ldots$, y entonces hay singularidades en $z = 1$, $z^2 = 1$ ($\therefore z = \pm 1$), $z^4 = 1$ ($\therefore z = \pm 1, z = \pm i$), ..., y estos puntos forman un conjunto denso en $|z| = 1$.

5. *a*) Es

$$f(z) = \frac{k_1}{1 - ze^{-i\alpha}} + \ldots + \frac{k_h}{1 - ze^{-ih}} + g(z)$$

donde $g(z)$ es regular para $|z| < 1 + p$, $(p > 0)$, y entonces $g(z) = \sum b_n z^n$ con $b_n = o(1)$.

b) $f^{(p-1)}(z)$ tiene a lo más polos simples en el contorno, y entonces por *a*:

$$n(n-1)\ldots(n-(p-2))a_n = O(1) \therefore a_n = O(n^{p-1}).$$

6. Por § 43-5, *b*, es en $|z - z_0| < r$, $F(z)$ holomorfa, luego desarrollable en serie de TAYLOR, siendo el coeficiente de $(z - z_0)^r$:

$$F^{(r)}(z_0)/r! = \textstyle\sum_n f_n^{(r)}(z_0)/r! = \sum_n a_r^{(n)} = A_r.$$

8. *a*) $\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^2} = 0;$

b) $\lim_{z \to n\pi} (z - n\pi) \dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z \cdot \operatorname{sen} z} = \lim_{z \to n\pi} \dfrac{z - n\pi}{\operatorname{sen} z} = \ldots = (-1)^n;$

c) Basta la acotación de $\operatorname{cosec} z$:

*c*₁) Para la parte del contorno de C_n contenida en el semiplano $I(z) > \delta > 0$:

$$\operatorname{cosec} z = \left| \frac{2}{e^{iz} - e^{-iz}} \right| \leqslant \frac{2}{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}},$$

pues $|e^{iz} - e^{-iz}| \geqslant ||e^{iz}| - |e^{-iz}|| = |e^{-y} - e^{y}|$,

y análogamente para la parte contenida en el semiplano $I(z) < -\delta$;

*c*₂) En las partes de los contornos de los C_n contenidos en la faja $-\delta \leqslant I(z) \leqslant +\delta$, la acotación resulta de la regularidad y periodicidad de $\operatorname{cosec} z$.

13. Aplíquese la expresión dada en Caso 1º de § 118-6, *a*, demostrando que entonces el orden coincide con el grado de polinomio g(z) y, por tanto, es entero.

14. *a*) Es corolario de ejercicios 12 y 13; *b*) Utilizar la expresión de Caso 2º de § 118-6, *a*.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS, NOTACIONES Y ABREVIATURAS

E_1
Recta euclídea, 94-1.

X
Conjunto puntual, 94-1.

I
Intervalo, 94-1.

$f_X(x)$
Función característica del conjunto X, 94-1.

$$e(X) = (R)\int_I f_X(x)\,dx$$
Medida (R) o medida de PEANO-JORDAN de X, 94-1.

$$\bar{e}(X) = \overline{\int_I} f_X(x)\,dx$$
Extensión exterior de X, 94-1.

$$\underline{e}(X) = \underline{\int_I} f_X(x)\,dx$$
Extensión interior de X, 94-1.

$$|I| = b - a \;;\; |I| = \prod_r (b_r - a_r)$$
Medida elemental del intervalo I, 94-1.

Conjuntos (B)
Conjuntos de BOREL, 94-1.

G
Conjunto abierto, 94-1; 94-2*b*.

F
Conjunto cerrado, 94-1; 94-2*b*.

Conjuntos (L)
Conjuntos medibles LEBESGUE, 94-1.

G_δ
Conjunto seudo-abierto, 94-1.

F_σ
Conjunto seudo-cerrado, 94-1.

$(\geqq)$
Comprende a, 94-1; 1-1.

$(\leqq)$
Contenido en, 94-1; 1-1.

E
Espacio topológico; espacio métrico, 94-1.

H
Familia infinitamente aditiva de conjuntos, 94-1.

B
Familia de conjuntos (B), 94-1

E_m
Espacio euclídeo de m dimensiones, 94-2*a*.

x
Punto de E_m, 94-2*a*.

CF
Complemento del conjunto F, 94-2*b*.

$\frown$
Intersección, 94-2, *b*; I-I.

$\smile$
Unión, 94-2, *b*; I-I.

$$\varrho(A,B) = \operatorname{extr\,inf.}_{a \epsilon A,\, b \epsilon B} \varrho(a,b)$$
Distancia entre dos conjuntos A y B, 94-2*c*.

$\varrho(a, B)$
Distancia del punto a al conjunto B, 94-2*c*.

$$d(B) = \operatorname{extr\,sup}_{b_1,\, b_2\, \epsilon\, B} \varrho(b_1, b_2)$$
Diámetro del conjunto B, 94-2*c*.

$\mu(X)$
Medida exterior métrica de CARATHÉODORY de X, 94-3*a*.

$$m_e(X) = |X| = = \operatorname{extr\,inf}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k|\right\}$$
$$\text{para } X(\leqq) \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$
Medida exterior (L) de X, 94-3*b*.

$\bar{I}$
Clausura del conjunto I, 94-3*b*; 94-1.

$X\varepsilon(\mu)$
Conjunto X medible (μ), 94-4.

$X\varepsilon(L)$
Conjunto X medible (L), o medible, 94-4.

$$m_i(X) = |I| - |I - X|$$
Medida interior (L) de X, 94-4.

$$\mu_i(X) = \underset{X(\geq)BE(\mu)}{\text{extr sup}}\ \mu(B)$$
Medida interior de una medida exterior regular, 94-6.

$$S$$
Cápsula isométrica, 94-6.

$$N$$
Núcleo isométrico, 94-6.

$$\sigma(X)$$
Función infinitamente (finitamente) aditiva de conjunto X sobre H, 94-Ej. 1.

$$\overline{V}(\sigma, X) = \underset{X(\geq)P\in H}{\text{extr sup}}\ \sigma(P)$$
Variación superior de la función de conjunto σ, aditiva sobre H, en X, 94-Ej. 5.

$$\underline{V}(\sigma, X) = \underset{X(\geq)P\in H}{\text{extr inf}}\ \sigma(P)$$
Variación inferior de la función de conjunto σ, aditiva sobre H, en X, 94-Ej. 5.

$$\overline{\mu}$$
Completada de la medida μ, 94-Ej. 14.

$$(L)\int_X f(x)\,dx$$
Integral (L) de f(x) sobre X, 95-1*a*, *b*.

$$(R-C)\int_0^{+\infty} \mu(y)\,dy$$
Integral (R - C) de $\mu(y)$, 95-1*a*; 80-1.

$$X^+$$
Conjunto donde $f(x) \geqslant 0$, 95-1*b*.

$$X^-$$
Conjunto donde $f(x) < 0$, 95-1*b*.

$$f_K(x)$$
Función truncada por K, 95-1*d*.

c. t. X
Casi todo X, 95-2.

equivalentes (L)
Funciones casi iguales en X, 95-2.

Integral (R)
Integral de RIEMANN, 95-2; 82-1; 83-1; 49-1.

$$E(x)$$
Función escalonada, 95-3.

[c. p. en $X - X_0$]
Convergencia puntual en $X - X_0$, 95-4.

[c. p. en c. t. X]
Convergencia puntual en casi todo X 95-4.

[c. u. en $X - X_\delta$]
Convergencia uniforme en $X - X_\delta$, 95-4.

[c. e. u. en X]
Convergencia esencialmente uniforme en X, 95-4.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\ f_n(x)$$
Límite inferior aritmético, 95-4; 20-5.

$$\overline{\int_I} f(x)\,dx$$
Integral superior de DARBOUX, 95-4; 49-2.

$$\underline{\int_I} f(x)\,dx$$
Integral inferior de DARBOUX, 95-4; 49-2.

$$V_a^b F(x) = \int_a^b |f(x)|\,dx$$
Variación total de la función integral F(x) de f(x), 95-5*b*; 55-9.

$$\Delta_i = F(b_i) - F(a_i)$$
Incremento de F en $[a_i, b_i]$, 95-5*b*.

$$H(x)$$
Función singular, 95-5*b*.

$$\Phi(x) \text{ con } \Phi'(x) = f(x)$$
Primitiva de f(x), 95-5*c*; 50-1*b*.

$$[\quad]_a^b$$
Aplicación de la regla de BARROW, 95-6*a*; 50-2*a*.

$$R\text{-}St\int$$
Integral de RIEMANN-STIELTJES, 95-6*a*; 78-1.

$$L\text{-}St\int$$
Integral de LEBESGUE-STIELTJES, 95-6*b*; XXIV-II*b*.

$$(S)\int$$
Definición de SAKS de la integral (L), 95-Ej. 4.

$$(C)\int$$
Definición de CARATHÉODORY de la integral (L), 95-Ej. 4.

$$(E)\int$$
Definición de F. RIESZ de la integral (L), 95-Ej. 5.

$$f^+(x)$$
Máx $\{f(x), 0\}$, 95-Ej. 14.

$$f^-(x)$$
Máx $\{-f(x), 0\}$, 95-Ej. 14.

$\mathrm{g}(x)$, $\mathrm{g}(\mathbf{x})$
Función de repartición o distribución en una medida de LEBESGUE-STIELTJES, XXIV-I*a*.

$\mu_p(\mathrm{X})$
Medida exterior *p*-dimensional de HAUSDORFF del conjunto X, XXIV-I*b*.

dim (X)
Dimensión (real, de HAUSDORFF) de X, XXIV-I*b*.

$\mathbf{u}$
Elemento modular de una operación & de grupo XXIV-I*c*.

$\mathbf{x}^{-1}$
Elemento inverso del x, XXIV-I*c*.

y & X
Traslación izquierda de X por y, XXIV-I*c*.

X & y
Traslación derecha de X, por y, XXIV-I*c*.

X & Y
Conjunto de elementos x & y con $x \epsilon X$, $y \epsilon Y$, XXIV-I*c*.

X^{-1}
Conjunto de elementos x^{-1} con $x \epsilon X$, XXIV-I*c*.

(U : G)
Número mínimo finito de traslaciones izquierdas de G que cubren $\overline{\mathrm{U}}$, XXIV-I*c*.

$\tau_0(\mathrm{U}) = (\mathrm{U:G})/(\mathrm{U_0:G})$
"Tamaño" de U respecto de $\mathrm{U_0}$, XXIV-I*c*.

$\tau = \operatorname{limg}_n \tau_n$
Límite generalizado de S. BANACH, XXIV-I*c*.

$\mathrm{p}(\{\tau_n\})$
Promedio generalizado generador de una medida elemental de HAAR, XXIV-I*c*.

$\tau(\mathrm{U})$
Medida elemental generatriz de una medida de HAAR, XXIV-I*c*.

$(\mathrm{L\text{-}St})\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{dg}(x)$
Integral de LEBESGUE-STIELTJES, XXIV-II*b*.

Integral (H - L - S)
Integral de HILDEBRANDT, LEBESGUE, STIELTJES, XXIV-II*b*₂.

Integral ($\mathrm{R^s}$)
Integral absoluta y condicional de REY PASTOR, XXIV-II*c*, *d*₂.

Punto (H)
Punto HARNACK o de no sumabilidad, XXIV-II*d*₁.

$(\mathrm{L\text{-}Ha})\int_{\mathrm{I}} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$
Integral de LEBESGUE-HARNACK, XXIV-II*d*₁.

Integral (L - C)
Integral de LEBESGUE-CAUCHY, XXIV-II*d*₁.

Integral (R - Ha)
Integral de RIEMANN-HARNACK, XXIV-II*d*₁.

$(\mathrm{L\text{-}Hö})\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$
Integral de LEBESGUE-HÖLDER, XXIV-II*d*₃.

$(\mathrm{D})\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$
Integral de DENJOY, XXIV-II*d*₄.

Integral (D - K - Y)
Integral de DENJOY, KHINTCHINE, YOUNG, o total general, XXIV-II*d*₅.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$
Representación analítica de una curva, 72-6*a*, XXIV-III*a*.

$\mathrm{L(C)} = \mathrm{L}(\mathrm{I_0}, \mathbf{r})$
Longitud de una F-curva C, XXIV-III*a*₁.

Γ
Huella de una curva C, XXIV-III*a*₂.

$\delta(\mathrm{S_1}, \mathrm{S_2})$
Distancia de FRÉCHET-MC SHANE de dos F-superficies $\mathrm{S_1}$, $\mathrm{S_2}$, XXIV-III*b*₂.

$\mathrm{T(R)} = \Gamma$
Representación de una F-superficie S en su huella Γ, XXIV-III*b*₂.

$\mathrm{T_1} \sim \mathrm{T_2}(ts)$
Topológicamente similar, 72-9*c*, XXIV-III*b*₂.

$\mathrm{S}_n \to \mathrm{S}$
Convergencia de la sucesión S_n de F-superficies a S, XXIV-III*b*₂

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v)\,\varepsilon\,\mathrm{R_0}$
Representación analítica de una superficie, 72-7*a*, XXIV-III*b*₃.

P
Superficie poliedral, XXIV-III*b*₃.

$\mathrm{E(P)} = \sum_{s=1}^{n} |\tau_s|$
Área elemental de la poliedral P, XXIV-III*b*₃.

$\mathrm{A(S)} = \operatorname{extr}_{\mathrm{P}_n} \inf\{\liminf \mathrm{E}(\mathrm{P}_n)\}$
Área de LEBESGUE de la superficie S, XXIV-III*b*₃.

VAT_u en R
Variación acotada según TONELLI respecto de *u* en R, XXIV-III*b*₄.

$c_n = \mathbf{f} \cdot \varphi_n$
Coordenadas, coeficientes de FOURIER o componentes de f respecto de $\{\varphi_r\}$, 97-1.

s. F. de f
Serie de FOURIER de la función f, 97-1, 98-1.

$\sim$
Determinación de una función por su s.F., 97-1; por su integral de FOURIER, 99-2.

$s_n = c_0\varphi_0 + \ldots + c_n\varphi_n$
Suma parcial de la s. F. de f, 97-2.

$(\mathbf{f} - s_n)^2$
Error cuadrático de s_n, 97-2.

$\mathbf{f}_n \overset{2}{\rightarrow} \mathbf{f}$
Convergencia cuadrática, 97-3.

$\overset{2}{=}$
Desarrollo cuadrático en serie, 97-3.

P_n
Polinomio de LEGENDRE, 97-5; XVI-III.

$p^2(x)$
Núcleo de un sistema $\{\varphi_r\}$, 97-8.

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{a.b}{1.c}\, x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c.(c+1)}\, x^2 + \ldots$$
Función hipergeométrica, serie hipergeométrica o de GAUSS, 97-9.

$G_n(x) = F(-n,\ p+n,\ q,\ x)$
Polinomios de GAUSS-JACOBI, 97-9; 97-12.

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} F[-n,\ n,\ \tfrac{1}{2},\ (1-x)/2]$$
Polinomios de CHEBICHEV de 1ª especie, 97-9; 97-12.

$$U_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} F[-n,\ n+2,\ 3/2,\ (1-x)/2]$$
Polinomios de CHEBICHEV de 2ª especie, 97-9, 97-12.

$L_n(x) = e^x D^n (x^n e^{-x})$
Polinomios de LAGUERRE, 97-11; 97-12.

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2}$
Polinomios de HERMITE, 97-11; 97-12.

$n^{(2r} = n(n-1) \ldots (n-2r+1)$
Factorial generalizada, 97-12.

$$\varrho(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \left\{\int_a^b |\mathbf{f} - \mathbf{g}|^p dx\right\}^{1/p}$$
Distancia de orden p, 97-Ej. 1.

$$\mathbf{f}(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} x + \ldots$$
Serie trigonométrica de FOURIER, 98-1.

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathbf{f}(t) \cos nt\, dt \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathbf{f}(t) \operatorname{sen} nt\, dt \end{cases}$$
Coeficientes de la serie trigonométrica de FOURIER (o coef. de FOURIER) de f, 98-1.

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})u}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}u} \mathbf{f}(x+u)\, du$$
Integral de DIRICHLET, 98-2.

Suma (C)
Suma CESÀRO, 98-5; V-I*g*.

σ_n
Promedio de CESÀRO, 98-5.

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\operatorname{sen}\frac{1}{2}nu)^2}{(\operatorname{sen}\frac{1}{2}u)^2}\, \mathbf{f}(x+u)\, du$$
Integral de FEJÉR, 98-5.

$\lambda_n(u)$
Núcleo de una integral singular, 98-5.

$O(1/n)$
Del orden de $1/n$, 98-Ej. 8; 24-3b_1.

$o(1/n)$
Infinitésimo respecto de $1/n$, 98-Ej. 9; 24-3b_2.

$$\mathbf{f}(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(t) \cos u(x-t)\, dt$$
Integral de FOURIER, 99-2.

$$\begin{cases} a(u) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(t) \cos ut\, dt \\ b(u) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(t) \operatorname{sen} ut\, dt \end{cases}$$
Amplitudes de pulsaciones continuas u, 99-2.

$$S = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(t) \frac{\operatorname{sen} m(x-t)}{x-t}\, dt$$
Integral simple de FOURIER, 99-2.

$$\begin{cases} \mathbf{g}(u) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} \mathbf{f}(t) \cos ut\, dt \\ \mathbf{f}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} \mathbf{g}(u) \cos xu\, du \end{cases}$$
Transformadas de FOURIER por el coseno, 99-3.

$$\begin{cases} h(u) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} ut \, dt \\ f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{\infty} h(u) \operatorname{sen} xu \, du \end{cases}$$

Transformadas de FOURIER por el seno, 99-3.

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-imt} dt$$

Forma compleja de los c. F., 99-4.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iu(t-x)} dt$$

Integral de FOURIER en forma compleja, 99-4.

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iux} du$$

Transformadas de FOURIER en forma compleja, 99-4.

$$f(x) = \frac{2A}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} u\varepsilon \, . \cos ux}{u} du$$

Factor discontinuo de DIRICHLET, 99-5*a*.

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt$$

Densidad espectral, 99-5*b*.

$$f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt$$

Integral de LAPLACE, 99-Ej. 3.

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} \Phi(y) y^{s-1} dy \ ,$$

$$\Phi(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(s) y^{-s} ds$$

Transformación de MELLIN y su inversa, 99-Ej. 4.

$||f||_p$ con $||f||_p{}^p = \int |f(t)|^p dt$, $(p > 1)$

Norma en el espacio (L^p), XXV-I.

(L^p)

Clase de funciones $f(x)$ donde $||f||_p$ existe finita, XXV-I.

p , q

Exponentes conjugados tales que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{XXV-I.}$$

$$|xy| \leqslant ||x||_p \, . \, ||y||_q \ , \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

Desigualdad de HÖLDER, XXV-I.

$$||x + y||_p \leqslant ||x||_p + ||y||_p \ , \ (p > 1)$$

Desigualdad de MINKOWSKI, XXV-I.

$$\frac{dy}{dx} = g(x) h(y)$$

Ecuación diferencial de primer orden, con variables separables, 101-1.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$\Psi\left(\frac{dy}{dx} \ , \ \frac{y}{x}\right) = 0$$

Ecuación homogénea en x, y, 101-2, 102-2*b*.

$$y' + P(x) y = Q(x)$$

Ecuación de primer orden, lineal, 101-4.

R, R

Resistencia eléctrica, 101-4; 108-3.

L, L

Auto-inducción eléctrica 101-4; 108-3.

E, E

Fuerza electromotriz, 101-4; 108-5 a_2.

$I(t)$, I

Intensidad de corriente eléctrica, función del tiempo t, 101-4; 108-3.

$$y' + P(x) y = Q(x) y^n$$

Ecuación de BERNOULLI, 101-5*a*.

$$y' = A(x) y^2 + B(x) y + C(x)$$

Ecuación de RICCATI, 101-5*b*.

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$
$$\text{con } P_y = Q_x$$

Ecuación diferencial exacta, 101-6.

T

Temperatura absoluta, 101-7*a*.

p

Presión de un gas, 101-7*a*.

v

Volumen de un gas, 101-7*a*.

R

Constante de los gases perfectos, 101-7*a*.

c_p

Calor específico a presión constante, 101-7*a*.

c_v

Calor específico a volumen constante, 101-7*a*.

ΔQ

Incremento de cantidad de calor Q, 101-7*a*.

S

Entropía, 101-7*a*.

$\mu(x, y)$

Factor integrante, 101-7*a*, *b*.

$$\varphi(x, y') = 0 \ ; \ \Psi(y, y') = 0$$

Ecuaciones de 1er. orden donde falta una variable, 102-2*a*.

$$\mathrm{W}(x) = \mathrm{W}(x, u_1, \ldots, u_n)$$
Wronskiano, 107-1; 68-4.

$$y^{(n)} + \mathrm{f}_1 y^{(n-1)} + \ldots + \mathrm{f}_{n-1} y' + \mathrm{f}_n y = \mathrm{f}(x)$$
Ecuación lineal completa, 107-2.

$$\mathrm{L}(y) = y'' + \mathrm{f}_1(x) y' + \mathrm{f}_2(x) y''$$
Expresión diferencial lineal homogénea de 2º orden, 107-4b, XXVII-IIIa.

$$\Gamma(x, \xi)$$
Solución fundamental de $\mathrm{L}(y) = 0$ correspondiente a ξ, 107-4b.

$$\dot{x} \quad , \quad \dot{y}$$
Fluxiones de NEWTON, 107-6b; VIII-I.

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$
Ecuación de CAUCHY, 107-Ej. 5.

$$x(x-1) y'' + (ax+b) y' + cy = 0$$
Ecuación hipergeométrica, 107-Ej. 12.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = \mathrm{f}(x)$$
Ecuación lineal de coeficientes constantes, 108-1, 4, 6, 8, 9.

$$C$$
Capacidad de un condensador, 108-3.

$$Q$$
Carga eléctrica, 108-3.

$$\Omega_0$$
Pulsación límite en la descarga oscilante de un condensador, 108-3.

$$\mathrm{P}_k(x)$$
Polinomio de grado k, 108-4.

$$\omega_0$$
Pulsación de resonancia, 108-5b₂.

$$\mathrm{D}$$
Operador de derivación, 108-8.

$$\mathrm{p}(\mathrm{D})$$
Operador polinómico de derivación, 108-8a.

$$(\mathrm{D} - r)^h$$
Factor múltiple del operador polinómico de derivación, 108-8b.

$$\frac{dx}{\mathrm{X}(x,y,z)} = \frac{dy}{\mathrm{Y}(x,y,z)} = \frac{dz}{\mathrm{Z}(x,y,z)}$$
Forma simétrica de un sistema de ecuaciones de 1er. orden, 109-1a.

$$\begin{cases} y' = \mathrm{p}_{11}(x) y + \mathrm{p}_{12}(x) z \\ z' = \mathrm{p}_{21}(x) y + \mathrm{p}_{22}(x) z \end{cases}$$
Sistema homogéneo de ecuaciones lineales de 1er. orden, 109-2a.

$$s$$
Abscisa curvilínea, 109-2a; 73-1.

$$\mathbf{t} = t_1 \mathbf{i} + t_2 \mathbf{j} + t_3 \mathbf{k}$$
Vector tangente, 109-2a; 73-1.

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{i} + n_2 \mathbf{j} + n_3 \mathbf{k}$$
Vector normal principal, 109-2a; 73-3.

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$$
Vector binormal, 109-2a, 73-3.

$$\varrho(s)$$
Radio de curvatura de flexión, 109-2a; 73-4.

$$\tau(s)$$
Radio de curvatura de torsión, 109-2a; 73-4.

$$\begin{cases} y' = \mathrm{p}_{11}(x) y + \mathrm{p}_{12}(x) z + \mathrm{q}_1(x) \\ z' = \mathrm{p}_{21}(x) y + \mathrm{p}_{22}(x) z + \mathrm{q}_2(x) \end{cases}$$
Sistema no-homogéneo de ecuaciones lineales de 1er. orden, 109-2b.

$$m$$
Masa del punto móvil, 109-5.

$$\mathbf{a} = x'' \mathbf{i} + y'' \mathbf{j} + z'' \mathbf{k}$$
Aceleración del punto móvil, 109-5.

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \begin{cases} mx'' = \mathrm{X}(t; x, y, z, x', y', z') \\ my'' = \mathrm{Y}(t; x, y, z, x', y', z') \\ mz'' = \mathrm{Z}(t; x, y, z, x', y', z') \end{cases}$$
Ecuación fundamental de la Dinámica, 109-5.

$$\mathbf{F} = \mathrm{X}\mathbf{i} + \mathrm{Y}\mathbf{j} + \mathrm{Z}\mathbf{k}$$
Fuerza aplicada al punto móvil, 109-5.

$$g$$
Aceleración de la gravedad, 109-5.

$$k$$
Constante de gravitación, 109-5.

$$\mathrm{M}$$
Masa del sol, 109-5.

$$p$$
Parámetro de la ecuación focal de una cónica, 109-5.

$$e$$
Excentricidad de una cónica, 109-5.

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{r^2}{x^2}\right) y = 0 \ , \ r \geqslant 0$$
Ecuación diferencial de BESSEL, XXVII-Ia.

$$\mathrm{J}_r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{r+2k}}{k! \Gamma(r+k+1)}$$
Funciones de BESSEL de primera especie, XXVII-Ib.

$Y_n(x)$
Funciones de BESSEL de segunda especie, XXVII-I*c*.

γ
Constante de EULER o de MASCHERONI, XXVII-I*c*; 22-3*b*.

$Z_r(x)$
Funciones cilíndricas, XXVII-I*d*.

$$\begin{cases} H_r^{(1)}(x) = J_r(x) + iY_r(x) \\ H_r^{(2)}(x) = J_r(x) - iY_r(x) \end{cases}$$
Funciones de BESSEL de tercera especie o funciones de HANKEL, de orden *r*, XXVII-I*e*₃.

$\sim$
Infinitos equivalentes; variables equivalentes, XXVII-I*e*₃; 37-2*a*₄; 24-3*b*₃.

$I_r(x) \equiv i^{-r} J_r(ix)$
Funciones de BESSEL modificadas de primera especie, de orden *r*, XXVII-I*f*.

$$K_r(x) = \frac{(1/2)\pi}{\text{sen } r\pi}[I_{-r}(x) - I_r(x)]$$
Funciones de BESSEL modificadas de segunda especie, de orden *r*, XXVII-I*f*.

$N_r(x)$, $Y_r(x)$, $Y^{(r)}(x)$
Funciones de NEUMANN o funciones de BESSEL de segunda especie de orden *r*, XXVII-I*g*₂.

E
Espacio vectorial o lineal, XXVII-III*a*; II-III*b*₃; XVII-I*a*.

R
Cuerpo escalar (de números reales), XXVII-III*a*.

Γ
Conjunto de condiciones de un problema lineal homogéneo, XXVII-III*a*.

$l_i(u_j, u_j') = 0$
Ecuaciones algebraicas lineales homogéneas, XXVII-III*a*.

$\varrho(x)$
Núcleo de un problema de STURM-LIOUVILLE, XXVII-III*d*.

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \ , \ q = \frac{\partial z}{\partial y} \ , \ p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$$
Derivadas parciales de primer orden, 110-1; 110-5.

$f(x, y, z, p, q) = 0$
Ecuación en derivadas parciales de primer orden, 110-1.

$$P(x, y, z)p + Q(x, y, z)q = R(x, y, z)$$
Ecuación en derivadas parciales, lineal de 1er. orden, 110-1.

$$P_1p_1 + \ldots + P_np_n = 0 \quad [P_i = P_i(x_1, \ldots, x_n)]$$
Ecuación homogénea completamente lineal, 110-5*a*.

$$P_1p_1 + P_2p_2 + \ldots + P_np_n = R \quad [P_i = P_i(x_1, \ldots, x_n, z) \ ; \ R = R(x_1, \ldots, x_n, z)]$$
Ecuación lineal no homogénea, 110-5*b*.

[f, g]
Corchete de POISSON, 111-7; XXVIII-II*b*.

$r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$
Derivadas parciales de segundo orden, 112-1.

$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$
Ecuación en derivadas parciales de 2º orden, 112-1.

$$R(x, y)r + Ss + Tt + Pp + Qq + Zz = F(x, y)$$
Ecuación completamente lineal, 112-2.

$$ar + bs + ct + \alpha p + \beta q + \gamma z = 0$$
Ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes, 112-3.

D_x , D_y
Operadores de derivación parcial, 112-3.

$P(D_x, D_y)$
Polinomio simbólico de derivación parcial, 112-3.

$P(D_x)z = Q(D_y)z$
Ecuación de variables separables, 112-3*b*.

$ar + bs + ct = 0$
Ecuación del tipo de EULER, 112-4.

$P(D_x, D_y)z = f(x, y)$
Ecuación lineal de coeficientes constantes con 2º miembro, 112-5.

τ
Tensión de la cuerda vibrante, 112-6*a*; XXVIII-V*d*.

λ
Densidad lineal de la cuerda vibrante, 112-6*a*.

$$J[y(x)] = \int_a^b f(x, y, y')\,dx$$
Integral a extremar, 113-1*a*.

δy
Variación primera de *y*, 113-2.

Δy
Incremento de *y*, 113-2, 30-1.

$$J(t) = \int_a^b f(x, y + tz, y' + tz')\,dx$$
Integral a extremar como función del parámetro real *t*, 113-2.

$\delta J = tJ'(0)$
Variación primera de la integral J, 113-2.

ds
Diferencial de arco, 113-5*a*; 73-1.

g_{11} , g_{12} , g_{22}
Coeficientes de GAUSS, 113-5*a*; 72-7*b*.

U
Energía potencial, 113-5*c*.

L
Energía cinética o fuerza viva, 113-5*c*.

$\int\int_D$
Integral doble en un dominio, 113-5*d*; 82-3.

$\Delta\Delta z$
Laplaciano del laplaciano Δz, 113-5*d*; 91-6*d*.

$r = \mathrm{r}(x, y)$
Tensión en una membrana placa, 113-5*d*; XXVIII-VIII*a*.

$\varrho(x, y)$
Densidad superficial en una membrana o placa; 113-5*d*; XXVIII-VIII*a*.

$\delta^2(J) = t^2J''(0)$; $\delta^3 J = t^3J'''(0)$;...
Variaciones segunda y sucesivas, 113-6*a*.

rot V
Rotor de los vectores V, XXVIII-1*d*; 91-5.

$$\frac{\overline{d}}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\, p \quad ,$$
$$\frac{\overline{d}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\, q$$
Símbolos especiales de derivación, XXVIII-II*b*.

(f, g)
Paréntesis de POISSON, XXVIII-II*b*.

$$p_{i,s} = \frac{\partial z_i}{\partial x_s} \ , \quad p_{i,s,t} = $$
$$= \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_s\, \partial x_t} \ , \ \ldots$$
Derivadas parciales tomadas como nuevas variables, XXVIII-III*a*.

$$\left(\frac{\partial \Psi_r}{\partial x_s}\right)_x$$
Derivación parcial de función compuesta, XXVIII-III*a*; 67-2.

x^0_s , z^0_t , $p^0_{i,s}$, $p^0_{i,s,t}$, ...
Valores iniciales, XXVIII-III*a*.

$\mathrm{Y}_n(\lambda, \theta)$
Función armónica esférica de superficie, XXVIII-IV; 93-Ej. 20.

$\mathrm{P}_n^r(t)$
Función de FERRERS, XXVIII-IV.

$\varrho(x)$
Densidad lineal de la cuerda vibrante, XXVIII-V*a*.

$\mathrm{r}(x)$
Producto del módulo de elasticidad por la sección de la cuerda vibrante, XXVIII-V*a*.

$k_n^2 = \lambda_n$
Autovalores, XXVIII-V*a*.

$u = \mathrm{u}(x, t)$
Elongación de la cuerda vibrante, 112-6; XXVIII-V*b*.

$\mathrm{h}(x, t)$
Acción de las fuerzas exteriores sobre la cuerda vibrante, XXVIII-V*b*.

$c_n = \mathrm{c}_n(t)$
c. F. de $\mathrm{u}(x, t)$, XXVIII-V*b*.

$h_n = \mathrm{h}_n(t)$
c. F. de $\mathrm{h}(x, t)$, XXVIII-V*b*.

$k = 1/\mathrm{EI}$
Coeficiente de la ecuación de la línea elástica, XXVIII-V*d*.

$\mathrm{V}(x, \xi)$
Deformación en el punto x debida a la carga 1 en el punto ξ, XXVIII-V*d*.

u_n
Derivada según la normal interior n, XXVIII-VI*a*.

Γ
Contorno de un dominio D de variabilidad, XXVIII-VI*a*.

u^*
Solución particular de un problema no-homogéneo, XXVIII-VI*a*$_3$.

$v = u - u^*$
Cambio de función para reducir un problema no-homogéneo a homogéneo, XXVIII-VI*a*$_3$.

$\mathrm{L}_\lambda\,[u]$
Operador generalizado de STURM-LIOUVILLE, XXVIII-VI*b*.

$p(x, y)$
Carga unitaria superficial sobre una membrana, XXVIII-VIII*a*.

$a^2 = r/\varrho$
Coeficiente de la ecuación diferencial de la membrana, XXVIII-VIII*a*.

$\mathrm{G}(x, \xi)$
Función de GREEN, XXVIII-IX*a*.

$\mathrm{G}(x, y, \xi, \eta)$
Función de GREEN en dos variables, XXVIII-IX*b*$_1$.

$$D(u) = \int\int (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy = D[u]$$
Integral de DIRICHLET, XXVIII-IXh_4; XXVIII-X1b.

$$\sigma(\xi, \eta)$$
Punto de contorno en el problema de DIRICHLET, XXVIII-IXh_5.

$$k(x, y, \sigma) = d\theta/d\sigma$$
Núcleo de la ecuación integral equivalente al problema de DIRICHLET, XXVIII-IXh_5.

$$K(s, \sigma)$$
Valor de $k(x, y, \sigma)$ cuando $(x, y) \neq \sigma$ está en el contorno Γ, XXVIII-IXh_5.

$$\mu$$
Angulo de la tangente con el radio vector, XXVIII-IXh_5; 34-7.

$$f[y]$$
Funcional, XXVIII-X1a.

$$Y$$
Espacio campo de variabilidad de una funcional, XXVIII-X1a.

$$\inf$$
Extremo inferior, XXVIII-X1b, 28-14.

$$g = g(\theta)$$
Valores de contorno en el problema de DIRICHLET, XXVIII-X2a; XXVIII-IXh_4.

$$D(u, v) = \int\int r(u_x v_x + u_y v_y)\,dx\,dy\ ;$$
$$E(u, v) = D(u, v) +$$
$$+ \int\int [a(uv)_x + b(uv)_y + quv]\,dx dy\ ;$$
$$D[u] = D(u, u)\ ;\ E[u] = E(u, u)$$
Integrales de tipo DIRICHLET, XXVIII-X2c; b.

$$c$$
Contorno del dominio D en el problema variacional, XXVIII-X2c.

$$I[u]\quad,\quad I(r, t)$$
Integral a extremar, XXVIII-X3a.

$$J[u]\quad,\quad J(r, t)$$
Integral de ligadura, XXVIII-X3a.

$$z = x + iy$$
Variable compleja, 114-1a; 41-1a.

$$|z|$$
Módulo de z, 114-1a; 9-4a.

$$w = w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$
Función compleja de variable compleja, 114-1c; 41-1a.

$$w' = f'(z) = u_x + iv_x$$
Derivada de una función monógena, 114-2a.

$$o(r)$$
Infinitésimo superior a r, 114-2a; 24-3b_2.

$$\text{Arg}$$
Valor principal del argumento, 114-2b; 9-4b.

$$D$$
Dominio de definición de una función, 114-2b.

$$c$$
Arco regular respecto de una función regular $f(z)$, 114-3.

$$\Delta = ad - bc$$
Determinante o módulo de una transformación homográfica, 114-4a.

$$z = \infty$$
Punto impropio o del infinito del plano complejo, 114-5.

$$d$$
Distancia esférica, 114-5.

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$$
Operador de LAPLACE, 114-Ej. 2; 91-6f.

$$I(z)$$
Parte imaginaria de z, 114-Ej. 8; 9-2.

$$P(z)$$
Polinomio en z, 114-Ej. 18.

$$\int_{ab} f(z)\,dz =$$
$$= \int_{ab} (u + iv)\,(dx + idy) =$$
$$= \int_{ab} (udx - vdy) +$$
$$+ i\int_{ab} (vdx + udy)$$
Integral sobre el arco elemental ab del plano complejo, 115-1.

$$G$$
Recinto del plano complejo, 115-2.

$$F(z) = U + iV\ ;$$
$$\int f(z)\,dz = F(z) + C$$
Primitiva de $f(z)$, 115-2a; 115-4c.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$
Integral de una función regular en el campo complejo, 115-2b; 115-4a.

$$\int_C f(z)\,dz$$
Integral sobre C en el campo complejo, 115-2c.

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$
Función integral en el campo complejo, 115-4a.

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz + C$$
Integral indefinida de $f(z)$, 115-4c.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$
Residuo de $f(z)$, 115-6.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt$$
Integral de CAUCHY, 115-7.

$$F(z) = \int_\tau \frac{f(t)}{t-z}dt, \text{ con}$$
τ arco rectificable
Integral de tipo CAUCHY, 115-8.

$F^{(n)}(z_0)$, $f^{(n)}(z)$
Derivada n-ésima en el campo complejo, 115-9b.

a_n
Coeficiente del desarrollo en serie de potencias, 115-10.

$T_n(z)$
Término complementario del desarrollo en serie de potencias, 115-10.

$D_1 \cup D_2$
Unión o suma de los recintos D_1 y D_2, 115-12; I-I.

$D_1 \cap D_2$
Intersección o parte común de los recintos D_1 y D_2, 115-12; I-I.

$\int_0^{\infty}$, $\int_{-\infty}^{\infty}$
Integrales impropias, 115-Ejs. 1 y 3; 80-1 y 3.

$\zeta(z)$
Función zeta de RIEMANN, 115-Ej. 10,22-2b2.

$$\ln z = \int_{\tau(1,z)} \frac{d\zeta}{\zeta}$$
$\ln z = \operatorname{Ln} z + 2k\pi i$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$
$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z| + i \operatorname{Arg} z$ $(-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi)$
$\ln z = \operatorname{Ln}|z| + i \arg z$, $(\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi)$
Función logarítmica y su determinación principal, 116-1a, b; 45-3c.

$P(z|k)$
Punto de una superficie de RIEMANN, 116-1c.

$E(P)$
Entorno de un punto P de una superficie de RIEMANN S, 116-1c.

$\sqrt{z}$, $\sqrt[n]{z}$
Raíces en el campo complejo, 116-2; 10-2.

$\operatorname{arc\,tg} z$, $\operatorname{arc\,sen} z$
Funciones circulares inversas en el campo complejo, 116-Ej. 1 y 2; 45-6.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$$
Residuo de la derivada logarítmica, 117-3.

J
Direcciones de JULIA, 117-4.

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n(z-b)^n + \sum_1^\infty a_{-m}(z-b)^{-m}$$
Desarrollo de LAURENT, 118-1.

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(t)}{(t-b)^{n+1}}dt \\ a_{-n} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(t)\,(t-b)^{n-1}\,dt \end{cases}$$
Coeficientes del desarrollo de LAURENT, 118-1.

$$G_i\left(\frac{1}{z-b_i}\right)$$
Parte principal de una función racional en el polo b_i, 118-4a.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'$$
Omisión del término correspondiente a $n = 0$, 118-4b.

$$\prod_1^\infty$$
Producto infinito, 118-5; XI-III.

$\exp t = e^t$;
$$E_n(v) = \exp\left(v_n + \frac{v_n^2}{2} + \frac{v_n^3}{3} + \ldots + \frac{v_n^p}{p}\right)$$
Abreviatura de una exponencial, 118-6a.

$E(z/a_n)$
$E_n(v)$ para $v_n = z/a_n$, 118-6a.

$\mathbf{v} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j}$
Velocidad en cada punto de un movimiento plano, XXIX-IIa.

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \xi}{dx} + \frac{\partial \eta}{\partial y}$$
Divergencia, XXIX-IIb; 91-3.

$$V(x, y) = C$$
Líneas de corriente de un movimiento plano, XXIX-II*b*.

$$U(x, y) = C$$
Líneas equipotenciales de un movimiento plano, XXIX-II*c*.

$$\text{extr sup} \quad , \quad \text{extr inf}$$
Extremos superior e inferior, XXIX-VIa_2; 23-14.

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$
Función Beta, XXIX-VII*c*.

$$f(p) = L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}F(t)\,dt$$
Transformación de LAPLACE L_I ordinaria, o de primera especie o unilateral, XXIX-VIII*a*.

$$f(p) = L_{II}\{F(t)\} = \int_{-\infty}^\infty e^{-pt}F(t)\,dt$$
Transformación de LAPLACE de segunda especie o bilateral, XXIX-VIII*a*.

$$f(p)$$
Función imagen o transformada de LAPLACE XXIX-VIII*a*.

$$F(t)$$
Función objeto, XXIX-VIII*b*.

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,dG(t)$$
Transformada de LAPLACE-STIELTJES, XXIX-VIII*b*.

$$LS$$
Transformación de LAPLACE-STIELTJES, XXIX-VIII*b*.

$$a$$
Abscisa de convergencia absoluta de la integral de LAPLACE, XXIX-VIII*c*.

$$c$$
Abscisa de convergencia de la integral de LAPLACE, XXIX-VIII*c*.

$$\left\{\begin{array}{ll} c = -\infty & [a = -\infty] \\ c = +\infty & [a = +\infty] \end{array}\right\}$$
La integral de LAPLACE converge [converge absolutamente] en $\left\{\begin{array}{c}\text{todo}\\ \text{ningún}\end{array}\right\}$ punto del plano, XXIX-VIII*c*.

$$1(t) = \left\{\begin{array}{ll} = 0 & \textit{para} \quad t < 0 \\ = 1 & \textit{para} \quad t > 0 \end{array}\right.$$
Función salto unidad o función de HEAVISIDE, XXIX-VIII*d*.

$$L\{1\} \ , \ L\{e^{bt}\} \ , \ L\{\cos \omega t\} \ , \ L\{\operatorname{sen} \omega t\} \ , \ L\{\operatorname{ch} t\} \ , \ L\{\operatorname{sh} t\} \ , \ L\{t^k\} \ , \ L\{1(t-b)\} \ , \ L\{t^n \cdot 1(t-b)\}$$
Ejemplos de transformadas de LAPLACE, XXIX-VIII*d*.

$$u$$
Abscisa de convergencia uniforme de la integral de LAPLACE, XXIX-VIII*e*.

$$F(0^+)$$
Límite a la derecha, XXIX-VIII*g*; 25-4*a*.

$$L\{F^{(r)}(t)\} = p^r L\{F(t)\} - p^{r-1}F(0^+) - \ldots - pF^{(r-2)}(0^+) - F^{(r-1)}(0^+) \quad , \quad (r = 1, 2, 3, \ldots);$$
$$L\left\{\int_0^t F(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{p}L\{F(t)\}$$
Propiedad operacional fundamental, XXIX-VIII*g*.

$$L\{F(at-b) \cdot 1(at-b)\} \ , \quad (a > 0 \ , \ b > 0);$$
$$L\left\{\frac{1}{a}F\left(\frac{t}{a}\right)e^{-\beta t/a}\right\} \ , \quad (a > 0);$$
$$L\{t^n e^{bt}\} \ , \ L\{t^{n+\frac{1}{2}}\} \ , \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$
Transformadas de LAPLACE por cambios lineales de variables, XXIX-VIII*h*.

$$F(t) * G(t) = \int_0^t F(\tau)G(t-\tau)\,d\tau$$
Convolución, producto de composición o plegamiento, XXIX-VIII*j*.

$$L\{F * G\} = L\{F\} \cdot L\{G\}$$
Transformada de LAPLACE de una convolución, XXIX-VIII*j*.

$$L\left\{\int_0^{t-b} F(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{e^{-bp}}{p}L\{F\}$$
Transformada de LAPLACE de una integral, XXIX-VIII*j*.

$$F * G * K$$
Convolución reiterada, XXIX-VIII*j*.

$$L^{-1}\{f(p)\} = F(t)$$
Antitransformada de LAPLACE, XXIX-VIII*l*.

$$\left.\begin{array}{l} L^{-1}\left\{\dfrac{A}{(p-\alpha)^n}\right. \\ L^{-1}\ \dfrac{1}{(p^2+1)^2} \end{array}\right\}$$
Antitransformadas de LAPLACE de funciones racionales, XXIX-VIII*m*.

$$f(x+d) - f(x) = k(d)$$
Ecuación funcional de CAUCHY, Ap. I-*b*.

$\mathrm{f}(x) = \lambda x + h$
Transformación por semejanza de la medida x en la $\mathrm{f}(x)$, Ap. I-*b*.

h
Fijación del origen de medidas, Ap. I-*b*.

λ
Razón de semejanza, Ap. I-*b*.

u
Unidad, Ap. I-*b*.

x
Medida, Ap. I-*b*.

xU
Cantidad de una magnitud escalar de unidad U, Ap. I-*b*.

$U = \lambda \overline{U} \quad , \quad (\lambda > 0)$
Cambio de unidad, Ap. I-*b*.

$\overline{x} = \lambda x \quad , \quad (\lambda > 0)$
Cambio de medida, Ap. I-*b*.

0
Cantidad nula, Ap. I-*c*.

D con $nD = A$
Parte alícuota n-ésima de A, Ap. I-*c*.

$-A$
Opuesta de la cantidad A, Ap. I-*c*.

a
Medida de la cantidad A, Ap. I-*c*.

$x_s = \mathrm{s}(x_1, x_2)$
Medida de una "suma" de cantidades, Ap. I-*c*.

$\mathrm{y}(x_s) = \mathrm{y}(x_1) + \mathrm{y}(x_2)$
Medida regular $\mathrm{y} = \mathrm{y}(x)$ de una suma de cantidades, Ap. I-*c*.

$a_1, a_2, \ldots, a_m$
Exponentes de dimensión, Ap. I-*d*.

$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$
Magnitud nildimensionada, Ap. I-*d*.

kgr
Kilogramo-fuerza, Ap. I-*e*.

mm
Milímetro, Ap. I-*e*.

C S U N
Comisión de Símbolos, Unidades y Nomenclatura, Ap. I-*e*.

I U P A P
Unión Internacional de Física Pura y Aplicada, Ap. I-*e*.

$F \quad , \quad d \quad , \quad t$
Magnitudes físicas (caracteres itálicos), Ap. I-*e*.

cm , s
Unidades (caracteres romanos), Ap. I-*e*.

$\mathrm{d}S \quad , \quad \exp \alpha t \quad , \quad \mathrm{grad}\, V \quad , \quad \mathrm{sen}\, x$
Operadores matemáticos (caracteres romanos), Ap. I-*e*.

$[\mathrm{l}^2\, \mathrm{t}^{-1}\, \mathrm{m}]$
Dimensión, Ap. I-*e*.

pico	$\mathrm{p} = 10^{-12}$
nano	$\mathrm{n} = 10^{-9}$
micro	$\mu = 10^{-6}$
mili	$\mathrm{m} = 10^{-3}$
centi	$\mathrm{c} = 10^{-2}$
deci	$\mathrm{d} = 10^{-1}$
deca	$\mathrm{da} = 10$
hecto	$\mathrm{h} = 10^{2}$
kilo	$\mathrm{k} = 10^{3}$
mega	$\mathrm{M} = 10^{6}$
giga	$\mathrm{G} = 10^{9}$
tera	$\mathrm{T} = 10^{12}$

Prefijos de unidades, Ap. I-*e*.

N
Newton o vis, Ap. I-*e*.

$g_N = 9{,}806\,65\ \mathrm{m/s^2}$
Valor normal de la gravedad, Ap. I-*e*.

dyn
Dina, Ap. I-*e*.

CGS
Cegesimal, Ap. I-*e*.

asm
Unidad astronómica de masa, Ap. I-*e*.

asf
Unidad astronómica de fuerza, Ap. I-*e*.

parsec
$3{,}0838 \cdot 10^{6}$ m, Ap. I-*e*.

$y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$[\overline{y} = \varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)]$
Función dimensionalmente homogénea, Ap. I-*f*.

$x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$
$[a_{1i}\, k_1 + \ldots + a_{ni}\, k_n = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m]$
Producto nildimensionado, Ap. I-*h*.

R
Número de Reynolds, Ap. I-*h*.

P
Coeficiente de presión, Ap. I-*h*.

C_a
Coeficietne de arrastre, Ap. I-*h*.

Teorema Π
Teorema de Vaschy-Buckingham, Ap. I-*i*.

$$\mathrm{M}$$
Peso molecular nildimensionado, Ap. I-*j*.

$$N$$
Número de AVOGADRO, Ap. I-*j*.

$$\text{k-mol}$$
kilomol = kilogramo-molécula, Ap. I-*j*.

$$\theta$$
Temperatura absoluta, Ap. I-*j*.

$$R$$
Constante de los gases, Ap. I-*j*.

$$°\mathrm{K}$$
Grado KELVIN, Ap. I-*j*.

$$\mathrm{erg}$$
Ergio, Ap. I-*j*.

$$\mathrm{J}$$
JOULE ($1\ \mathrm{J} = 10^7$ erg), Ap. I-*j*.

$$\mathrm{at}_N$$
Atmósfera normal ($1\ \mathrm{at}_N = 1{,}01325 \cdot 10^6$ dyn/cm²), Ap. I-*j*.

$$k = R/N = 1{,}372 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J}/(°\mathrm{K})$$
Constante universal de BOLTZMANN, Ap. I-*j*.

$$\mathrm{k}(r, s)$$
Núcleo de ecuación integral, Ap. II-1.

$$\int \mathrm{k}(r, s)\,\mathrm{x}(s)\,ds = \mathrm{h}(r)$$
Ecuación integral de 1ª especie, Ap. II-1, 5.

$$\mathrm{x}(r) - \lambda \int \mathrm{k}(r, s)\,\mathrm{x}(s)\,ds = \mathrm{h}(r) \not\equiv 0$$
Ecuación integral de 2ª especie, no homogénea, Ap. II-1.

$$\mathrm{x}(r) - \lambda \int \mathrm{k}(r, s)\,\mathrm{x}(s)\,ds = 0$$
Ecuación integral de 2ª especie, homogénea, Ap. II-1.

$$\mathrm{k}(r, s) = \mathrm{k}(s, r)$$
Núcleo simétrico, Ap. II-1.

$$\mathrm{k}(r, s) = \alpha(r)\beta(s)$$
Núcleo de variables separadas, Ap. II-2*a*.

$$\mathrm{k}(r, s) = \alpha_1(r)\beta_1(s) + \ldots + \alpha_n(r)\beta_n(s)$$
Núcleo disociado o degenerado, Ap. II-2*a*.

$$\mathrm{k}^2(r, t) = \int \mathrm{k}(r, s)\,\mathrm{k}(s, t)\,ds$$

$$\mathrm{k}^3(r, t) = \int \mathrm{k}(r, s)\,\mathrm{k}^2(s, t)\,ds$$

. . . .

Núcleos iterados, Ap. II-2*c*₂.

$$\mathrm{K}^2\ ,\ \mathrm{K}^3\ ,\ \ldots$$
Operadores iterados, Ap. II-2*c*₂.

$$\mathrm{K}(r, s, \lambda)$$
Núcleo resolvente o recíproco, Ap. II-2*c*₂.

$$\mathrm{K}(r, s, \lambda) = \mathrm{k}(r, s) + \lambda \mathrm{k}^2(r, s) + \lambda^2 \mathrm{k}^3(r, s) + \ldots$$
Serie de NEUMANN, Ap. II-2*c*₂.

$$\mathrm{x}(r) = \mathrm{h}(r) + \lambda \int \mathrm{K}(r, s, \lambda)\,\mathrm{h}(s)\,ds$$
Ecuación integral recíproca, Ap. II-2*c*₂.

$$|\lambda| < \frac{1}{\mu}\ ,\quad \mu^2 = \int\!\!\int \overline{\mathrm{k}(r, s)}^2\,dr\,ds$$
Fórmula de SCHMIDT para acotación del radio de convergencia de la serie de NEUMANN, Ap. II-2*c*₃.

$$\Delta_i$$
Suma de los menores principales de orden *i* en $\det\{k_{ij}\}$, Ap. II-2*d*₁.

$$\Delta_i[\alpha(r), h]$$
Suma de los menores principales de orden *i*, orlados con las a_i, h_j, Ap. II-2*d*₁.

$$\mathrm{x}(r) = \mathrm{h}(r) + \lambda \int \mathrm{K}(r, s, \lambda)\,\mathrm{h}(s)\,ds$$
Fórmula de FREDHOLM, Ap. II-2*d*₁.

$$\mathrm{K}(r, s, \lambda) = -\frac{\Delta[\alpha(r), \beta(s), \lambda]}{\Delta(\lambda)} = \frac{\mathrm{D}(r, s, \lambda)}{\mathrm{D}(\lambda)}$$
Núcleo resolvente, Ap. II-2*d*₁.

$$\mathrm{x}(r) - \lambda \int_0^r \mathrm{k}(r, s)\,\mathrm{x}(s)\,ds = \mathrm{h}(r)$$
Ecuación integral de VOLTERRA de 2ª especie, Ap. II-2*e*₁.

$$\mathrm{F}[x] = \int_r \int_s \mathrm{k}(r, s)\,\mathrm{x}(r)\,\mathrm{x}(s)\,dr\,ds$$
Forma cuadrática integral, Ap. II-3*a*.

$$\nu = \frac{1}{\lambda},\ \lambda \text{ autovalor}$$
Número característico, Ap. II-3*b*.

$$\mathrm{J}(\varphi) = \int\!\!\int \mathrm{k}(r, s)\,\varphi(r)\,\varphi(s)\,dr\,ds$$
$$\left\{\int [\varphi(r)]^2 dr = 1\right\}$$
Forma integral correspondiente a un núcleo, Ap. II-3*b*.

$$\mathrm{f}(r) = \int \mathrm{k}(r, s)\,\mathrm{g}(s)\,ds$$
Funciones emanantes de un núcleo, Ap. II-3*c*, 4*b*; XXVIII-IX*a*.

$$k(r,s) = \nu_1\varphi_1(r)\varphi_1(s) + \nu_2\varphi_2(r)\varphi_2(s) + \ldots$$

Núcleo de tipo bilineal, Ap. II-4*a*.

$$K(r,s,\lambda) = \frac{\varphi_1(r)\varphi_1(s)}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\varphi_2(r)\varphi_2(s)}{\lambda_2 - \lambda} + \ldots$$

Descomposición en fracciones simples del núcleo resolvente o "de FREDHOLM", Ap. II-4*c*.

$$h(r)$$

Emanante de una ecuación integral de 1ª especie, Ap. II-5*a*.

$$x(s)$$

Generatriz de una ecuación integral de 1ª especie, Ap. II-5*a*.

$$k'(r,s) = \int k(r,t)\,k(s,t)\,dt$$

$$k''(r,s) = \int k(t,r)\,k(t,s)\,dt$$

Núcleos simétricos adjuntos, Ap. II-5a_2.

$$-\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-\xi}}\,\frac{d\xi}{\operatorname{sen}\tau} = f(x)$$

Ecuación integral de 1ª especie de ABEL, Ap. II-5*c*.

$$\int_0^x \frac{y(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^p} = F(x) \quad (0 < p < 1)$$

Ecuación de ABEL generalizada, Ap. II-5*c*.

$$k(r,s) = \frac{1}{r-s}$$

Núcleo de HILBERT, Ap. II-5*d*.

$$k(s,r) = -k(r,s)$$

Núcleo antisimétrico, Ap. II-5*e*.

$$D$$

Operador de derivación, Ap. III-1a_1.

$$p \;,\; py \;,\; p^2y \;,\; \ldots$$

Operador de derivación de HEAVISIDE y derivadas sucesivas, Ap. III-1a_1.

$$D^m(D^n y) = D^{m+n} y$$
$$(D^m)^n y = D^{mn} y$$

Reglas operativas con D, Ap. III-1a_1.

$$D^0 y = y$$

Potencia nula del operador D, Ap. III-1a_1.

$$D^{-1}y = \int_0^t y(\tau)\,d\tau$$

$$D^{-2}y = \int_0^t \int_0^t y(\tau)\,(d\tau)^2 = \int_0^t y(\tau)\,(t-\tau)\,d\tau$$

. . . .

$$D^{-n}y = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t y(\tau)\,(t-\tau)^{n-1}\,d\tau$$

Potencias negativas del operador D, Ap. III-1a_1.

$$f(D)$$

Función del operador D, Ap. III-1a_1.

$$e^{hD}\,y(t) = y(t+h)$$

Función exponencial del operador D, Ap. III-1a_1.

$$f(D)\,[e^{at}\,y(t)] = e^{at}\,f(D+a)\,y(t)$$

Regla de trasposición de LAPLACE, Ap. III-1a_1.

$$y = \frac{1}{P(D)}f(t) = P^{-1}(D)\,f(t)$$

Solución operacional de la ecuación diferencial $P(D)y = f(t)$, $P(x) = a_0x^m + \ldots + a_m$, Ap. III-1$a_2$; 2.

$$(D-r)^{-n}f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\,e^{rt}\int_0^t e^{-r\tau}f(\tau)\,(t-\tau)^{n-1}\,d\tau$$

Fórmula de HEAVISIDE, Ap. III-1a_2.

$$\delta(x)$$

"Función impropia" o medida de DIRAC, Ap. III-1*b*; 10*b*.

$$1 = 1(x)$$

Función salto unidad de HEAVISIDE, Ap. III-1*b*.

$$1'(x) = \delta(x)$$

Derivada de $1(x)$, Ap. III-1*b*; 10*b*.

$$\delta'(x) \;,\; \delta''(x) \;,\; \ldots$$

Derivadas de $\delta(x)$, Ap. III-1*b*; 10*c*.

$$L\{\delta(t-a)\} = e^{-ap}$$

Transformada de LAPLACE de δ, Ap. III-3*a*; 10*f*.

$$\Delta(t-\tau;\varepsilon) = [1(t-\tau) - 1(t-\tau-\varepsilon)]/\varepsilon$$

Aproximación a una fuerza impulsiva unitaria, Ap. III-3*c*.

$$\delta(t-\tau)$$

Función impulsiva unitaria en $t = \tau$, Ap. III-3*c*.

$$q$$

Operador D^{-1}, Ap. III-7*a*.

$$\mathrm{q}\,\mathrm{f}(t) = \int_0^t \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$$

Aplicación de q, Ap. III-7*a*.

$$\mathrm{P}(\mathrm{q})\mathrm{f} = (a_0 + a_1\mathrm{q} + \ldots + a_n\mathrm{q}^n)\mathrm{f} = = a_0\mathrm{f}(t) + \int_0^t \left[a_1 + \ldots + + a_n \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \mathrm{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Operador polinómico en q, Ap. III-7*a*.

$$\mathrm{G}(\mathrm{q})\mathrm{f} = a_0\mathrm{f}(t) + + \int_0^t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \right\} \mathrm{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Símbolo operatorio, Ap. III-7*a*.

$$\mathrm{G}(\mathrm{q})1 = \mathrm{g}(t)1(t)$$

Admitancia indicial de G(q), Ap. III-7*a*.

$$\mathrm{G}(\mathrm{q})\delta(t) = \mathrm{g}'(t)$$

Respuesta percusional de G(q), Ap. III-7*a*.

$$p\,.\,\mathrm{L}\{\mathrm{F}(t)\} = \varphi(p)$$

Transformación de CARSON, Ap. III-7*b*.

$$\mathrm{F}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\varphi(p)\,e^{pt}}{p}\,\mathrm{d}p$$

Integral de BROMWICH-WAGNER, Ap. III-7*b*.

$$\mathrm{Z}(\omega) = \mathrm{R} + \mathrm{L}(\mathrm{D} + i\omega)$$

Impedancia compleja para la pulsación ω, Ap. III-8*a*.

$$\mathrm{G} \circ \Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{G}(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Convolución sobre intervalo infinito, Ap. III-9*a*.

$$\mathrm{G} \circ \Phi = \varphi(t)$$

Transformación integral por convolución de núcleo G, Ap. III-9*a*.

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}(t-\tau)^2}\,\Phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Transformación de WEIERSTRASS, Ap. III-9*a*.

$$\Phi(u) = = \frac{1}{\mathrm{g}(\mathrm{D})}\varphi(u) \text{ con } \mathrm{g}(p) = \mathrm{L}_{\mathrm{II}}\{\mathrm{G}(t)\}$$

Inversión operacional de $\mathrm{G} \circ \Phi = \varphi(t)$, Ap. III-9*b*.

[L]

Clase de funciones sumables en cada intervalo finito, Ap. III-10*a*.

C

Clase de las funciones $\varphi(x)$ continuas en $(-\infty, \infty)$ y nulas fuera de un intervalo finito, Ap. III-10*a*.

$$(\varphi, \mathrm{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\{\mathrm{f}\,\varepsilon[\mathrm{L}], \varphi\,\varepsilon\,\mathrm{C}\}$$

Producto escalar como funcional lineal en C, Ap. III-10*a*.

$$\mu[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \quad , \quad \varphi\,\varepsilon\,\mathrm{C}$$

Funcional lineal continuo en C definido por una función de distribución μ, Ap. III-10*b*.

$$\mu'(x)$$

Densidad de la medida absolutamente continua μ, Ap. III-10*b*.

$$\mu[\varphi] = (\varphi, \mu')$$

Transformación de $\mu[\varphi]$ para μ absolutamente continua, Ap. III-10*b*.

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) \quad , \quad \varphi\,\varepsilon\,\mathrm{C}$$

Medida de DIRAC, Ap. III-10*b*.

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a) \quad , \quad \varphi\,\varepsilon\,\mathrm{C}$$

Trasladada δ_a de la medida de DIRAC, Ap. III-10*b*.

$$\mathrm{L}'(\varphi) = -\mathrm{L}(\varphi') \quad , \quad \varphi\,\varepsilon\,\mathrm{C}$$

Derivada de una funcional lineal, Ap. III-10*c*.

D

Clase de las funciones de prueba, Ap. III-10*c*.

$$\mathrm{L}^{(n)}(\varphi) = (-1)^n\mathrm{L}(\varphi^{(n)}) \quad , \quad \varphi\,\varepsilon\,\mathrm{D}$$

Derivada n-ésima de una distribución, Ap. III-10*c*.

$$\mathrm{D}_m\ (\mathrm{D}_0 = \mathrm{C})$$

Espacio de las funciones con derivadas continuas hasta el orden m en $(-\infty, \infty)$, y nulas fuera de un intervalo finito, Ap. III-10d_2.

$$\mathrm{D}^* \quad , \quad \mathrm{D}_m^*$$

Espacios duales de D, D_m, Ap. III-10d_2.

Σ

Soporte de una función, Ap. III-10d_3.

S

Soporte de una distribución, Ap. III-10d_3.

$$\mathrm{L} \circ \mathrm{M}$$

Convolución de distribuciones, Ap. III-10*e*.

$$\mathrm{L}\{\delta\} = 1 \ , \ \mathrm{L}\{\delta'\} = p \ , \ \mathrm{L}\{\delta''\} = p^2 \ , \ \ldots$$

Transformadas de LAPLACE de δ y sus derivadas, Ap. III-10*f*.

p
Probabilidad de un acontecimiento A, Ap. IV-1*a*.

$q = 1 - p$
Probabilidad del acontecimiento contrario, Ap. IV-1*d*.

X
Variable aleatoria, Ap. IV-2*a*.

$$\mathrm{X} \begin{cases} x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n \\ p_1 \; p_2 \; \ldots \; p_n \end{cases}$$
$(p_i \geqslant 0 \quad , \quad \sum p_i = 1)$
Variable aleatoria con número finito de valores, Ap. IV-2*a*.

$m_r = \sum p_i \, x_i{}^r$
Momento de orden *r*, Ap. IV-2*b*.

$m_1 = \sum p_i \, x_i$
Media o valor medio, Ap. IV-2*b*.

$\mu_r = \sum p_i \, (x_i - m_1)^r$
Momento centrado de orden *r*, Ap. IV-2*b*.

$\mathrm{V} = \mu_2$
Variancia, Ap. IV-2*b*.

$\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\mathrm{V}}$
Desviación normal, Ap. IV-2*b*.

$$\frac{\mathrm{X} - m_1}{\sigma}$$
Variable aleatoria normalizada o reducida, Ap. IV-2*c*.

$\mathrm{P}(a, b)$
Probabilidad de $\mathrm{X} \in (a, b)$, Ap. IV-5*a*.

$$\mathrm{f}(x) \;\text{ con }\; \mathrm{P}(a, b) = \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$$
Densidad de probabilidad o función de frecuencia, Ap. IV-5*a*.

$\mathrm{F}(x) = \text{Prob. de } \mathrm{X} \leqslant x$
Función de distribución o de probabilidades totales, Ap. IV-5*a*.

$$m_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \, \mathrm{dF}(x)$$
Expresión de los momentos por la función de distribución, Ap. IV-5*a*.

$$m_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \, \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$$
Expresión de los momentos por la función densidad de probabilidades, Ap. IV-5*a*.

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$
Curva normal, Ap. IV-5*b*.

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m_1)^2/(2\sigma^2)}$$
Curva normal general, Ap. IV-5*b*.

$\delta_r = x_r - \mathrm{X}$
Errores verdaderos, Ap. IV-7.

$\delta = \sum \delta_r : n$
Promedio de los errores, Ap. IV-7.

M
Media de los valores observados, Ap. IV-7.

$\Delta_r = x_r - \mathrm{M}$
Errores aparentes, Ap. IV-7.

$\mu = \sqrt{\sum \delta_r : n}$
Error medio cuadrático, Ap. IV-7.

r
Error probable o mediano, Ap. IV-7.

i
Paso o intervalo de una escala, Ap. V-1*a*.

m
Módulo de una escala, Ap. V-1*a*.

$h_i \quad ; \quad d_i$
Alturas del triángulo básico de coordenadas triangulares o baricéntricas, y distancias de un punto a sus lados, Ap. V-1*e*.

$x_1, \; x_2, \; x_3$
$[\varrho x_i = d_i/h_i = \mathrm{A}_i x + \mathrm{B}_i y + \mathrm{C}_i]$
Coordenadas baricéntricas, Ap. V-1*e*.

$u_1, \; u_2, \; u_3$
Coordenadas homogéneas duales de la recta $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$, Ap. V-1*e*.

$x_i = 0$
Ecuación del lado del triángulo básico, opuesto a A_i, Ap. V-1*e*.

$(1, 1, 1)$
Coordenadas del baricentro del triángulo básico, Ap. V-1*e*.

en N , en Z
Clases de nomogramas, Ap. V-2*d*.

$\mathrm{f}_{12}(z_1, z_2) = \mathrm{g}_{34}(z_3, z_4)$
Relación entre cuatro variables, Ap. V-3*a*.

ÍNDICE ALFABÉTICO

A

B

C

CH

D

E

F

G

H

I

J

LL

M

N

R

S

T

LA EDITORIAL KAPELUSZ, S. A.
dio término a esta obra el 10 de noviembre de 1959, en
FRIGERIO *Artes Gráficas*, Perú 1257,
Buenos Aires.

K. 6780